CÔNG PHÁ MÔN TOÁN THPT

NGUYỄN TIẾN CHINH

KỸ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ

1. KỸ THUẬT ĐẶT MỘT ẨN PHỤ
2. KỸ THUẬT ĐẶT HAI ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PT ĐẲNG CẤP
3. ĐẶT HAI ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ PT ĐỐI XỨNG
4. ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN
5. 46 VÍ DỤ PHÂN TÍCH CHI TIẾT TỪ DỄ ĐẾN KHÓ

TÀI LIỆU SẮP PHÁT HÀNH - TUYỂN TẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC SẮC NHIỀU CÁCH GIẢI - MỜI CÁC EM ĐÓN

II- GIẢI PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Đặt một ẩn phụ

Tìm mối liên hệ giữa các biến để đặt ẩn phụ thích hợp. Một số dạng cơ bản thường gặp:

① $a.f(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0 \xrightarrow{PP} \begin{cases} t=\sqrt{f(x)},\ t\geq 0 \\ at^2+bt+c=0 \end{cases}$

Xin nhắc lại,hầu hết các đề bài sẽ không cho ngay mối quan hệ để nhìn thấy cách đặt ẩn phụ ngay do đó ta cần biết phán đoán hướng đi của bài toán dựa trên cơ sở phân tích hợp lý

CÁC VÍ DỤ ĐẶT MỘT ẨN PHỤ

BT Mẫu 1 :Giải Phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (*)

ĐK: $x\geq \frac{1}{2}$

Đặt t = $\sqrt{2x-1};t\geq 0 \rightarrow x=\frac{t^2+1}{2}$(1) thay vào phương trình (*) ta có:

$$t+\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-3\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t^2-4t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \\ t=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$ do $t\geq 0$ nên t = 1, t = $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

+) khi t = 1 thay vào (1) ta có x = 1

+) Khi t = $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ ta có x = $\frac{13+4\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x = 1 hoặc x = $\frac{13+4\sqrt{5}}{2}$

BT Mẫu 2 :Giải Phương trình $2x^2+3x-14=2\sqrt[3]{2x^2+3x-10}$ (*)

Bài Giải : Đặt t = $\sqrt[3]{2x^2+3x-10} \Rightarrow 2x^2+3x=t^3+10$ thay vào phương trình (*) ta có

$$(*) \Leftrightarrow t^3-2t-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t^2+2t+2=0(VN) \end{array}\right.$$

Với t = 2 ta có $2x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{17}}{4}$ (TM)

BT Mẫu 3 : Giải phương trình : $x^2+2x+4+\sqrt{x(x^2+4)}=0(*)$

Nhận xét : Thoạt đầu khi nhìn thấy căn ta thường nghĩ ngay sẽ đặt t bằng căn đó,tuy nhiên bình tĩnh phân tích ta thấy rằng có điều gì đó bất ổn nếu ta đặt như vậy,vì việc thế theo t là hơi khó khăn một chút,ta sẽ hóa giải điều này bằng cách chia cả hai vế cho x xem sao ???

Lời giải :

ĐK : $x \geq 0$

Xét thấy x = 0 không là nghiệm của phương trình,ta chia cả hai vế cho x > 0 thì được pt mới như sau :

$\dfrac{x^2+4}{x}+2+\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}=0(1)$ đúng hướng !!!

Đặt t = $\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}, t \geq 0$ thay vào pt ta có $t^2+t+2=0$ Vô nghiệm

Thấy rằng chỉ cần quan sát điểm bất thường của bài toán va bằng một động tác ta đã hóa giải pt rồi.

BT Mẫu 4 : Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+1}=-4x+\dfrac{1}{x}+3(*)$ (Đề thi thử Sở GD Vĩnh Phúc)

Lời Giải

ĐK : $\left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Để thuận tiện cho lời giải ta sẽ chia bài toán làm 2 trường hợp sau đây

TH1 : khi x > 0 chia cả hai vế cho x ta có pt : $\Leftrightarrow \sqrt{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-4+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}(1)$

Đặt $t=\sqrt{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}(t \geq 0) \rightarrow \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$

thay vào (1) ta có $t=t^2-6 \Leftrightarrow t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t=-2(L) \vee t=3(TM)$

Với t = 3 $\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=3 \Leftrightarrow 7x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{37}}{14}(\text{tm}) \vee \text{x}=\frac{3-\sqrt{37}}{14}(L)$

TH2 : Khi x < 0 chia hai vế cho x ta có : $\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=4-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}(2)$

Đặt $t=\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}(t\ge 0)\rightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

thay vào (1) ta có $t=6-t^2 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2(\text{N})\vee t=-3(\text{L})$

Với t = 3 $\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=2 \Leftrightarrow 2x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}(\text{L}) \vee \text{x}=\frac{3-\sqrt{17}}{4}(\text{N})$

Kết hợp Đk bài toán ta có hai nghiêm là : $x=\frac{3+\sqrt{37}}{14} \vee x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$

<u>BT Mẫu 5</u> : Giải phương trình : $2x+5\sqrt{x}>11+\frac{14}{x-2}(*)$ (Chuyên Hùng Vương)

ĐK : $0<x\ne 2$

Viết lại pt như sau : $2(x-2)+5\sqrt{x}>7+\frac{14}{x-2} \Leftrightarrow 2(x-2)+5\sqrt{x}>\frac{7x}{x-2}$

Vì x > 0 nên chia cả hai vế cho $\sqrt{x}$ ta được: $2.\frac{x-2}{\sqrt{x}}+5>7\frac{\sqrt{x}}{x-2}$ Đặt t = $\frac{x-2}{\sqrt{x}}$ thay vào pt có :

2t + 5 > 7/t $\Leftrightarrow \frac{2t^2+5t-7}{t}>0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<t<0 \vee t>1$

TH1 : Khi t > 1 $\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x}}>1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2>0(do\sqrt{x}>0) \Leftrightarrow x>4$

TH2 : $-\frac{7}{2}<t<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-2}{\sqrt{x}}>-\frac{7}{2}\\ \frac{x-2}{\sqrt{x}}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+7\sqrt{x}-4>0\\ x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-4 \vee x>\frac{1}{2}\\ x<2\end{cases} \Leftrightarrow 1/2<x<2$

Vậy tập nghiệm của BPT là S = (1/2 ;2) v (4 ;+ ∞)

<u>BT Mẫu 6</u> : Giải BPT sau $\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1<\frac{1}{1-x^2}(*)$

ĐK : -1 < x < 1

Viết lại pt như sau : $\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1<\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2}-\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}+2>0$

Đặt t = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ta có : $t^2-3t+2>0 \Leftrightarrow t<1 \vee t>2$

TH1 : khi t < 1 $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}<1 \Leftrightarrow x<\sqrt{1-x^2}\,(a)$

