

CHƯƠNG 5

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

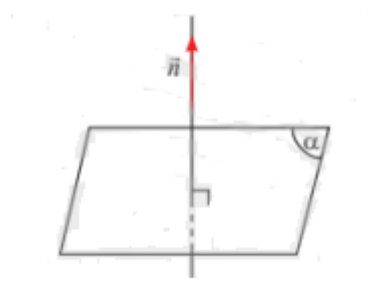
BÀI 1

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

1. Vector pháp tuyến và cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

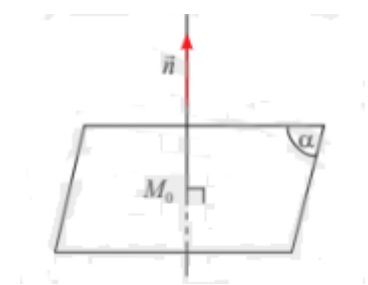
a. Vector pháp tuyến của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) . Vector $\vec{n}$ khác 0 và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là **vector pháp tuyến** của mặt phẳng (α) .



Nhận xét:

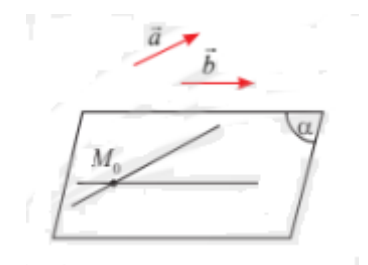
- Nếu $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vector pháp tuyến của nó.



b. Cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

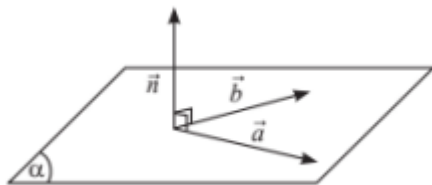
Cho mặt phẳng (α) . Nếu hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (α) .

Nhận xét: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vector chỉ phương của nó.



Xác định vector pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vector chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vector $a = (a_1; a_2; a_3), b = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vector chỉ phương thì (α) nhận $n = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vector pháp tuyến.



Chú ý:

- Vector $n = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là tích có hướng của hai vector $a = (a_1; a_2; a_3)$ và $b = (b_1; b_2; b_3)$, kí hiệu là $[a, b]$.

- $$[a, b] = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

- a cùng phương với $b \Leftrightarrow [a, b] = 0$

- Nếu $n = [a, b]$ thì vector n vuông góc với cả hai vector a và b

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

a. Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) thì vector $n = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

- Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

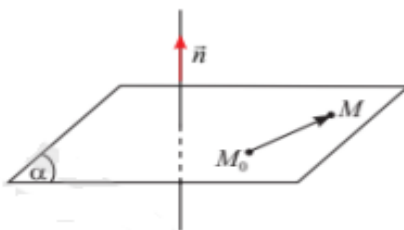
$$N_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

b. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện

• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vector pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector pháp tuyến $n = (A; B; C)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

hay $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

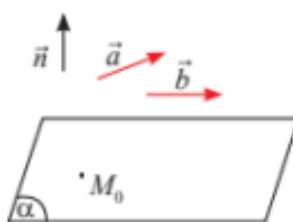


• **Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vector chỉ phương**

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vector chỉ phương a, b , ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vector pháp tuyến $n = [a, b]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector pháp tuyến n .



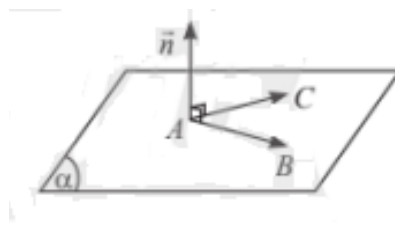
• **Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng**

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vector pháp tuyến $n = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

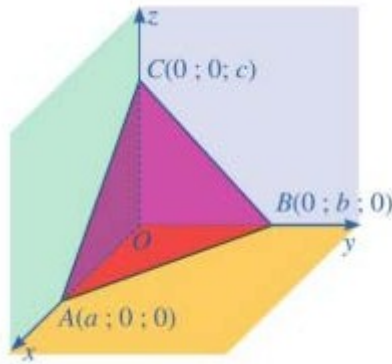
Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vector pháp tuyến n .



Nhận xét:

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a; 0; 0)$, cắt trục Oy tại $B(0; b; 0)$, cắt trục Oz tại $C(0; 0; c)$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, với $a, b, c \neq 0$

Phương trình trên được gọi là **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn**.

