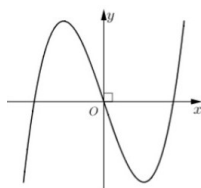


Trắc nghiệm 4 đáp án (Khảo sát hàm số bậc 3)
 Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



*A. $y = x^3 - 3x$

B. $y = -x^3 + 3x$

C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$

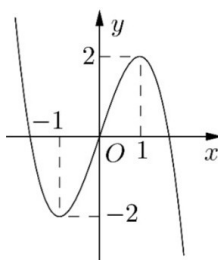
D. $y = -x^3 + 3x^2$

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 1.

B. 0.

C. 2.

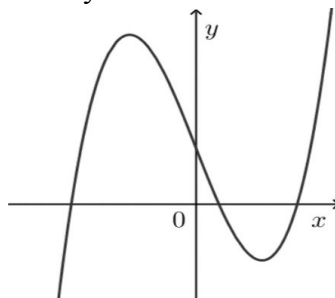
*D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



*A. $y = x^3 - 3x + 1$

B. $y = -x^3 + 3x + 1$

C. $y = x^3 - x^2 + 1$

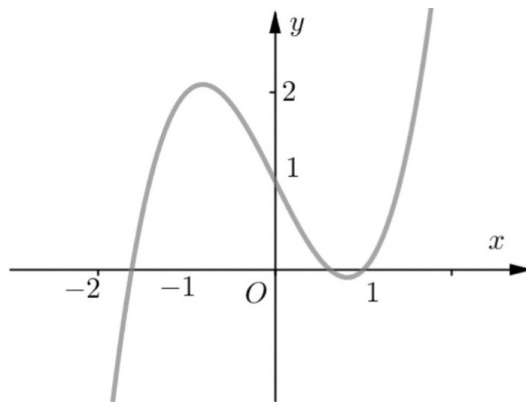
D. $y = -x^3 + x - 1$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 4. Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + 2x + 1$

B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$

*C. $y = x^3 - 2x + 1$

D. $y = -x^3 + 2x + 1$

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, loại phương án D.

Xét phương án A có $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực trị, loại phương án A.

Xét phương án B có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0, x = 2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$, loại phương án B.

Vậy phương án đúng là C.

Câu 5. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

A. $y = -x^3 + 3x$

*B. $y = x^3 - 3x$

C. $y = -x^2 + 2x$

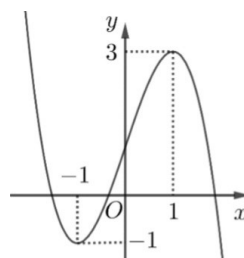
D. $y = x^2 - 2x$

Lời giải

Từ đồ thị ta có đây là đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$.

Lời giải

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 0

*B. 3

C. 1

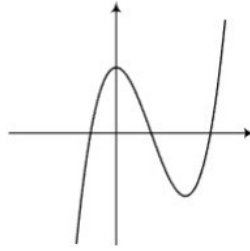
D. 2

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



A. 2

B. 0

C. 1

*D. 3

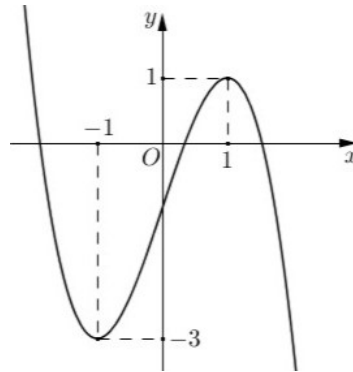
Lời giải

Chọn D

Ta có: $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$ (*)

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$.
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy (*) có 3 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 2.

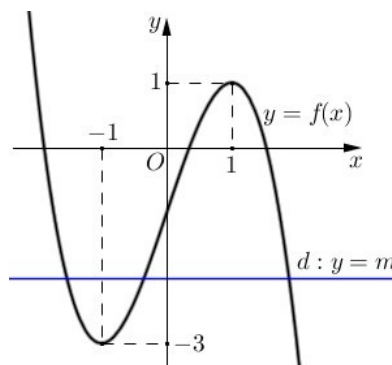
B. 5.

*C. 3.