+) Khi -1 < x < 0 thì (a) luôn đúng

+) khi $0 \le x<1, (a) \Leftrightarrow x^2<1-x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ Kết hợp ĐK ta có ngay $0 \le x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

TH2: Khi t > 2 $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}>2 \Leftrightarrow x>2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2>4(1-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy tập nghiệm của BPT là $S=\left(-1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee \left(\frac{2}{\sqrt{5}};+\infty\right)$

<u>BT Mẫu7</u> : Giải BPT $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}>x-\frac{1}{2}(*)$

Nhận xét : Nhìn vào phương trình ta thấy ngay có dấu hiệu « Nhân lượng liên hợp « rồi nhé vậy thì ta thử tiếp xem sao :

Lời giải

ĐK : $x \in [-1;3] \setminus \{1\}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-1)}>x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}>x-\frac{1}{2}(1)$$

Để bài toán đơn giản hơn ta sẽ chia trường hợp rồi quy đồng bỏ mẫu nhé

TH1 : $-1 \le x<1$ (a) ta có

(1) $\Leftrightarrow x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}<2x^2-3x+1 \Leftrightarrow 2\left(-x^2+2x+3\right)+\sqrt{-x^2+2x+3}-6<0(2)$

Đăt t = $\sqrt{-x^2+2x+3}, t \ge 0 \to t^2=-x^2+2x+3$ lúc đó (2) trở thành

$2t^2+t-6<0 \Leftrightarrow -2<t<\frac{3}{2}$ do t ≥ 0 nên

$$0 \le t<\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+2x+3} \ge 0 \\ \sqrt{-x^2+2x+3}<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x<\frac{2-\sqrt{7}}{2} \cup \frac{2+\sqrt{7}}{2}<x \le 3$$

Kết hợp ĐK (a) ta có $-1 \le x<\frac{2-\sqrt{7}}{2}$

TH 2 : 1< x ≤ 3 $(1) \Leftrightarrow x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}>2x^2-3x+1 \Leftrightarrow 2\left(-x^2+2x+3\right)+\sqrt{-x^2+2x+3}-6>0$

Đặt t = $\sqrt{-x^2+2x+3}, t \ge 0 \to t^2 = -x^2+2x+3$ lúc đó (2) trở thành

$$2t^2+t-6>0 \Leftrightarrow t>\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{7}}{2}<x<\frac{2+\sqrt{7}}{2}$$ kết hợp với (b) ta có $1<x<\frac{2+\sqrt{7}}{2}$

Vậy tập nghiệm của BPT là $-1 \le x < \frac{2-\sqrt{7}}{2} \cup 1 < x < \frac{2+\sqrt{7}}{2}$

<u>BT Mẫu 8</u> : Giải BPT $\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2)} \ge \frac{1}{2} (*)$ (Thi thử THPT Quốc Gia Lý Tự Trọng)

Nhận Xét :

+ Ta thấy BPT có chút gì đó mang ý tưởng của Nhân liên hợp - nhưng nếu liên hợp thì BT sẽ cồng kềnh,phức tạp quá,vì thế ta ko vội đi theo ý tưởng này

+ Nhận thấy $\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2) = \frac{2x^2-4x+8}{\sqrt{6(x^2+2x+4)}+2(x+2)} > 0 \forall x \ge -2$ Với điều này bài toán sẽ dễ dàng hơn một chút rồi - làm thôi các em

ĐK : $x \ge -2$

Viết lại (*)

$$2\sqrt{x+2}-4 \ge \sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}+2(x+2)-4 \ge \sqrt{6\left[(x+2)^2-2(x+2)+4\right]}$$

Đặt t = x + 2 ,(ĐK $x \ge 2$) phương trình trở thành

$$2t+2\sqrt{t}-4 \ge \sqrt{6\left[t^2-2t+4\right]} (1)$$

Tới đây có hai hướng

+ Hướng 1 : Bình phương 2 vế rồi đưa bài toán về bậc 4(bình phương 2 lần) bạn đọc tự giải

+ Hướng 2 : xét thấy t = 0 không là nghiệm của phương trình,chia cả 2 vế cho $\sqrt{t}$ ta có

(1) $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)+2 \ge \sqrt{6\left(t+\frac{4}{t}-2\right)} (2)$ tới đây chắc các em đã nhìn ra ý tưởng rồi đúng ko ???

Đặt u = $\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}} \Rightarrow u^2 = t+\frac{4}{t}-4; (2) \Leftrightarrow 2u+2 \ge \sqrt{6(u^2+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+2 \ge 0 \\ 4u^2+8u+4 \ge 6u^2+12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \ge -1 \\ 2(u-2)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow u=2 \Leftrightarrow \sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}=2 \Leftrightarrow t-2\sqrt{t}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{t}=1+\sqrt{3}(N) \vee \sqrt{t}=1-\sqrt{3}(L)$$

Với $\sqrt{t}=1+\sqrt{3} \Leftrightarrow t=4+2\sqrt{3} \to x=2+2\sqrt{3}(TM)$ Vậy BPT đã cho có nghiệm duy nhất.

<u>BT Mẫu 9</u>: Giải BPT sau : $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)(*)$ (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Nhận Xét

Thoạt nhìn ta chưa thấy dấu hiệu đặt ẩn phụ,nếu tiến hành đặt theo căn như thường lệ sẽ thấy bài toán đi vào ngõ cụt ngay bởi biểu thức trong căn là bậc 3,ngoài căn là bậc 2 do vậy ta nhận định rằng có thể mối quan hệ sẽ xuất hiện khi chúng ta phân tích biểu thức trong căn chăng ???

Phân tích : $\begin{cases} x^3+2x^2-4x = x\left(x^2+2x-4\right) \\ x^2+5x-4 = 3x+x^2+2x-4 \end{cases}$

ta thấy đầu mối của bài toán đã xuất hiện,có vẻ nhận định trên hoàn toàn đúng đắn,giải thử nhé !!!

ĐK : $x^3+2x^2-4x \ge 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{5} \le x \le 0 \vee x \ge -1+\sqrt{5}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4\sqrt{x\left(x^2+2x-4\right)} > x^2+5x-4 \Leftrightarrow 4\sqrt{x\left(x^2+5x-4\right)} > 3x+x^2+2x-4(1)$

TH1 : $x \ge -1+\sqrt{5}$ khi đó chia cả hai vế của (1) cho x ta có $(1) \Leftrightarrow 4\sqrt{\dfrac{x^2+2x-4}{x}} > 3+\dfrac{x^2+2x-4}{x}$

Đặt t = $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-4}{x}}, t \ge 0, (2) \Leftrightarrow t^2-4t+3<0 \Leftrightarrow 1<t<3$

Vậy $1 < \sqrt{\dfrac{x^2+2x-4}{x}} < 3 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{x^2+2x-4}{x} < 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-4>0 \\ x^2-7x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$