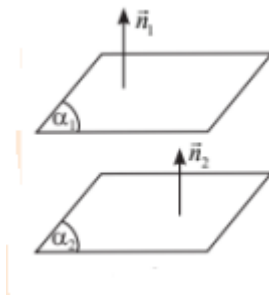


3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

a. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

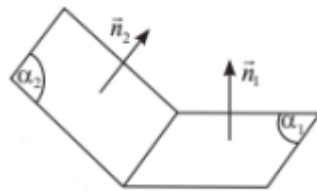
Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = kn_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$



Chú ý:

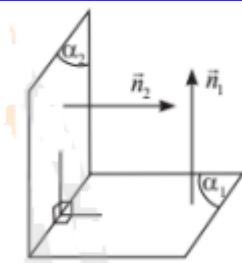
- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = kn_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow n_1$ và n_2 không cùng phương.



b. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$



4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

CHỦ ĐỀ 1

XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

DẠNG 1

XÁC ĐỊNH VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC VÀ KHÔNG THUỘC MẶT PHẪNG

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến $n = (A; B; C)$
- Nếu mặt phẳng (α) có cặp vector chỉ phương là a, b thì (α) có vectơ pháp tuyến là $n = [a, b]$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là vectơ có giá vuông góc với (α) .
- Vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) là vectơ có giá song song hoặc trùng với (α) .
- Nếu n là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k.n$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α) .
- Nếu a là một vectơ chỉ phương của (α) thì $k.a$ cũng là một vectơ chỉ phương của (α) .

Chú ý:

- Trục Ox có vectơ chỉ phương là $i = (1; 0; 0)$.
- Trục Oy có vectơ chỉ phương là $j = (0; 1; 0)$.
- Trục Oz có vectơ chỉ phương là $k = (0; 0; 1)$.
- Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $k = (0; 0; 1)$.
- Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $j = (0; 1; 0)$.
- Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $i = (1; 0; 0)$.

2. Điểm thuộc và không thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

- $N_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$
- $N_0(x_0; y_0; z_0) \notin (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vector n vuông góc với cả hai vector $a = (1; 1; -2)$, $b = (1; 0; 3)$ là

A. $(2; 3; -1)$ B. $(3; 5; -2)$ C. $(2; -3; -1)$ D. $(3; -5; -1)$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $[a, b] = (3; -5; -1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $a = (2; 1; -2)$ và vector $b = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vector c là tích có hướng của a và b .

- A. $c = (2; 6; -1)$ B. $c = (4; 6; -1)$ C. $c = (4; -6; -1)$ D. $c = (2; -6; -1)$

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$c = [a, b] = (2; -6; -1)$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Tìm tọa độ vector n có phương vuông góc với hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. $n = (8; 4; -3)$ B. $n = (-18; 0; -3)$ C. $n = (-18; 4; -3)$ D. $n = (1; 4; -3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 8)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 6) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3)$.

Vậy: $n = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

- A. $x - 3y^2 + z - 1 = 0$ B. $x^2 + 2y + 4z - 2 = 0$
- C. $2x - 3y + 4z - 2024 = 0$ D. $2x - 3y + 4z^2 - 2025 = 0$

Lời giải

Chọn C

phương trình tổng quát của mặt phẳng là: $2x - 3y + 4z - 2024 = 0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây không phải là một vector pháp tuyến của (P) ?

A. $n = (-3; 1; -2)$

B. $n = (3; 1; 2)$

C. $n = (3; -1; 2)$

D. $n = (6; -2; 4)$

Lời giải

Chọn B

Véc tơ pháp tuyến của (P) là: $n = (3; -1; 2)$.

$n = (-3; 1; -2) = -1(3; -1; 2)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P)

$n = (6; -2; 4) = 2(3; -1; 2)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P)

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\vec{i} = (1; 0; 0)$

B. $\vec{m} = (1; 1; 1)$

C. $\vec{j} = (0; 1; 0)$

D. $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với trục Oz nên nhận véc tơ $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm một véc tơ pháp tuyến

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, vector nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 1 = 0$?

A. $a = (2; -3; 1)$

B. $b = (2; 1; -3)$

C. $c = (2; -3; 0)$

D. $\vec{d} = (3; 2; 0)$

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một VTPT là $n = (2; -3; 0) = c$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là

A. $n = (3; 6; -2)$

B. $n = (2; -1; 3)$

C. $n = (-3; -6; -2)$

D. $n = (-2; -1; 3)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{3}z - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z + 6 = 0$.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng $n = (3; 6; -2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$.

- A. $Q(1; -2; 2)$. B. $P(2; -1; -1)$. C. $M(1; 1; -1)$. D. $N(1; -1; -1)$.

Lời giải

Chọn D

+ Thay tọa độ điểm Q vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1 - (-2) + 2 - 2 = 4 \neq 0$ nên $Q \notin (P)$.

+ Thay tọa độ điểm P vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.2 - (-1) + (-1) - 2 = 2 \neq 0$ nên $P \notin (P)$.

+ Thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1 - 1 + (-1) - 2 = -2 \neq 0$ nên $M \notin (P)$.

+ Thay tọa độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1 - (-1) + (-1) - 2 = 0$ nên $N \in (P)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây không thuộc (α) ?

- A. $Q(3; 3; 0)$ B. $N(2; 2; 2)$ C. $P(1; 2; 3)$ D. $M(1; -1; 1)$

Lời giải

Chọn D

A. $Q(3; 3; 0)$ Thay tọa độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow 3 + 3 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow Q \in (\alpha)$

B. $N(2; 2; 2)$ Thay tọa độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 2 - 6 = 0 \Rightarrow N \in (\alpha)$

C. $P(1; 2; 3)$ Thay tọa độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 3 - 6 = 0 \Rightarrow P \in (\alpha)$

D. $M(1; -1; 1)$ Thay tọa độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow 1 - 1 + 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow M \notin (\alpha)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $P(0; 0; -5)$ B. $M(1; 1; 6)$ C. $Q(2; -1; 5)$ D. $N(-5; 0; 0)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $1 - 2.1 + 6 - 5 = 0$ nên $M(1; 1; 6)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(0; 2; 0)$ B. $N(1; 2; 3)$ C. $M(1; 0; 0)$ D. $Q(0; 0; 3)$

Lời giải

Chọn B

Thế tọa độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta có: $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} = 1$.