D. 4.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = m$.



Dựa vào hình vẽ, ta có:

Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt, tức là $-3 < m < 1$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Câu 9. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0.

B. 1.

*C. 2.

D. -2.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung. Ta có $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3.

B. 1.

*C. -1.

D. 0.

Lời giải

Từ hàm số: $y = -x^3 + 2x^2 - 1$, cho $x = 0 \rightarrow y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Câu 11. Đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

*A. -5.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ và trục tung, ta có:
 $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -5$

Câu 12. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

*A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 13. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

*A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$

*A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$x^3 + x^2 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

Câu 15. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0 = 4$

B. $y_0 = 0$

*C. $y_0 = 2$

D. $y_0 = -1$

Lời giải**Chọn C**Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.**Câu 16.** Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$. Tìm P .

A. $P = 0$.

*B. $P = 2$.

C. $P = 1$.

D. $P = 3$.

Lời giảiXét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$:

$$x^3 - x^2 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$.Với $x = 2 \Rightarrow y = 5$.Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0; 1)$ và $(2; 5)$.Vậy $P = 2$.**Câu 17.** Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 10$.

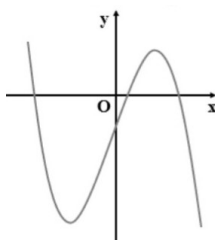
*B. $y_0 = 13$.

C. $y_0 = 11$.

D. $y_0 = 12$.

Lời giảiPhương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 2x + 1 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Với $x = 2 \Rightarrow y = 13$. Vậy $y_0 = 13$ **Câu 18.** Cho hàm số $y = (x - 3)(x^2 + 2)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.*B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.C. (C) không cắt trục hoành.D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.**Lời giải****Chọn B.**Pthd của (C) và trục hoành là:

$$(x - 3)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$
 nghĩa là (C) cắt trục hoành tại một điểm

NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI**Câu 19.** Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

*D. $a < 0, d < 0$.

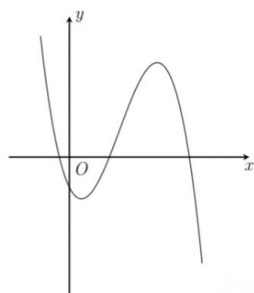
Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0 \Rightarrow y=d < 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d ?



A. 4.

B. 3.

*C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

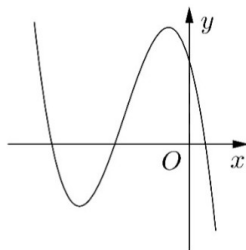
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía của trục tung nên $ac > 0 \Rightarrow c < 0$

Đồ thị hàm số có điểm uốn nằm bên phải trục tung nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung ở dưới trục hoành $\Rightarrow d < 0$

Câu 21. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu



số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 4.

B. 2.

*C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

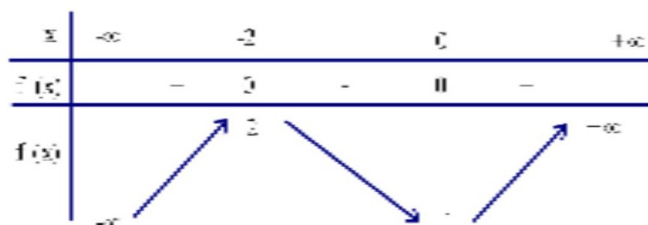
$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Hàm số có 2 cực trị âm nên

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a, b, c, d

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

*D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ dấu điều kiện biến thiên hàm số ta có $a > 0$.

Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $c = 0; \frac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là a, b, d .

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

*A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

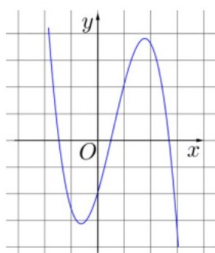
Chọn A.