TH2 : $-1-\sqrt{5} \le x \le 0 \to x^2+5x-4<0$ khi đó (1) luôn đúng

Vậy tập nghiệm của BPT : S = $\left[-1-\sqrt{5};0\right] \vee \left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

<u>**BT Mẫu 10**</u> :Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1} = 2(*)$

ĐK : x ≥ 1

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4} = 2-\sqrt{x-1}$; Đặt t = $\sqrt{x-1}, t \ge 0$ tao có :

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{t^4+4} = 2-t \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 2 \\ t^4+4 = (2-t)^2 \Leftrightarrow t^4-t^2+4t=0 \end{cases}$

$t\left(t^3-t+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^3-t+4=0 \end{array}\right.$

<u>**BT Mẫu 11**</u>: Giải phương trình: $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = -2x-4+\dfrac{3}{x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Đk: $1+\dfrac{2}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x \le -2 \end{array}\right.$ khi đó phương trình $\Leftrightarrow x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = -2x^2-4x+3$

+) Với x > 0 Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} = -2(x^2+2x)+3$

Đặt: $t=\sqrt{x^2+2x}$ ta có $2t^2+t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2}\ \text{(L)} \end{array}\right.$

$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}=1 \Leftrightarrow x^2+2x=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{2}\ \text{(L)} \\ x=-1+\sqrt{2}\ \text{(Tm)} \end{array}\right.$

+) Với $x\le -2$ có

Phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{x^2+2x}=-2(x^2+2x)+3$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x}$ phương trình trở thành $2t^2-t-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ \text{(L)} \\ t=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

$t=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4(x^2+2x)=9 \Leftrightarrow 4x^2+8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-4-\sqrt{52}}{4} \\ x=\dfrac{-4+\sqrt{52}}{4}\ \text{(L)} \end{array}\right.$

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-4-\sqrt{52}}{4};\ x=-1+\sqrt{2}$.

BT Mẫu13: Giải Phương trình sau $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$ **(ĐH DL Tôn Đức Thắng)**

TXĐ D = R

Đặt t = $\sqrt{x^2+x+2}, t\ge 0$ lúc đó viết lại pt như sau

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5}+t=\sqrt{3t^2+13} \Leftrightarrow 2t^2+5+2t\sqrt{t^2+5}=3t^2+13 \Leftrightarrow 4t^2\left(t^2+5\right)=\left(t^2+8\right)^2$$

$\Leftrightarrow 3t^4+4t^2-64=0 \Leftrightarrow t^2=4 \vee t^2=-\dfrac{16}{3}(L)$ Với $t^2=4 \Leftrightarrow x^2+x+2=4 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2(TM)$

BT Mẫu 14 Giải phương trình sau : $\sqrt{4x^2+x+6}=4x-2+7\sqrt{x+1}\,(*)$

Nhận xét : Bài toán này có tới 2 căn bậc 2, câu hỏi đặt ra lúc này là đặt t = ? có hai ý tưởng như sau

1. Đặt t = $\sqrt{x+1} \to x=t^2-1$,các em sẽ giải phương trình bậc 4
2. Biến đổi một chút để tìm ra lời giải đẹp hơn ??? ở đây ta sẽ đi theo cách 2 vì cách một đã được trình bày nhiều ở bài trước rồi nhé :

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+5(x+1)}=2(2x-1)+7\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(2x-1)^2}{x+1}+5}=2.\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}+7$$

Đặt t = $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$ thay vào ta có

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5}=2t+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -7/2 \\ t^2+5=(2t+7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -7/2 \\ 3t^2+28t+44=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=-2$$

Với t = -2 ta có $\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}=-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1/2 \\ 4(x+1)=(1-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1/2 \\ 4x^2-8x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Qua ví dụ này ta thấy rằng nếu chịu khó quan sát và biến đổi sẽ cho ta một lời giải khá đẹp mắt,ở bài toán này sức mạnh của hệ số lại phát huy tác dụng...

② $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \pm \sqrt{f(x).g(x)} = h(x) \xrightarrow{PP} t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$

Thông thường với dạng toán này ta quan sát sẽ thấy có hai căn nhỏ và một căn lớn,khi đó một cách tự nhiên ta sẽ suy nghĩ tới việc đi phân tích biểu thức trong căn lớn xem có mối quan hệ gì với hai căn nhỏ ở trên hay không?Nếu có thì mọi việc đã được dự tính ta giải theo phương pháp,nếu không có mối quan hệ này ta thử biến đổi hoặc tư duy bài toán theo một hướng khác nhé.

BT Mẫu 15 : Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=3x-23+\sqrt{-2x^2+5x+12}\,(*)$

Nhận thấy biểu thức trong căn lớn chính là tích của hai biểu thức trong căn nhỏ,vì thế ta giải theo phương pháp ở trên:ĐK

Đk $\frac{-3}{2}\le x\le 4$

Đặt t = $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}, t\ge 0 \to t^2 = x+7+2\sqrt{(2x+3)(4-x)} \Leftrightarrow 3t^2=3x+21+6\sqrt{-2x^2+5x+12}$

$(*) \Leftrightarrow 3t^2-t-44=0 \Leftrightarrow t=4(N), t=-\frac{11}{3}(L)$ Với t = 4 ta có :

$4=\sqrt{3+2x}+\sqrt{4-x} \Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12}=9-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ -8x^2+20x+48=81-54x+9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ 17x^2-74x+33=0 \end{cases}$

X = $\frac{37-2\sqrt{202}}{17}(TM)$

MT Mẫu 16 : Giải Phương trình sau : $3\sqrt{x+2}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x\,(*)$ (ĐH 2010)

Lời giải : ĐK : $-2\le x\le 2$

Đặt t = $3\sqrt{x+2}-6\sqrt{2-x} \to t^2=9(x+2)+36(2-x)-36\sqrt{4-x^2}=9\left(10-3x-4\sqrt{4-x^2}\right)$

$(*) \Leftrightarrow t^2-9t=0 \leftrightarrow t=0 \vee t=9$

Khi t = 0 ta có

$3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}=0 \leftrightarrow 3\sqrt{2+x}=6\sqrt{2-x} \leftrightarrow 9(x+2)=36(2-x) \leftrightarrow x=\frac{6}{5}$

Khi t = 9 ta có

$3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}=9 \leftrightarrow 3\sqrt{2+x}=9+6\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 5x-15=12\sqrt{2-x}\,(1)$

Kết hợp ĐK $-2\le x\le 2$ thấy rằng 5x - 15 < 0 pt (1) vô nghiệm

Vậy bài toán đã cho có đúng một nghiệm x = 6/5

BT Mẫu 17 : Giải phương trình sau : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}-2\sqrt{2x^2+x}=6x-26\,(*)$

Lời Gải

ĐK : x ≥ 0

Đặt t = $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}\left(t\ge 0\right)\to t^2=3x+1+2\sqrt{2x^2+x}$