Vậy mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ không đi qua điểm $N(1; 2; 3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 3 = 0$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$. B. $N\left(1; -1; -\frac{3}{2}\right)$. C. $P(1; 6; 1)$. D. $Q(0; 3; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Xét điểm $M\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$, ta có: $1 - 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0$ đúng nên $M \in (\alpha)$ nên A đúng.

Xét điểm $N\left(1; -1; -\frac{3}{2}\right)$, ta có: $1 + 1 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = 0$ sai nên $N \notin (\alpha)$ nên B sai.

Xét điểm $P(1; 6; 1)$, ta có: $1 - 6 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$ sai nên $P \notin (\alpha)$ nên C sai.

Xét điểm $Q(0; 3; 0)$, ta có: $0 - 3 + 2 \cdot 0 - 3 = 0$ sai nên $Q \notin (\alpha)$ nên D sai.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $n = (0; 0; 1)$.
 B. Mặt phẳng (Oxz) có vector pháp tuyến là $n = (0; 3; 0)$.
 C. Mặt phẳng (Oyz) có vector pháp tuyến là $n = (-2; 0; 0)$.
 D. Trục Oz có vector chỉ phương là $a = (0; 0; -2024)$.

Lời giải

- A. Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $n = (0; 0; 1)$. **ĐÚNG**
 B. Mặt phẳng (Oxz) có vector pháp tuyến là $n = (0; 3; 0)$. **ĐÚNG**
 C. Mặt phẳng (Oyz) có vector pháp tuyến là $n = (-2; 0; 0)$. **ĐÚNG**
 D. Trục Oz có vector chỉ phương là $a = (0; 0; -2024)$. **ĐÚNG**

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $a = (1; -2; 3)$ và $b = (1; 1; -1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. $|a + b| = 3$.

B. $a.b = -4$.

C. $|a - b| = 5$.

D. $[a, b] = (-1; -4; 3)$.

Lời giải

A. $|a + b| = 3$. SAI

B. $a.b = -4$. SAI

C. $|a - b| = 5$. SAI

D. $[a, b] = (-1; -4; 3)$. ĐÚNG

Ta có

$$|a + b| = |u| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \quad (\text{đúng}).$$

$$a.b = 1.1 + (-2).1 + 3.(-1) = 1 - 2 - 3 = -4 \quad (\text{đúng}).$$

$$|a - b| = |u| = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{0+9+16} = 5 \quad (\text{đúng}).$$

$$[a, b] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 4; 3) \quad (\text{sai}).$$

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $a = (1; 2; -1), b = (3; -1; 0), c = (1; -5; 2)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. a cùng phương với b .

B. $[a, b].c = 0$

C. a không cùng phương với b .

D. a vuông góc với b .

Lời giải

A. a cùng phương với b . SAI

B. $[a, b].c = 0$ ĐÚNG

C. a không cùng phương với b . ĐÚNG

D. a vuông góc với b . SAI

Ta có:

$$[a, b] = (-1; -3; -7) \neq 0. \quad \text{Hai vectơ } a, b \text{ không cùng phương.}$$

$[a, b] \cdot c = -1 + 15 - 14 = 0$. Ba vectơ a, b, c đồng phẳng.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 2024 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $n = (2; 3; 1)$.
- B. Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $n = (6; 9; 3)$.
- C. Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $n = (-4; -6; -2)$.
- D. Điểm $M(0; 0; 2024)$ không thuộc mặt phẳng (P) .

Lời giải

- A. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $n = (2; 3; 1)$. **ĐÚNG**
- B. Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $n = (6; 9; 3)$. **ĐÚNG**
- C. Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $n = (-4; -6; -2)$. **ĐÚNG**
- D. Điểm $M(0; 0; 2024)$ không thuộc mặt phẳng (P) . **SAI**

Vectơ pháp tuyến của (P) là $n_2(2; 3; 1)$.

$$n = (6; 9; 3) = 3(2; 3; 1)$$

$$n = (-4; -6; -2) = -2(2; 3; 1)$$

Thay điểm $M(0; 0; 2024)$ vào mặt phẳng $(P): 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2024 - 2024 = 0 \Rightarrow M \in (P)$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm $M(-1; -1; -1)$ không thuộc mặt phẳng (P) .
- B. Điểm $N(1; 1; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) .
- C. Điểm $K(-3; 0; 0)$ không thuộc mặt phẳng (P) .
- D. Điểm $Q(0; 0; -3)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Lời giải

- A. Điểm $M(-1; -1; -1)$ không thuộc mặt phẳng (P) . **ĐÚNG**
- B. Điểm $N(1; 1; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) . **ĐÚNG**
- C. Điểm $K(-3; 0; 0)$ không thuộc mặt phẳng (P) . **ĐÚNG**

D. Điểm $Q(0;0;-3)$ thuộc mặt phẳng (P) . SAI

Điểm $N(1;1;1)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên $N \in (P)$.