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

Câu 24. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



*A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

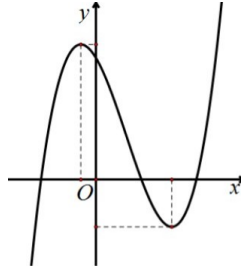
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án C

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3ac < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ loại phương án D. Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$

B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

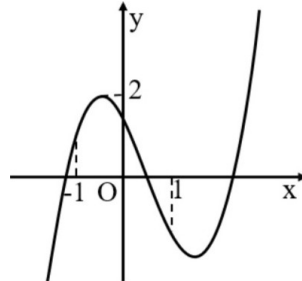
*D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d > 0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. Vậy đáp án D

Câu 26. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

*D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

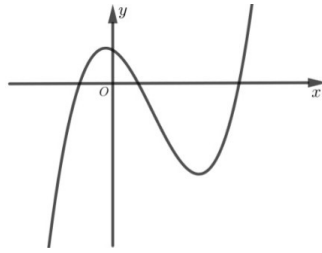
+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3ac < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ nên suy ra $-\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng** ?



*A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$

B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$

D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$

Lời giải

Chọn A

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

⊕ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$

⊕ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

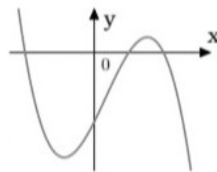
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn dương

nên $\begin{cases} ac < 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ (do $a > 0$)

Do đó: $ab < 0, bc > 0, cd < 0$

Câu 28. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

*D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

Lời giải

Chọn D

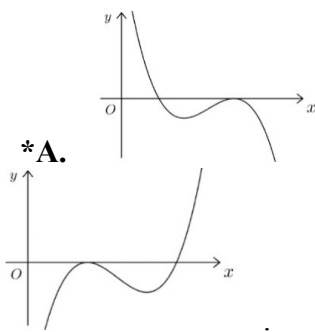
- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

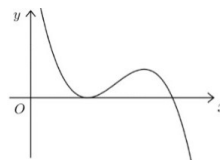
- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu kéo theo $3ac < 0 \Rightarrow c > 0$.

- Mặt khác $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$

Câu 29. Tìm đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ với $a < b$.



*A.



B.

C.

D.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x) = -(b-x)^2 + (a-x)(-2)(b-x) = -(b-x)(b-x+2a-2x) = -(b-x)(b+2a-3x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ x = \frac{2a+b}{3} \end{cases}$$

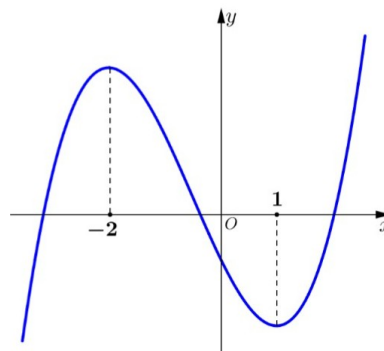
Có $\frac{2a+b}{3} < \frac{2b+b}{3} = b$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{2a+b}{3}$	b	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	$-\infty$

Từ đó chọn đáp án A

Câu 30. Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

*D. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$

Lời giải

Chọn D

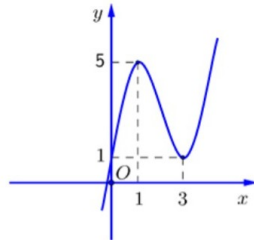
Từ đồ thị ta có $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$, từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ từ đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac < 0$ mà $a > 0$ suy ra $c < 0$.

Hơn nữa phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = -1$ suy ra $3a = 2b \Rightarrow b > 0$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

*C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

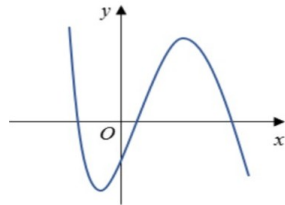
Chọn C

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 5 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = 1 \end{cases}$$

Câu 32. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

*D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b$$

Từ đồ thị ta thấy:

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Ta suy ra $a < 0$.

* $y(0) < 0 \Rightarrow d < 0$ loại C.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$. Ta suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$.

Ta suy ra $x_1 x_2 = -\frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0$ loại B.

Hơn nữa, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{3a} > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0$. Loại A.