Viết Lại pt đã cho ta có : $2\left(3x+1+2\sqrt{2x^2+x}\right)-\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}\right)-28=0$ lúc đó pt (*) trở thành :

$$2t^2-t-28=0\Leftrightarrow t=4\vee t=-\frac{7}{2}(L)$$

Khi t = 4 $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=4\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x}=15-3x\Leftrightarrow \begin{cases}15-3x\ge 0\\ 4\left(2x^2+x\right)=\left(15-3x\right)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 5\\ x^2-94x+225=0\end{cases}\Leftrightarrow x=47-8\sqrt{31}$ (TMĐK)

<u>BT Mẫu 18</u>: Giải phương trình $20x+11+12\sqrt{x^2+5x+4}-5\left(\sqrt{x+1}+3\sqrt{x+4}\right)=0$ (*)

Lời giải :

ĐK : $x\ge -1$

Đặt t = $\sqrt{x+1}+3\sqrt{x+4}\left(t\ge 0\right)\to t^2=10x+37+6\sqrt{\left(x+1\right)\left(x+4\right)}$

Viết lại phương trình (*) ta có $2\left(10x+37+6\sqrt{\left(x+1\right)\left(x+4\right)}\right)-5\left(\sqrt{x+1}+3\sqrt{x+4}\right)-63=0\left(1\right)$

$$\left(1\right)\leftrightarrow 2t^2-5t-63=0\leftrightarrow t=7(N)\vee t=-\frac{9}{2}(L)$$

Với t = 7 $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+3\sqrt{x+4}=7\Leftrightarrow 6\sqrt{\left(x+1\right)\left(x+4\right)}=12-10x\Leftrightarrow 3\sqrt{\left(x+1\right)\left(x+4\right)}=6-5x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6-5x\ge 0\\ 9\left(x^2+5x+4\right)=\left(6-5x\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \frac{6}{5}\\ 16x^2-105x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ (TM)

<u>BT Mẫu 19</u> Giải phương trình sau $\sqrt{\left(1-3x\right)}+\sqrt{-3x^2-14x+5}+\sqrt{x+5}=9+x\left(*\right)$

Lời Giải

ĐK : $-5\le x\le \frac{1}{3}$

Đặt t = $\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5},\left(t\ge 0\right)\to t^2=6-2x+2\sqrt{-3x^2-14x+5}$

Viết lại pt đã cho ta có : $\left(6-2x+2\sqrt{-3x^2-14x+5}\right)+2\left(\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5}\right)=24$

$\Leftrightarrow t^2+2t-24=0\Leftrightarrow t=4\vee t=-6(L)$

Với t = 4 ta có $\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5}=4\leftrightarrow t^2=6-2x+2\sqrt{-3x^2-14x+5}\leftrightarrow \sqrt{-3x^2-14x+5}=5+x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -5\\ -3x^2-14x+5=\left(5+x\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -5\\ -4x^2-24x-20=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\vee x=-5$ (TMĐK)

<u>BT Mẫu 20</u> : Giải phương trình : $24\sqrt{8-2x^2}=22\sqrt{x+2}+33\sqrt{4-2x}+14x-8(*)$

Lời giải

ĐK : $-2\le x\le 2$

Đặt t = $2\sqrt{x+2}+3\sqrt{4-2x},t\ge 0\to t^2=44-14x+24\sqrt{8-2x^2}$

Viết lại phương trình (*) ta có : $5(44-14x+24\sqrt{8-2x^2})-11\left(2\sqrt{x+2}+3\sqrt{4-2x}\right)=36$

$$\Leftrightarrow 5t^2-11t-36=0\leftrightarrow t=4(N)\vee t=-\frac{9}{5}(L)$$

Với t = 4 ta có : $4=2\sqrt{x+2}+3\sqrt{4-2x}\leftrightarrow 24\sqrt{8-2x^2}=14x-28\Leftrightarrow \begin{cases}14x-28\ge 0\\ 576(8-2x^2)=\left(14x-28\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 12/7 \\ 1348x^2 - 784x - 3824 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\dfrac{478}{337} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm là x = 2

BT Mẫu 21: Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16 \quad (*)$

Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1999

Lời giải

- Điều kiện: $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x^2+5x+3 = (x+1)(2x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$.
- Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}, \ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3}$.

$(*) \Leftrightarrow t = t^2 - 4 - 16 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \ (N) \ \vee \ t = -4 \ (L)$.

- Với $t = 5 \Leftrightarrow 25 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21 - 3x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21 - 3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x+3) = (21-3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 143 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

BT Mẫu 22: Giải phương trình $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}} = 1 + \sqrt{3+2x-x^2}$ (Đề thi thử ĐH trường THPT Lương Ngọc Quyến)

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}, t > 0 \rightarrow \sqrt{3+2x-x^2} = \dfrac{t^2-4}{2}$ Thay vào pt ta có:

$t^3 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3(TM)$

BT Mẫu 23 : Giải phương trình: $-9x^2 - 2x - 2 = 2\sqrt{x^3+2x^2+2x+1}\,(*)$

Nhận Xét:

Trước hết ta phân tích thử biểu thức trong căn xem sao đã nhé,dùng casio thấy có một nghiệm là x = -1,sử dụng sơ đồ hoocner ta có biểu thức $(x+1)(x^2+x+1)$

Trong khi đó $-9x^2 - 2x - 2 = 7(x+1) - 9(x^2+x+1)$ Vì sao phân tích được như trên ở đây tôi đã mượn sức mạnh của đồng nhất hệ số,cụ thể như sau:

Cho $-9x^2 - 2x - 2 = \alpha(x+1) + \beta(x^2+x+1) = \beta x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha + \beta$ đồng nhất với VT ta có

$\begin{cases}\beta=-9\\ \alpha+\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-9\\ \alpha=7\end{cases}$ thế nhé,bài sau các em cứ làm vậy nhé

Bài Giải

ĐK: $x\geq -1$ Viết lại pt (*) ta có

$7(x+1)-9(x^2+x+1)=2\sqrt{(x+1)(x^2+x+1)}(1)$ chia hai vế cho $x^2+x+1>0$ ta có

$(1)\Leftrightarrow 7\frac{x+1}{x^2+x+1}-9-2\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}=0(2)$ Đặt t = $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}},t\geq 0$

$(2)\Leftrightarrow 7t^2-2t-9=0\Leftrightarrow t=-1(L)\vee t=\frac{9}{7}(N)$

Với t = 9/7 ta có : $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}=\frac{9}{7}\Leftrightarrow 49x+49=81x^2+81x+81\Leftrightarrow 81x^2+32x+32=0(VN)$

Vậy pt đã cho vô nghiệm

<u>BT Mẫu 25</u>: Giải phương trình $-5x^2+4x-3=3\sqrt{2x^3+x^2+2x+1}(*)$

Lời Giải :