Điểm $M(-1;-1;-1)$, $K(-3;0;0)$, $Q(0;0;-3)$ có tọa độ không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên $M, K, Q \notin (P)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;0)$. Tính $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right]$.

Lời giải

Đáp án: $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] = (0;2;-2)$

Có: $\overrightarrow{BC} = (0;-2;-2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;-1;-1)$

$\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] = (0;2;-2);$

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$ và $C(-1;1;0)$. Tìm tọa độ vector n có phương vuông góc với hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

$n = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (-6;-10;4)$

Đáp án:

$\overrightarrow{AC} = (-3;1;-2)$, $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;-4)$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (-6;-10;4)$.

Câu 21. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$. Tính $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Đáp án: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} = -24$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;3;3)$, $\overrightarrow{AD} = (-1;3;1)$.

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (-3;-12;9);$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} = (-3) \cdot (-1) + (-12) \cdot 3 + 9 \cdot 1 = -24$

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): 2x - 6y - 8z + 1 = 0$. Tìm tọa độ một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Lời giải

Đáp án: $n = (1; -3; -4)$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): 2x - 6y - 8z + 1 = 0$ nên một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là $(2; -6; -8)$ hay $(1; -3; -4)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $a = (-5; 3; -1)$, $b = (1; 2; 1)$, $c = (m; 3; -1)$. Tìm giá trị của m sao cho $a = [b, c]$.

Lời giải

Đáp án: $m = 2$.

$$[b, c] = (-5; m+1; 3-2m)$$

Ta có: $\vec{a} = [b, c] \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=3 \\ 3-2m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $u = (1; 1; 2)$, $v = (-1; m; m-2)$. Tìm giá trị của m sao cho $\| [u, v] \| = \sqrt{14}$.

Lời giải

Đáp án: $m = 1$ hoặc $m = -3$.

$$[u, v] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow \| [u, v] \| = \sqrt{(-m-2)^2 + (-m)^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$$

$$\| [u, v] \| = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vector $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vector $\vec{p}$.

Lời giải

Đáp án: $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

Ta có: $[\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0)$

Do $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k[\vec{m}, \vec{n}]$, $k > 0$

Mặt khác: $|\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow k \cdot \| [\vec{m}, \vec{n}] \| = 15 \Leftrightarrow k \cdot 5 = 15 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

Câu 26. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tất cả giá trị của m để $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right] \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

Lời giải

Đáp án: $m=14$

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB} = (1;2;1)$, $\overrightarrow{OC} = (4;3;m)$.

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right] \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = 14.$$

Vậy $m=14$.

DẠNG 2

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

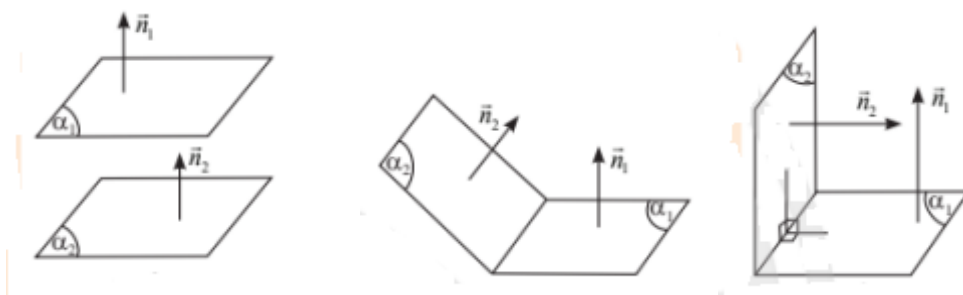
KHOẢNG CÁCH MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

1. Điều kiện hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$\bullet \quad (\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = kn_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = kn_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow n_1$ và n_2 không cùng phương.
- $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$



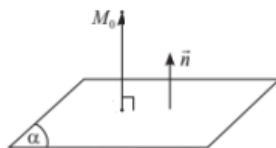
Chú ý:

- a cùng phương với $b \Leftrightarrow [a, b] = 0$
- Nếu $n = [a, b]$ thì vector n vuông góc với cả hai vector a và b

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$


Chú ý:

- Mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $z = 0$.
- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình: $y = 0$.
- Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x = 0$.

3. Khoảng cách hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia (Thực chất là khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng).