Câu 33. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

*A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

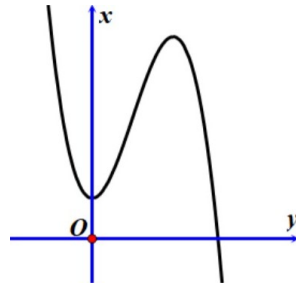
Chọn A

Dựa vào giá trị của đồ thị với trục tung ta có $d < 0$, dựa vào dáng của đồ thị suy ra $a < 0$.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$ dựa vào đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm suy ra

$$\begin{cases} \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow b < 0 \end{cases}$$

Câu 34. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$

*C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

Lời giải

Chọn C

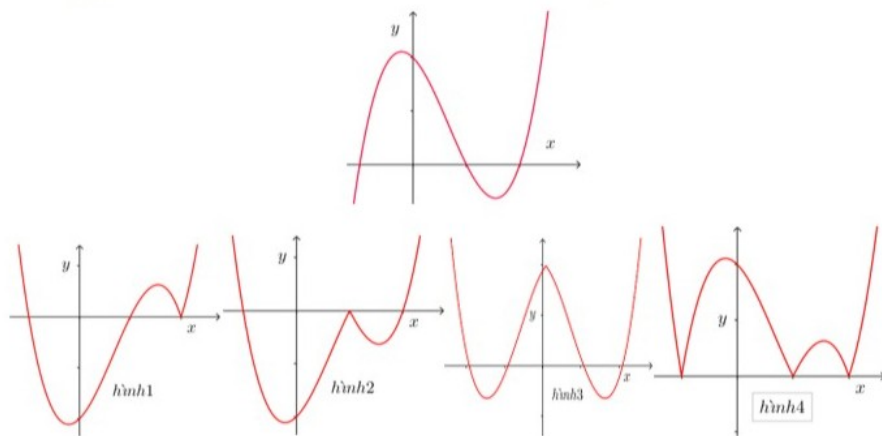
Nhánh cuối đồ thị đi xuống nên $a < 0$

Điểm uốn lệch bên phải trục Oy nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$

Đồ thị có 2 cực trị trong đó một cực trị thuộc Oy nên $c = 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$

Câu 35. Hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$?



*A. Hình 1

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Hình 4

Lời giải

Chọn A

$$y = |x - 2|(x^2 - 1) = \begin{cases} (x - 2)(x^2 - 1), & x \geq 2 \\ -(x - 2)(x^2 - 1), & x < 2 \end{cases}$$

Đồ thị gồm 2 phần:

+) Giữ nguyên phần đồ thị đã cho ứng với $x \geq 2$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị đã cho ứng với $x < 2$ qua trục Ox

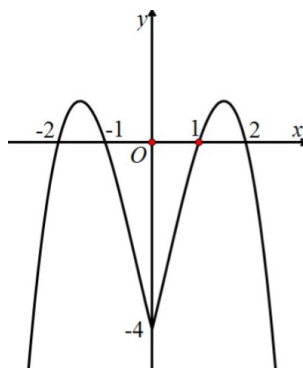
Hình 1 nhận vì đồ thị là hàm $y = |x - 2|(x^2 - 1)$

Hình 2 loại vì đồ thị là hàm $y = (x - 2)|x - 1|(x + 1)$

Hình 3 loại vì đồ thị hàm số $y = (|x| - 2)(x^2 - 1)$

Hình 4 loại vì đồ thị hàm $y = |(x - 2)(x^2 - 1)|$

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

*A. $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

B. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

C. $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$

D. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Lời giải

Chọn A

Do đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Câu 37. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

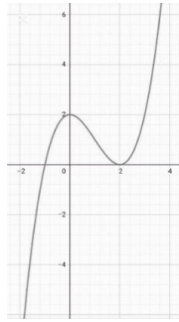
A. 4.

B. 5.

C. 2.

*D. 3.

Lời giải
Chọn D



Ta có:

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực

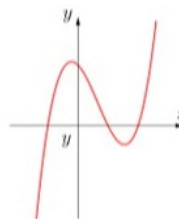
Nên đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ được minh họa như hình vẽ.

Gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và k là nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

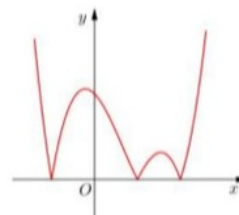
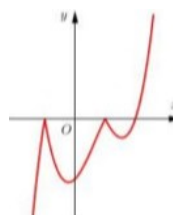
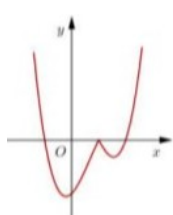
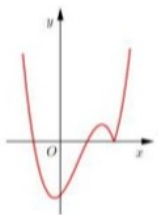
$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là $m + k$.

Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có số điểm cực trị là $2 + 1$.

Câu 38. Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ có đồ thị như hình vẽ



Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = (x - 2)|x^2 - 1|$. Hỏi đó là hình nào?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 2.

B. Hình 4.

*C. Hình 3.

D. Hình 1.

Lời giải
Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$.

$$y = (x - 2)|x^2 - 1| = \begin{cases} (x - 2)(x^2 - 1) & \text{khi } x \leq -1 \text{ hay } x \geq 1 \\ -(x - 2)(x^2 - 1) & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Ta có

Cách vẽ đồ thị như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ (C) ứng với $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ ta được (C_1) .

+ Lấy đối xứng phần (C) ứng với $x \in (-1; 1)$ qua trục hoành ta được (C_2) .

Khi đó đồ thị hàm số $y = (x - 2)|x^2 - 1|$ gồm (C_1) và (C_2) .

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

A. $m > -2$.

B. $m = -2$.

*C. $m > -3$.

D. $m = -3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là
 $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 1)$ (1)

Phương trình (1) $\hat{=} x^3 - 3x^2 - mx + 2 + m = 0 \hat{=} (x - 1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0$

$\hat{=} \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases}$ (2)

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\hat{=} \begin{cases} D' = 1 + m + 2 > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} m > -3 \\ m^2 - 3 \end{cases} \hat{=} m > -3$

Vậy $m > -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; -4)$

*B. $m \in (-4; 0)$

C. $m \in (0; +\infty)$

D. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

$x: -\infty \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$
 $y': + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
 $y: -\infty \quad 0 \quad -4 \quad +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$

*B. $m \in (-2; +\infty)$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm
 $x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x-m-1=0 \end{cases}$. Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay

$$\begin{cases} 1+m+1>0 \\ 1-2-m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2 \quad (1)$$

Với $m>-2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2-2x-m-1=0$). Mà $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ suy ra điểm có hoành độ $x=1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A, B, C thỏa mãn $AB=BC$ Vậy $m>-2$.

Câu 42. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+(m^2-2)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

- A. $m=\pm 2$. B. $m=\pm 1$. C. $m=\pm\sqrt{3}$. *D. $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B(0; 2m^2+4)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3+(m^2-2)x+2m^2+4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+m^2+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ (x-1)^2+m^2+1=0 \quad (vn) \end{cases}$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2; 0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.2.(2m^2+4)=8 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB=BC$.

- A. $m \in (-\infty; -1)$ B. $m \in (-\infty; +\infty)$ C. $m \in (1; +\infty)$ *D. $m \in (-\infty; 3)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^3-3x^2-m+2=-mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x+m-2=0 \end{cases}$$

Đặt nghiệm $x_2=1$. Từ giả thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2-2x+m-2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1+x_3=2=2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta'=1-(m-2)>0 \Leftrightarrow m<3$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (2; +\infty]$ B. $m \in (-\infty; -2]$ *C. $m \in (-2; 2)$ D. $m \in [-2; 2]$

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-2, y'=3x^2+6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$			

Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

*C. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m-2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 46. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = x + 4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m = \frac{1 + \sqrt{137}}{2}$

B. $m = \frac{-1 + \sqrt{137}}{2}$

*C. $m = \frac{1 + \sqrt{137}}{2}$

D. $m = \frac{1 - \sqrt{137}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot [x^2 + 2mx + (m+2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 + 2m \cdot 0 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C .

$$\Rightarrow B(x_1; x_1 + 4) \text{ và } C(x_2; x_2 + 4)$$

$$\Rightarrow \overset{UULU}{KB} = (x_1 - 1; x_2 + 1) \text{ và } \overset{UULU}{KC} = (x_2 - 1; x_2 + 1)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{|(x_1 - 1)(x_2 + 1) - (x_2 - 1)(x_1 + 1)|}{2} = |x_1 - x_2|$$

$$\text{Theo đề bài: } S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2} \text{ (nhận).}$$

$$\text{Vậy tất cả các giá trị } m \text{ thỏa đề là } m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

Câu 47. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$.