Đk x $\geq -\frac{1}{2}$,phân tích bài toán giống vd trên ta có pt mới như sau

$(*)\Leftrightarrow 2(2x+1)-5(x^2+1)-3\sqrt{(2x+1)(x^2+1)}=0\Leftrightarrow 2\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)-3\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+1}}-5=0(1)$

Đặt t = $\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+1}};t\geq 0,(1)\Leftrightarrow 2t^2-3t-5=0\Leftrightarrow t=-1(L)\vee t=\frac{5}{2}(TM)$

Với t = 5/2 $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{x^2+1}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 8x+4=25x^2+25\Leftrightarrow 25x^2-8x+21=0(VN)$

Vậy pt đã cho vô nghiệm

<u>BT Mẫu 26 :</u>Giải bất phương trình: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x \quad (1)$

Đại học An Ninh khối A năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases}7x+7\geq 0\\ 7x-6\geq 0\\ 49x^2+7x-42\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq \frac{6}{7}.$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} + (7x+7) + (7x-6) < 182$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{7x+7}\right)^2 + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} + \left(\sqrt{7x-6}\right)^2\right] + \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} < 182$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}\right)^2 + \left(\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}\right) - 182 < 0 \qquad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$.

  Do $x \geq \frac{6}{7} \Rightarrow t \geq t\left(\frac{6}{7}\right) = \sqrt{7.\frac{6}{7}+7} + \sqrt{7.\frac{6}{7}-6} = \sqrt{13} \Rightarrow t \geq \sqrt{13}$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{13} \\ t^2 + t - 182 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{13} \\ -14 \leq t \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} \leq t \leq 13$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} \geq \sqrt{13},\ \forall x \geq \frac{6}{7} \\ \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow 14x + 1 + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} \leq 169$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(7x+7)(7x-6)} \leq 84 - 7x \Leftrightarrow \begin{cases} 84 - 7x \geq 0 \\ (7x+7)(7x-6) \geq 0 \\ (7x+7)(7x-6) \leq (84-7x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ x \leq -1 \vee x \geq \frac{6}{7} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{6}{7}; 6\right).$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\frac{6}{7}; 6\right)$.

BT Mẫu 27:Giải phương trình sau $\sqrt{2x^2+12x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 8\sqrt{x}\ (*)$

Nhận xét: Thoạt nhìn ta thấy phương trình không có mối liên hệ nào hết,tuy nhiên nếu để ý các bạn sẽ thấy vế trái xuất hiện "anh bạn thứ ba" theo kinh nghiệm cứ khi nào có sự xuất hiện này ta sẽ chia cả hai vế cho "anh bạn".Ý tưởng vậy nhé,thực hiện thôi

ĐK: $x \geq 0$

Xét thấy x = 0 không là nghiệm của phương trình,chia cả hai vế cho x > 0 ta có pt mới như sau:

$\sqrt{2x + 5/x + 12} + \sqrt{2x + 5/x - 3} = 8 (1)$ Đặt t = $2x + \frac{5}{x}$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t+12} + \sqrt{t-3} = 8 \rightarrow 2t + 9 + 2\sqrt{(t+12)(t-3)} = 64 \Leftrightarrow 2\sqrt{(t+12)(t-3)} = 55 - 2t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le t \le \dfrac{55}{2} \\ 4(t+12)(t-3) = (55-2t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le t \le \dfrac{55}{2} \\ 256t = 3169 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3169}{256}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{5}{x} = \frac{3169}{256} \Leftrightarrow 512x^2 - 3169x + 1280 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3169 \pm \sqrt{7421121}}{1024} \ (^{TM})$$

BT Mẫu 28: Giải bất phương trình: $3\sqrt{x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \dfrac{1}{2x} - 7 \quad (1)$

Đại học Thái Nguyên khối A – B năm 2000

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) - 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 7 > 0 \qquad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \dfrac{1}{4x} + 1 \Rightarrow x + \dfrac{1}{4x} = t^2 - 1$.

Ta có: $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} \Rightarrow t \ge \sqrt{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge \sqrt{2} \\ 2(t^2 - 1) - 3t - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge \sqrt{2} \\ 2t^2 - 3t - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge \sqrt{2} \\ t < -\dfrac{3}{2} \vee t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow t > 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 3 \Leftrightarrow 2x - 6\sqrt{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} < \dfrac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ \sqrt{x} > \dfrac{3 + \sqrt{7}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 4 - \dfrac{3}{2}\sqrt{7} \\ x > 4 + \dfrac{3}{2}\sqrt{7} \end{array} \right.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $x \in \left(0; 4 - \dfrac{3}{2}\sqrt{7}\right) \cup \left(4 + \dfrac{3}{2}\sqrt{7}; +\infty\right)$.

BT Mẫu 29:Giải bất phương trình: $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \ge 3\sqrt{x} \quad (*)$

Tài liệu thầy LÊ VĂN ĐOÀN - Đề thi Đại học khối B năm 2012

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 4x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 2 - \sqrt{3} \\ x \ge 2 + \sqrt{3} \end{array} \right.$.

- Với $x = 0 \Rightarrow (*):\ 2 \geq 0 \Rightarrow x = 0:$ là nghiệm bất phương trình.

- Với $x > 0:$ chia hai vế của $(*)$ cho $\sqrt{x},$ ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 4} \geq 3 \quad (1)$$

- Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2 \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{x} + 2 \quad (2)$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} \geq 3 - t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - t < 0 \\ \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 - 6 \geq (3-t)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq \frac{5}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \ \vee\ \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4} \ \vee\ x \geq 4.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty).$

BT Mẫu30: Giải phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ (ĐH 2009A)

Nhận xét: đây là bài toán khá phổ biến và nhiều cách giải,trong phạm vi bài viết này tôi chỉ xin đề cập tới phương pháp đặt ẩn phụ theo hai cách sau đây:

ĐK: $x \leq \frac{6}{5}$

Cách 1: Đặt t = $\sqrt[3]{3x-2} \to x = \frac{t^3+2}{3}$ thay vào phương trình ta có

$$pt \Leftrightarrow 2t + 3\sqrt{6 - 5\frac{t^3+2}{3}} - 8 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} = 8 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 9\left(\frac{8-5t^3}{3}\right) = (8-2t)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ (t+2)(15t^2 - 26t + 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2 \to x = -2 \text{ (TMĐK)}$$

Cách 2: Đặt t = $\sqrt{6-5x} \to x = \frac{6-t^2}{5}, t \geq 0$ pt đã cho tương đương

$$2\sqrt[3]{3.\frac{6-t^2}{5} - 2} + 3t - 8 = 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{8-3t^2}{5}\right) = (8-3t)^3 \leftrightarrow 135t^3 - 1104t^2 + 2880t - 2496 = 0$$

$t = 4 \vee 135t^2 - 564t + 624 = 0 (VN)$ với t = 4 thì x = -2(TMĐK)

2/ Đặt hai ẩn phụ

Thông thường, ta tìm mối liên hệ giữa biến để đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp (đồng bậc) hoặc hệ phương trình đối xứng loại 2, đẳng cấp,... Ta thường gặp một số dạng cơ bản sau:

① $\alpha.\sqrt[n]{a-f(x)}+\beta.\sqrt[m]{b+f(x)}=c \xrightarrow{PP}$ đặt $\begin{cases} u=\sqrt[n]{a-f(x)} \\ v=\sqrt[m]{b+f(x)} \end{cases}$.