Để tính khoảng cách mặt phẳng (α_1) song song với (α_2) , ta thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn điểm $M \in (\alpha_1)$

Bước 2: Tính khoảng cách điểm M đến (α_2)

Bước 3: Kết luận $d((\alpha_1), (\alpha_2)) = d(M, (\alpha_2))$

Chú ý: Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): Ax + By + Cz + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): Ax + By + Cz + D_2 = 0$ có cùng vector pháp

tuyến là $n = (A; B; C)$. Khi đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là:
$$d((\alpha_1), (\alpha_2)) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 27. Khoảng cách từ điểm $M(3; 2; 1)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + Cz + D = 0$, $A.C.D \neq 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. $d(M, (P)) = \frac{|3A + C + D|}{\sqrt{A^2 + C^2}}$ B. $d(M, (P)) = \frac{|A + 2B + 3C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- C. $d(M, (P)) = \frac{|3A + C|}{\sqrt{A^2 + C^2}}$ D. $d(M, (P)) = \frac{|3A + C + D|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức
$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ta được:
$$d(M, (P)) = \frac{|3A + C + D|}{\sqrt{A^2 + C^2}}$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A. $d = \frac{5}{9}$ B. $d = \frac{5}{29}$ C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$ D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách d từ A đến (P) là
$$d(A, (P)) = \frac{|3x_A + 4y_A + 2z_A + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 8 + 6 + 4|}{\sqrt{29}}$$

Khoảng cách

$$\Rightarrow d(A, (P)) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; 0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. 5 B. 2 C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{3}$$

Ta có

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1; 2; -3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$

A. $\frac{11}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$d(M, (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-11|}{3} = \frac{11}{3}$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -2)$ lên mặt phẳng (P) . Độ dài đoạn thẳng MH là

A. 2.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) : $MH = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1$

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; -2; 3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 5 = 0$. Độ dài đoạn thẳng AH là

A. 3.

B. 7.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|2 + 2 - 6 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 1$$

Câu 33. Khoảng cách từ điểm $M(-4; -5; 6)$ đến mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) lần lượt bằng:

A. 6 và 4.

B. 6 và 5.

C. 5 và 4.

D. 4 và 6.

Lời giải

Chọn A

$$d(M, (Oxy)) = |z_M| = 6; \quad d(M, (Oyz)) = |x_M| = 4.$$

Câu 34. Tính khoảng cách từ điểm $B(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): y + 1 = 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. y_0 . B. $|y_0|$. C. $\frac{|y_0 + 1|}{\sqrt{2}}$. D. $|y_0 + 1|$.

Lời giải

Chọn D

Câu 35. Khoảng cách từ điểm $C(-2; 0; 0)$ đến mặt phẳng (Oxy) bằng:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $d(C, (Oxy)) = 0$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. 3.

Lời giải

Chọn C

Lấy $A(2; 1; 3) \in (P)$. Do (P) song song với (Q) nên

$$Ta\ có \quad d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = \frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}$$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$ là

- A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{8}{\sqrt{14}}$ C. 14 D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Lời giải

Chọn A

$(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$. Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{6}$

trắc nghiệm:

Công thức tính nhanh: $(P): Ax + By + Cz + D_1 = 0; (Q): Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$$d((P); (Q)) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$(P) // (Q) \text{ áp dụng công thức: } d((P);(Q)) = \frac{|-1-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-8=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$ bằng

- A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. C. 2. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} (P) // (Q) \\ A(8;0;0) \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P);(Q)) = d(A;(Q)) = \frac{|8+2.0+2.0-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{4}{3}.$$

Nhận xét:

Nếu mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d$ và $(Q): ax+by+cz+d'$ ($a^2+b^2+c^2 > 0$) song song với nhau

$$(d \neq d') \text{ thì } d((P);(Q)) = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. C. $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; 1; 1)$.

Mặt phẳng $(Q): x-y-z-2=0$ có một vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -1; -1)$.

$$\text{Mà } \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

Vậy mặt phẳng $x-y-z-2=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$, với $m, n \in \mathbb{R}$. Xác định m, n để (P) song song với (Q) .

- A. $m=n=-4$. **B.** $m=4; n=-4$. C. $m=-4; n=4$. **D.** $m=n=4$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(2; m; 3)$

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2(n; -8; -6)$

$$(P) // (Q) \Rightarrow \vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = kn \\ m = -8k \\ 3 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$$

Mặt phẳng

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$.

Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = -6$

D. $m = 6$

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$1.m - 2.1 + 2.(-2) = 0 \Leftrightarrow m = 6$$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng ba mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, $(Q): 2x + my + 2z + 3 = 0$ và $(R): -x + 2y + nz = 0$. Tính tổng $m + 2n$, biết rằng $(P) \perp (R)$ và $(P) // (Q)$

A. -6 .

B. 1.

C. 0.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$(P): x + y + z - 1 = 0$ có VTPT $a = (1; 1; 1)$

$(Q): 2x + my + 2z + 3 = 0$ có VTPT $b = (2; m; 2)$

$(R): -x + 2y + nz = 0$ có VTPT $c = (-1; 2; n)$

$$(P) \perp (R) \Leftrightarrow a.c = 0 \Leftrightarrow n = -1$$

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{m}{1} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow m = 2$$

$$\text{Vậy } m + 2n = 2 + 2(-1) = 0$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và $(Q): 4x + (2 - m)y + mz - 3 = 0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .

A. $m = -3$.

B. $m = -2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; -2)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (4; 2 - m; m)$.

Ta có: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow n_{(P)} \perp n_{(Q)} \Leftrightarrow n_{(P)} \cdot n_{(Q)} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 + 2 \cdot m - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Nên $m = 2$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

- A. $m = 1$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vec tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_1 = (1; 2; -1)$, vec tơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n}_2 = (2; 4; -m)$.

