|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2020-2021**  **Khóa ngày 08 tháng 12 năm 2020**  **Môn thi: TOÁN**  **LỚP 9 THCS** |

**Câu 1. (2,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức 
2. Giải phương trình : 

**Câu 2. (2,0 điểm)**

Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng đi qua điểm và cắt các tia lần lượt tại B và C (khác O)

1. Viết phương trình đường thẳng sao cho biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất
2. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Câu 3. (3,0 điểm)**

Trong mặt phẳng, cho hai điểm cố định với và thay đổi sao cho tam giác vuông tại A. Gọi là trung điểm của đường thẳng đi qua vuông góc với cắt các đường phân giác của các góc và lần lượt tại và Q. Gọi là giao điểm của với và là giao điểm của với 

1. Giả sử tính số đo góc 
2. Chứng minh rằng 
3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác và theo 

**Câu 4. (1,0 điểm)** Cho là các số thực dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng 

**Câu 5. (1,0 điểm)**

1. Số nguyên dương được gọi là số điều hòa nếu tổng các bình phương của các ước dương của nó (kể cả và bằng Chứng minh rằng nếu (với là các số nguyên tố khác nhau) là số điều hòa thì là số chính phương
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn 

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1.**

1. Đặt . Khi đó



1. Điều kiện : . Ta có :



Nhận xét 

Đẳng thức xảy ra khi :



Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình 

**Câu 2.**

1. Do đi qua điểm nên 

Ta có : theo bài ra thì 



Ta có nhỏ nhất khi nhỏ nhất (vì không đổi)



nhỏ nhất bằng khi và chỉ khi 

Theo câu với , đường thẳng cắt tia lần lượt tại B và C khác O và đi qua điểm 

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng ta có :



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy giá trị lớn nhất của là 

**Câu 3.**

****

1. Ta có và là phân giác của nên là đường trung trực của đoạn và 

Vì là đường trung trực của đoạn và nên 

Xét hai tam giác vuông và có (cùng phụ và (vì 

hay tam giác vuông cân tại C, do đó 

1. Ta có là các đường phân giác của các góc nên Tương tự chứng minh câu ta được 

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông với đường cao ta có 

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông với đường cao ta có 

Từ (1) và (2) suy ra 

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông với đường cao . Ta có :và 

Từ (4) và (5) suy ra 

Từ (3) và (6) suy ra 

1. Vì là trung trực của đoạn và là trung trực của đoạn 

Suy ra và là hình thang vuông.

Do đó 

Kẻ thì 

Từ suy ra 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi khi đó tam giác vuông cân tại A

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác và là 

**Câu 4.**

Ta có:

Thật vậy, xét :



Ta chứng minh bất đẳng thức sau : Với là các số thực và là các số dương, ta có 

Thật vậy, (luôn đúng)

Áp dụng BĐT (\*), ta có :



Từ (1) và (2) suy ra :



**Câu 5.**

1. Ta có có các ước dương là 

Vì là số điều hòa nên ta có 



Vì 4 là số chính phương nên tử đẳng thức trên suy ra cũng là số chính phương (đpcm)

1. Gọi là UCLN

. Ta có :



Đặt 

Ta viết lại . Từ đó suy ra 

Do đó 



Th1: khi đó 

Suy ra . Do vậy 

Th2: 

Do tính đối xứng của ta giả sử 

Do đó 

Thay 

Thay thì không tồn tại số nguyên dương thỏa mãn

Thay 

Vậy các cặp giá trị cần tìm 