② $\left[\begin{array}{l} a.\sqrt[n]{A^2}+b.\sqrt[n]{AB}+c.\sqrt[n]{B^2}=0 \\ a.A(x)+b.B(x)=c\sqrt{A(x).B(x)} \\ \alpha.A+\beta.B=\sqrt{mA^2+nB^2} \end{array}\right. \xrightarrow{PP}$ đặt $u,v \Rightarrow PT: u^2+\alpha uv+\beta v^2=0$.

③ $x^n+a=b\sqrt[n]{bx-a} \xrightarrow{PP} y=\sqrt[n]{bx-a}$

đưa về hệ đối xứng loại II: $\begin{cases} x^n-by+a=0 \\ y^n-bx+a=0 \end{cases}$.

④ $\begin{cases} \sqrt{ax+b}=cx^2+dx+e \\ a\neq 0,\ c\neq 0,\ a\neq \frac{1}{c} \end{cases} \xrightarrow{PP}$ đặt $\sqrt{ax+b}=2cy+d$ đưa về hệ đối xứng loại II.

5.Nếu pt có dạng $(ax+b)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+qx+r \rightarrow \sqrt[n]{a'x+b'}=ay+b$ (thuật đặt ẩn phụ đối xứng)

— Cần lưu ý một số khai triễn và biến đổi sau:

- $x^3\pm 1=(x\pm 1)(x^2\mp x+1)$ hay tổng quát hơn: $x^3\pm a^3=(x\pm a)(x^2\mp ax+b)$.
- $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
- $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}.x+1)(x^2-\sqrt{2}.x+1)$.
- $4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$.
- $u+v=1+uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0$.

Các bài tập mẫu minh họa:

BT Mẫu 31 : Giải phương trình sau $\sqrt[4]{56-x}+\sqrt[4]{x+41}=5$ (Học viện Bưu chính Viễn Thông)

Nhận Xét: Đây là kiểu bài toán khá đặc trưng cho phương pháp đặt hai ẩn phụ để đưa về hpt (bài toán có bậc của căn lớn) ta có lời giải như sau:

ĐK: $-41\le x\le 56$

Đặt $u=\sqrt[4]{56-x}, u \ge 0; v=\sqrt[4]{x+41} \to (1) \Leftrightarrow u+v=5(a)$ vậy còn một phương trình nữa lấy ở đâu ra??? Pt đó sẽ được lấy từ việc các em nâng lũy thừa các phép đặt ẩn phu rôi sau đó ta tìm phép toán phù hợp để làm mất x đi (cộng - trừ) như sau $u^4+v^4=97(b)$

Kết hợp (a) và (b) ta có hpt

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ \left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ 2(uv)^2-100uv+528=0 \Leftrightarrow uv=6 \vee uv=44 \end{cases}$$

TH1 : $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$ lúc đó u , v là nghiệm của pt $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow X=2 \vee X=3 \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \vee \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$

+ $\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{56-x}=2 \\ \sqrt[4]{x+41}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56-x=16 \\ x+41=81 \end{cases} \Leftrightarrow x=40(TM)$

+ $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{56-x}=3 \\ \sqrt[4]{x+41}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56-x=81 \\ x+41=16 \end{cases} \Leftrightarrow x=-25(TM)$

TH 2 : : $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=44 \end{cases}$ lúc đó u , v là nghiệm của pt $X^2-5X+44=0(VN)$

Vậy pt đã cho có hai nghiệm là x = 40 hoặc x = -25

<u>BT Mẫu 32</u> : Giải phương trình sau $x^2+3x-1=\sqrt{x^3-1}\,(*)$

Phân tích : $\begin{cases} x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \\ x^2+3x-1=\alpha(x-1)+\beta(x^2+x+1) \Leftrightarrow \beta x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=1, \alpha=2 \end{cases}$

Viết lại pt đã cho $2(x-1)+(x^2+x+1)=\sqrt{(x+1)(x^2+x+1)}\,(1)$

Đặt u = $\sqrt{x+1}, v=\sqrt{x^2+x+1}; u \ge 0, v \ge 0$ lúc đó ta có pt :

$$2u^2+v^2=uv \Leftrightarrow 2u^2+v^2-uv=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2-\left(\frac{u}{v}\right)+1=0(vn)$$

<u>BT Mẫu 33</u> : Giải phương trình sau $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}\,(*)$ (ĐH Tài Chính kế toán)

ĐK : x ≥ 1

Đặt $u=\sqrt[3]{2-x}, v=\sqrt{x-1}, v \ge 0$ lúc đó phương trình (*) được viết lại như sau :u + v =1,cần tìm thêm một phương trình nữa ta có $u^3+v^2=1$

Vậy ta có hpt $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-u \\ u^3+(1-u)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-u \\ u^3+u^2-2u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases}$

TH1 : $\begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=0 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2(\text{n})$

TH2 : $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1(n)$

TH3 : $\begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=-2 \\ \sqrt{x-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$

<u>BT Mẫu 34</u> : Giải phương trình $\sqrt{3-2x}+\sqrt[3]{5+3x}=3\left(*\right)$

Đây là kiểu bài khá quen thuộc,có nhiều cách giải khác nhau trong phạm vi bài này tôi chỉ nếu cách đặt hai ẩn phụ.

ĐK : $x\le\frac{3}{2}$ Đặt $u=\sqrt{3-2x},u\ge0;v=\sqrt[3]{5+3x}$ khi đó ta có hpt

$$\begin{cases} u+v=3 \\ 3u^2+2v^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v \\ 3\left(3-v\right)^2+2v^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v \\ 2v^3+3v^2-18v+8=0 \Leftrightarrow v=\frac{1}{2}\vee v=-4\vee v=2 \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} v=\frac{1}{2} \\ u=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{5+3x}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{3-2x}=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{13}{8}$ (TM)

TH2: $\begin{cases} v=-4 \\ u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{5+3x}=-4 \\ \sqrt{3-2x}=7 \end{cases} \Leftrightarrow x=-23$

TH3: $\begin{cases} v=2 \\ u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{5+3x}=2 \\ \sqrt{3-2x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1(tm)$

Vậy pt đã cho có 3 nghiệm.