Hai mặt phẳng (α) và (β) song song khi $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-m}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 45. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

- A. $(Q): x + 2y - 2z + 8 = 0$. B. $(Q): x + 2y - 2z + 5 = 0$.
C. $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$. D. $(Q): x + 2y - 2z + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có: $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$, chọn $A(1; 0; 0) \in (P)$.

$$d(A; (Q)) = \frac{|1 + 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3.$$

+ Xét đáp án A, ta có Vậy đáp án A thỏa mãn.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 46. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 0)$ và các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. $d(M, (Oxz)) = 2$.
B. $d(M, (Oyz)) = 1$.
C. $d(M, (Oxy)) = 1$.
D. $d(M, (Oxz)) > d(M, (Oyz))$.

Lời giải

- A. $d(M, (Oxz)) = 2$. **ĐÚNG**

B. $d(M, (Oyz)) = 1$. **ĐÚNG**

C. $d(M, (Oxy)) = 1$. **SAI**

D. $d(M, (Oxz)) > d(M, (Oyz))$. **ĐÚNG**

Câu 47. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $x + y + z - 3 = 0$.

B. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $2x + y + 2z - 3 = 0$.

C. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $2x + y - 2z + 6 = 0$.

D. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $x + y + z - 3 = 0$.

Lời giải

A. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $x + y + z - 3 = 0$. **SAI**

B. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $2x + y + 2z - 3 = 0$. **ĐÚNG**

C. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $2x + y - 2z + 6 = 0$. **SAI**

D. Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $x + y + z - 3 = 0$. **SAI**

Dùng công thức khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng, sau đó tính khoảng cách lần lượt trong mỗi trường hợp và chọn đáp án đúng và sai.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 6 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

C. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 2.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 3.

Lời giải

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. **ĐÚNG**

B. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. **SAI**

C. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 2.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 3. **ĐÚNG**

Nhận xét: hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. **SAI**

Lấy $M(6; 0; 0) \in (P)$ ta có $d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{|1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $N(0;1;0)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 9 = 0$, $(Q): 4x - 2y - 4z - 6 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

B. Khoảng cách điểm đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{1}{2}$.

C. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 2.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 3.

Lời giải

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. **ĐÚNG**

B. Khoảng cách điểm đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{1}{2}$. **SAI**

C. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 2. **ĐÚNG**

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 3. **SAI**

$$d(N, (Q)) = \frac{|-2 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{3}$$

Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

Trong mặt phẳng (P) ta chọn điểm $M(0; -9; 0)$. Tính khoảng cách từ M đến (Q) ta có:

$$d(M, (Q)) = \frac{|4 \cdot 0 - 2 \cdot (-9) - 4 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = 2$$

Vậy $d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = 2$.

Câu 50. Khoảng cách từ điểm $A(2; 4; 3)$ đến mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z + 1 = 0$ và $(\beta): x = 0$ lần lượt là $d(A, (\alpha))$, $d(A, (\beta))$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $d(A, (\alpha)) = 3 \cdot d(A, (\beta))$.

B. $d(A, (\alpha)) > d(A, (\beta))$.

C. $d(A, (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

D. $2 \cdot d(A, (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

Lời giải

A. $d(A, (\alpha)) = 3 \cdot d(A, (\beta))$. **SAI**

B. $d(A, (\alpha)) > d(A, (\beta))$. **SAI**

C. $d(A, (\alpha)) = d(A, (\beta))$. **SAI**

D. 2. $d(A, (\alpha)) = d(A, (\beta))$. **ĐÚNG**

$$d(A, (\alpha)) = \frac{|2x_A + y_A + 2z_A + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1; \quad d(A, (\beta)) = \frac{|x_A|}{\sqrt{1^2}} = 2.$$

Kết luận: $d(A, (\beta)) = 2d(A, (\alpha))$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2; 6; -3)$ và các mặt phẳng: $(\alpha): x - 2 = 0$; $(\beta): y - 6 = 0$; $(\gamma): z - 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $(\alpha) \perp (\beta)$.

B. $(\beta) \parallel (Oyz)$.

C. $(\gamma) \parallel oz$.

D. (α) qua I .

Lời giải

A. $(\alpha) \perp (\beta)$. **ĐÚNG**

B. $(\beta) \parallel (Oyz)$. **SAI**

C. $(\gamma) \parallel oz$. **SAI**

D. (α) qua I . **SAI**

$(\alpha): x - 2 = 0$ có VTPT $a = (1; 0; 0)$

$(\beta): y - 6 = 0$ có VTPT $b = (0; 1; 0)$

$(\gamma): z + 3 = 0$ có VTPT $c = (0; 0; 1)$

A. đúng vì ta có $a \cdot b = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

B. sai vì (Oyz) có VTCP $(1; 0; 0)$ và $(\beta): y - 6 = 0$ có VTPT $b = (0; 1; 0)$

C sai vì $(\gamma): z + 3 = 0$ có VTPT $c = (0; 0; 1)$ và trục có vectơ chỉ phương $(0; 0; 1)$

D sai vì thay tọa độ điểm I vào (α) ta thấy không thỏa mãn nên $I \notin (\alpha)$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): y - 9 = 0$. Xét các mệnh đề sau:

(I) $(P) \parallel (Oxz)$

(II) $(P) \perp Oy$

A. Cả (I) và (II) đều sai.

B. (I) đúng, (II) sai.

C. (I) sai, (II) đúng.

D. Cả (I) và (II) đều đúng.

Lời giải

- A. Cả (I) và (II) đều sai. SAI
 B. (I) đúng, (II) sai. SAI
 C. (I) sai, (II) đúng. SAI
 D. Cả (I) và (II) đều đúng. ĐÚNG

(Oxz) có VTPT $a = (0; 1; 0)$

$(P) // (Oxz)$ đúng

Oy có VTCP $a = (0; 1; 0)$ cũng là VTPT của (P)

$(P) \perp Oy$ đúng

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, Cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$; $(\beta): x + y - z + 2 = 0$; $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. $(\alpha) // (\gamma)$.
 B. $(\alpha) \perp (\beta)$.
 C. $(\gamma) \perp (\beta)$.
 D. $(\alpha) \perp (\gamma)$.

Lời giải

- A. $(\alpha) // (\gamma)$. SAI
 B. $(\alpha) \perp (\beta)$. ĐÚNG
 C. $(\gamma) \perp (\beta)$. ĐÚNG
 D. $(\alpha) \perp (\gamma)$. ĐÚNG

$(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$ có VTPT $a = (1; 1; 2)$

$(\beta): x + y - z + 2 = 0$ có VTPT $b = (1; 1; -1)$

$(\gamma): x - y + 5 = 0$ có VTPT $c = (1; -1; 0)$

Ta có $\begin{bmatrix} a; c \end{bmatrix} = (2; 2; -2) \neq 0 \Rightarrow (\alpha)$ và (γ) không song song nhau

Ta có $a \cdot b = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$

Ta có $a \cdot c = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\gamma)$

Ta có $b \cdot c = 0 \Rightarrow (\beta) \perp (\gamma)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 5 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

Lời giải

Đáp án: $d(M, (P)) = \frac{4}{3}$

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) :
$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}$$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 16 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z - 1 = 0$ bằng

Lời giải

Đáp án: $d((P), (Q)) = 5$

Ta có $\begin{cases} (P) // (Q) \\ A(16; 0; 0) \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = \frac{|16 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 5$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $M(0; -3; 0)$

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$

Theo giả thiết: $d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3$

Vậy $M(0; -3; 0)$

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

Ta có $\overline{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ (1)

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) : $d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2)$

Đề $AB = d(A, (P)) \Rightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 58. Tìm tọa độ điểm M trên trục Oy sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) : $2x - y + 3z - 4 = 0$ nhỏ nhất?

Lời giải

Đáp án: $M(0; -4; 0)$.

Khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất khi M thuộc (P) . Nên M là giao điểm của trục Oy với mặt phẳng (P) .

Thay $x = 0, z = 0$ vào phương trình (P) ta được $y = -4$.

Vậy $M(0; -4; 0)$.

Câu 59. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 17 = 0$.

Lời giải

Đáp án: $M(0; 0; 3)$

Vì $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; m)$. Ta có: $MA = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4 - m)^2}$; $d(M, (P)) = \frac{|m - 17|}{\sqrt{14}}$.

M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 17 = 0$ khi và chỉ khi

$$\sqrt{2^2 + 3^2 + (4 - m)^2} = \frac{|m - 17|}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow 13(m - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \quad \text{Vậy } M(0; 0; 3)$$

Câu 60. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; -4; -1)$ và mặt phẳng

(P) qua Ox sao cho $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$.

Lời giải

Đáp án: $a + b + c = 4$

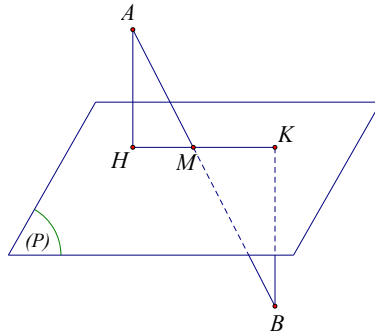
Vì $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên

$$\vec{BI} = -2\vec{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5 = -2(a - 1) \\ b + 4 = -2(b - 2) \\ c + 1 = -2(c - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4$$

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 12z + 5 = 0$ và điểm $A(2; 4; -1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M . Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P) .

Lời giải

Đáp án: $d(B, (P)) = 6$



Ta có: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Rightarrow BM = 2 \cdot AM \Rightarrow \frac{d(B, (P))}{d(A, (P))} = \frac{BM}{AM} = 2$

$$\Rightarrow d(B, (P)) = 2d(A, (P)) = 2 \cdot \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 12 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = 2 \cdot 3 = 6$$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ và $(Q): 6x - y - z - 10 = 0$. Tìm m để $(P) \perp (Q)$.

Lời giải

Đáp án: $m = 4$

$(P): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ có VTPT $a = (2; m; 2m)$

$(Q): 6x - y - z - 10 = 0$ có VTPT $b = (6; -1; -1)$

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 6 + m \cdot (-1) + 2m \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x + my + z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 3y - 2z + 7 = 0$. Tìm m, n để $(P) // (Q)$.