<u>BT Mẫu 35</u>: Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}\right)=1\left(*\right)$

Đặt $u=\sqrt[3]{x+1};v=\sqrt[3]{x+2}$ ta có $v^3-u^3=1$ thay vào (*) ta có :

$$uv(u-v)=v^3-u^3 \Leftrightarrow uv\left(u-v\right)+\left(u-v\right)\left(u^2+uv+v^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(u+v\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-v \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x+2} \\ \sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

<u>BT Mẫu 36</u> : Giải phương trình $2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{5x^2-2x-2}\left(*\right)$

ĐK : x $\ge \frac{2}{3}$

Nhận xét : Bằng kinh nghiệm ta nghĩ ngay tới việc phân tích biểu thức trong căn lớn và kết quả như sau

$$(*) \Leftrightarrow 2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{2(2x-1)^2+2(3x-2)}(1)$$

Đặt u = 2x - 1 $u \ge 0; v=\sqrt{3x-2}; v \ge 0$ thay vào (1) ta có

$u+v=\sqrt{2u^2+2v^2} \Leftrightarrow u^2+2uv+v^2=2u^2+2v^2 \Leftrightarrow (u-v)^2=0 \Leftrightarrow u=v$

$\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=3x-2 \Leftrightarrow 4x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x=1(n) \vee x=\frac{4}{3}(n)$

<u>BT Mẫu 37</u> : Giải BPT $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2x+3} \ge 3\sqrt{x^2+4x+5}\,(*)$

Xin nhắc lại với kiểu bài toán đặt ẩn phụ thì điều quan trọng nhất là tìm ra được mối quan hệ giữa các hàm số cóa mặt trong bài,từ đó đưa ra giải pháp gọn - đẹp nhất

Ở bài này ta viết lại phương trình như sau : $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2x+3} \ge 3\sqrt{2(x^2+2x+3)-(x^2+1)}\,(*)$

Từ đay cho ta ý tưởng : Đặt u = $\sqrt{x^2+1}; u>0; v=\sqrt{x^2+2x+3}; v>0$

Thay vào pt ta có : $u+2v \ge 3\sqrt{2v^2-u^2} \Leftrightarrow 10u^2+4uv-14v^2 \ge 0 \Leftrightarrow (u-v)(10u+14v) \ge 0 \Leftrightarrow u \ge v$

Vì 10u + 14v > 0 với moi u,v > 0

+ với u > v $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \ge \sqrt{x^2+2x+3} \Leftrightarrow x \le -1$ vậy tập nghiệm của BPT là S = $(-\infty;-1]$

<u>BT Mẫu 38</u>: Giải phương trình sau : x $x^2-2\left(\sqrt{15-x^2}+x\right)=15-3\sqrt{15x-x^3}-4\sqrt{x}\,(*)$

ĐK $0 \le x \le \sqrt{15}$

Viết lại pt : $(15-x^2)-3\sqrt{x}.\sqrt{15-x^2}-4\sqrt{x}+2\left(\sqrt{15-x^2}+x\right)=0(1)$

Đặt $u=\sqrt{15-x^2}, v=\sqrt{x}(u,v \ge 0)$ thay vào (1) ta có : $u^2-3uv-4v+2(v^2+u)=0$ cho v = 100 ta có ngay

U = 200 = 2v, u = 98 = v - 2

Vậy $u=2v \Leftrightarrow \sqrt{15-x^2}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+4x-15=0 \Leftrightarrow x=-2+\sqrt{19}(n) \vee x=-2-\sqrt{19}(l)$

Với u = v - 2 $\Leftrightarrow \sqrt{15-x^2}=\sqrt{x}-2(2)$

với $0 \le x \le \sqrt{15}$ thì $\Leftrightarrow \sqrt{15-x^2}=\sqrt{x}-2 \le \sqrt{\sqrt{15}}-2<\sqrt{\sqrt{16}}-2=0(vn)$

<u>BT Mẫu 39</u> : Giải Phương trình sau : $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1(*)$ (HSG Vĩnh Phúc)

ĐK : $1 \le x \le 7$

$(*) \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{(7-x)(x-1)}(1)$

Đặt u = $\sqrt{7-x}, v=\sqrt{x-1}, u;v\ge 0$ thay vào (1) ta có : $v^2+2u=2v+uv \Leftrightarrow (u-v)(v-2)=0 \Leftrightarrow u=v \vee v=2$

TH1 : $u=v \Leftrightarrow \sqrt{7-x}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=4(Tm)$

TH2 : $v=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x=5$ (Tm)

5.Nếu pt có dạng $(ax+b)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+qx+r \to \sqrt[n]{a'x+b'}=ay+b$ (thuật đặt ẩn phụ đối xứng)

BT Mẫu 40 : Giải phương trình $2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2$ (HSG - Hải Phòng)

Nhận xét : Nhìn qua ta thấy bài toán có thể đi theo các hướng quen thuộc là Hàm số hoặc nhân liên hợp,tuy nhiên ở đây ta sẽ chỉ bàn tới làm thế nào để đặt ẩn phụ bằng cách chỉ ra các mối quan hệ.

Viết lại phương trình : $2\sqrt[3]{2x-1}=(3x-1)^3+4x-1$, bài toán có dạng số (5) ta đặt $\sqrt[3]{2x-1}=3y-1$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2(3y-1)=(3x-1)^3+4x-1(1) \\ 2x-1=(3y-1)^3\ (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) ta có

$2(3y-1)-(2x-1)=(3x-1)^3-(3y-1)^3+4x-1 \Leftrightarrow (x-y)\left[6+3\left[(3x-1)^2+(3x-1)(3y-1)+(3y-1)^2\right]\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 6+3\left[(3x-1)^2+(3x-1)(3y-1)+(3y-1)^2\right] \Leftrightarrow 6+3\left[(3x-1)+\frac{1}{2}(3y-1)\right]^2+\frac{9}{4}(3y-1)^2>0(VN) \end{array}\right.$$

Với x = y thay vào (2) ta có $2x-1=(3x-1)^3 \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+7x=0 \Leftrightarrow x\left(27x^2-27x+7\right)=0 \Leftrightarrow x=0$

BT Mẫu 41: Giải phương trình $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x(*)$ (Đề thi olympic)

Viết lại pt như sau : $x^3+3x^2+3x-1=3\sqrt[3]{3x+5} \Leftrightarrow (x+1)^3-2=3\sqrt[3]{3x+5}$

Đặt $\sqrt[3]{3x+5}=y+1 \Rightarrow 3x+5=(y+1)^3$ ta có hpt :

$$\begin{cases} (x+1)^3-2=3(y+1)(1) \\ (y+1)^3=3x+5(2) \end{cases} \Leftrightarrow (x+1)^3-(y+1)^3=3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)\left[(x+1)^2+(x+1)(y+1)+(y+1)^2+3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ (x+1)^2+(x+1)(y+1)+(y+1)^2+3=\left[\left((x+1)+\frac{1}{2}(y+1)\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2+3\right]>0\forall x,y \end{array}\right.$$

Với x = y ta có $\sqrt[3]{3x+5}=y+1 \Rightarrow 3x+5=(x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$

Thử lại pt thấy thỏa mãn,đó là các nghiệm cần tìm.................