Lời giải

Đáp án: $m = \frac{3}{2}; n = -10$

$$(P): 5x + my + z - 5 = 0 \text{ có VTPT } \vec{a} = (5; m; 1)$$

$$(Q): nx - 3y - 2z + 7 = 0 \text{ có VTPT } \vec{b} = (n; -3; -2)$$

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 3 = 0 \\ n + 10 = 0 \\ -15 - mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = -10 \end{cases}$$

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - my - 4z - 6 + m = 0$ và $(Q): (m+3)x + y + (5m+1)z - 7 = 0$. Tìm m để $(P) \equiv (Q)$.

Lời giải

Đáp án: $m = -1$

$$(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{1} = \frac{-4}{5m+1} = \frac{-6+m}{-7} \left(m \neq -3, -\frac{1}{5} \right) \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$; $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q) ; phương trình của $(R): m(x - 2y - z + 3) + (2x + y + z - 1) = 0$. Khi đó giá trị của m là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m = -3$

Vì $(R): m(x - 2y - z + 3) + (2x + y + z - 1) = 0$ đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ nên ta có:
 $m(1 - 2 \cdot 1 - 1 + 3) + (2 \cdot 1 + 1 + 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ trong đó $b, c \neq 0$ và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tìm mối liên hệ giữa b, c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Đáp án: $b = c$

• Phương trình $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow (ABC)$ có VTPT: $\vec{n} = \left(1; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \right)$.

• Phương trình $(P): y - z + 1 = 0 \Rightarrow (P)$ có VTPT: $\vec{n}' = (0; 1; -1)$.

• $(ABC) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax - y + 2z + b = 0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - y - z + 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 1 = 0$. Tính $a + 4b$.

Lời giải

Đáp án: $a + 4b = -16$.

Trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ ta lấy lần lượt 2 điểm A, B như sau:

Lấy $A(x, y, 1) \in \Delta$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow A(0; 0; 1)$$

Lấy $B(-1; y; z) \in \Delta$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 2; -2)$$

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $A, B \in (\alpha)$. Do đó ta có:
$$\begin{cases} 2 + b = 0 \\ -a + b - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$a + 4b = -8 + 2 \cdot (-2) = -16.$$

Vậy

Câu 68. Gọi m, n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$. Tính $m + n$.

Lời giải

Đáp án: $m + n = 3$

$(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(m; 2; n)$.

$(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(1; -m; n)$.

$(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha(4; -1; -6)$.

+ Giao tuyến của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases} (P_m) \perp (\alpha) \\ (Q_m) \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{n}_2 \perp \vec{n}_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 2 - 6n = 0 \\ 4 + m - 6n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $m + n = 3$.

Câu 69. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x + y + z + 3 = 0$, cách điểm $M(3; 2; 1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a; b; c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a + b + c < -2$?

Lời giải

Đáp án: không tồn tại mặt phẳng (P) .

Ta có mặt phẳng cần tìm là $(P): x + y + z + d = 0$ với $d \neq 3$.

Mặt phẳng (P) cách điểm $M(3; 2; 1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|6+d|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ d=-15 \end{cases}$ đối chiếu

điều kiện suy ra $d = -15$. Khi đó $(P): x + y + z - 15 = 0$.

Theo giả thiết $X(a; b; c) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c = 15 > -2$ không thỏa mãn $a + b + c < -2$.

Vậy không tồn tại mặt phẳng (P) .

Câu 70. *Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O . Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$.

Lời giải

Đáp án: $b_1b_2 + c_1c_2 = -9$

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x + by + cz + d = 0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O .

Vì (α) đi qua $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + b + c + d = 0 \\ -2b + 2c + d = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại $M(-d; 0; 0), N(0; -\frac{d}{b}; 0)$.

Vì M, N cách đều O nên $OM = ON$. Suy ra: $|d| = \left| \frac{d}{b} \right|$.

Nếu $d = 0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d| = \left| \frac{d}{b} \right| \Leftrightarrow b = \pm 1$.

• Với $b = 1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = -2 \\ 2c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ d = -6 \end{cases}$. Ta được mặt phẳng $(P): x + y + 4z - 6 = 0$

• Với $b = -1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$. Ta được mặt phẳng $(Q): x - y - 2z + 2 = 0$

Vậy: $b_1b_2 + c_1c_2 = 1.(-1) + 4.(-2) = -9$.

Cách 2

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 1)$$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x + by + cz + d = 0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O

lần lượt tại M, N . Vì M, N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a; 0; 0), N(0; a; 0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (P) . Ta có $\overrightarrow{MN} = (-a; a; 0)$, chọn $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0)$ là

một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1] = (-1; -1; -4)$,

suy ra $(P): x + y + 4z + d_1 = 0$

TH2: $M(-a; 0; 0), N(0; a; 0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (Q) . Ta có $\overrightarrow{MN} = (a; a; 0)$, chọn $\vec{u}_2 = (1; 1; 0)$ là

một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_q = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2] = (-1; 1; 2)$,

suy ra $(Q): x - y - 2z + d_2 = 0$

Vậy: $b_1b_2 + c_1c_2 = 1.(-1) + 4.(-2) = -9$.