<u>BT Mẫu 42</u> : Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x + 2\left(*\right)$

Viết lại pt : $\sqrt[3]{3x+4} + 2x + 3 = (x+1)^3$ Đặt $\sqrt[3]{3x+4} = y + 1 \rightarrow 3x + 4 = \left(y+1\right)^3$

Ta có hpt : $\begin{cases} 3x+4 = \left(y+1\right)^3 \ (1) \\ y + 2x + 4 = \left(x+1\right)^3 \ (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} \left(x-y\right)\left[\left(x-1\right)^2 + \left(x-1\right)\left(y-1\right) + \left(y-1\right)^2 + 1\right] = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = y \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{3x+4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 3x + 4 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \\ \left[\left(\left(x-1\right) + \frac{1}{2}\left(y-1\right)\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y-1\right)^2 + 1\right] > 0 \forall x, y (vn) \end{array}\right.$$

Thử lại thấy thỏa mãn,do đó nghiệm của pt là x = 1 hoặc x = -2(các em nhớ phải thử lại nhé vì nâng lũy thừa không có đk là pt hệ quả mà thôi)

Chú ý : ta cũng có thể tìm ra phép đặt $\sqrt[3]{3x+4} = y + 1 \rightarrow 3x + 4 = \left(y+1\right)^3$ bằng cách sau

Xét y = $x^3 + 3x^2 + x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x + 1 \rightarrow y'' = 6(x+1)$ tuy nhiên không phải lúc nào cũng dùng được cách này nhé các em !!!

3/ <u>Đặt ẩn phụ không hoàn toàn</u>

Đặt ẩn số phụ không hoàn toàn là một hình thức phân tích thành nhân tử. Khi đặt ẩn phụ t thì biến x vẫn tồn tại và ta xem x là tham số. Thông thường thì đó là phương trình bậc hai theo t (tham số x) và giải bằng cách lập Δ.

<u>BT Mẫu 43</u> : giải phương trình sau $x^2 + 3x + 1 = \left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}\left(*\right)$

Nhận xét : Nhìn vào phương trình ta sẽ nghĩ ngay tới việc đặt t = $\sqrt{x^2+1}$ tuy nhiên khó ở chỗ sau khi đặt ẩn phụ xong thì bài toán không rút được về theo ẩn t triệt để mà vẫn con chứa ẩn x,làm thế nào bây giờ ??? Đừng vội lo quá - đây chính là nội dung của phương pháp mà tôi muốn trình bày cho các bạn ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN .

Lời Giải

Đặt t = $\sqrt{x^2+1} \rightarrow x^2 = t^2 - 1, t \geq 0$(bài không có tham số ko cần tìm chính xác điều kiện nhé các em)

Ta được phương trình mới $t^2 - \left(x+3\right)t + 3x = 0$ ta có hai cách sau giải phương trình

1. tính được $\Delta = \left(x-3\right)^2$ (thầy ít khi dùng)
2. Liệt kê các hạng tử chứa x : -xt + 3x = 0 khi t = 3 rồi phân tích theo sơ đồ hoocner hoặc casio

Dễ dàng có hai nghiệm t = 3 và t = x

Với t = 3 ta có x = $\pm 2\sqrt{2}$,t = x vô nghiệm

Thật dễ dàng đúng không các em ???tuy nhiên thực tế không giống như vậy đâu,có những phương trình nếu không khéo léo ta cũng sẽ không có lời giải đẹp,hãy xét ví dụ sau và coi như một bài tổng quát nhé

BT Mẫu 44: Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$ (*)

ĐK $x \le -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

Đặt t = $\sqrt{2x^2-1}, t \ge 0 \to x^2 = \frac{t^2+1}{2}$ Viết lại phương trình ta có :

$$4x^2 - 2 - (3x+1)\sqrt{2x^2-1} + x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - (3x+1)t + x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Có $\Delta = (x-3)^2 \to t = 2x-1 \vee t = x+2$

+ t = 2x -1 $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 (tm)$

+ t = x + 2 $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$

Điều gì làm bạn cảm thấy băn khoăn nhất trong lời giải trên ??? có lẽ là việc tại sao lại không thế như bình thường mà mà lại phải tách $5x^2 = 4x^2 + x^2$ và làm thế nào để biết phải tách ra như vậy ???

Thật đơn giản,khi làm toán bằng phương pháp này ta luôn hi vọng rằng dellta sẽ là một số chính phương dó đó cần tìm hệ sô a thật là đẹp,Tổng quát ta đi tìm m thỏa mãn pt sau :

$$mt^2 - (3x+1)t + (5-2m)x^2 + m - 3 = 0 \to \Delta = (8m^2 - 20m + 9)x^2 + (6-6m)x + 12m - 4m^2 + 1$$

Lưu ý : ở đây tôi đã sắp xếp lại dellta về phương trình ẩn x nhé

Để dellta chính phương ta cho $\Delta_x = (6-6m)^2 - 4(8m^2 - 20m + 9)(-4m^2 + 12m + 1) = 0 \to m = 2$

Việc tìm ra m = 2 nhanh nhất là dùng mode 7 trong casio các em nhé(không nên ngồi giải pt này)

Thế là xong phương pháp tổng quát rồi nhé,các ví dụ sau tôi sẽ ko nhắc lại thêm nữa nhé !!!!

BT Mẫu 45 : Giải phương trình sau $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1)(*)$

ĐK : x ≥ -1

Đặt t = $\sqrt{x+1} \to x = t^2 - 1 (*) \Leftrightarrow 27t^2 - 12xt - 4x^2 = 0$

PT đồng bậc cho x = 100 ta có ngay t = 200/3 = 2x/3 và t = -200/9 = -2x/9

+ $t = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 = \frac{4}{9}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

+ t = $-\frac{2}{9}x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x+1 = \frac{4}{81}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{81-9\sqrt{97}}{8}$

<u>BT Mẫu 46</u> : Giải phương trình $7x^2+4x+10 = 7(x+2)\sqrt{x^2+1}\,(*)$

Đặt t = $\sqrt{x^2+1}$ ta có $(*) \Leftrightarrow 6t^2 - 7(x+2)t + x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 25(x+2)^2$ tới đây dễ rồi nhé

Chú ý bài toán này sử dụng phương pháp hệ số bất định ở ví dụ tổng quát để tìm pt đẹp nhé

Nói Tóm lại : Ẩn phụ là phương pháp làm cho bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn,những dạng phương trình đặc biệt kể trên chỉ mang tính chất giới thiệu ta không nên phụ thuộc quá nhiều vào các dạng đó mà xin nhớ rằng muốn phương pháp đạt hiệu quả cao thì điều quan trọng nhất là phân tích và tìm ra mối quan hệ tồn tại trong phương trình để từ đó đặt ẩn phụ một cách hợp lý và sáng tạo nhất.