B. $m \geq -2$

C. $m > -3$.

***D.** $m > -2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - (m + 2) = 0 (*) \end{cases}$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + (m + 2) > 0 \\ 1 - 2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$$

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

$$\text{Theo định lý Viét ta có } \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 \cdot x_3 = -(m + 2) \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow 1 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m + 2) > 4 \Leftrightarrow m > -2$$

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m > -2$.

Kết luận: $m > -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3mx + m - 1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox có diện tích phần nằm phía trên trục Ox và phần nằm dưới trục Ox bằng nhau. Giá trị của m là?

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

*D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 3m$ và $y'' = 6x + 6$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad y(-1) = 1 + 4m \Rightarrow U(-1; 1 + 4m)$$

Từ giả thiết suy ra hàm số có hai điểm cực trị và điểm uốn nằm trên trục hoành, nên

$$1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Câu 49. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2021]$ để đường thẳng $y = 3mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ tại ba điểm phân biệt là

A. 1.

*B. 2021.

C. 670.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

• Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 3mx + 1$ là $x^3 - 3x + 3 = 3mx + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3x(m + 1)$ (1).

Nếu $x = 0$ thì (1) không thỏa mãn.

Nếu $x \neq 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{x^3 + 2}{x} = 3(m + 1)$

• Xét hàm số $g(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $g'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

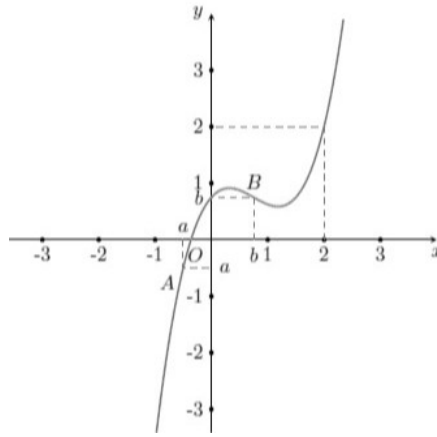
$-\infty$	1	$+\infty$	$g'(x)$	x	$g(x)$	-	$+\infty$	$-\infty$	-	0	$+\infty$	3	$+\infty$	0
+														

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = 3mx + 1$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3(m + 1) > 3 \Leftrightarrow m + 1 > 1 \Leftrightarrow m \in (0; +\infty)$

Kết hợp với điều kiện $m \in [-2020; 2021]$ ta được $m \in (0; 2021]$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:

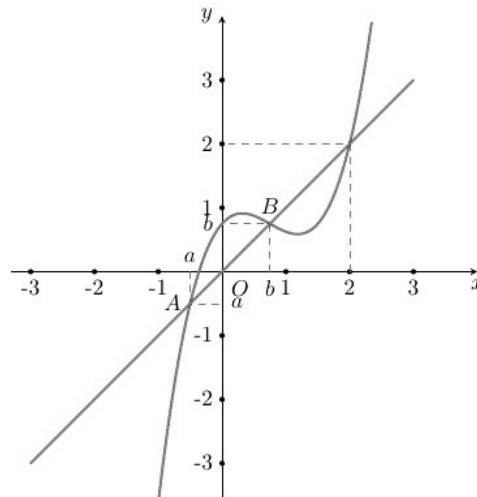


Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

- A. 2.
- B. 3.
- *C. 5.
- D. 4.

Lời giải

Chọn C



$$f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 0) \\ x = b \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có

$$f(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = a \in (-\infty; 0) \\ \cos x + 1 = b \in (0; 1) \\ \cos x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a - 1 = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (VN)} \\ \cos x = b - 1 = t_2 \in (-1; 0) \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Do đó

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Câu 51. Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?

A. 2.

B. 4.

C. 5.

*D. 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Với $t = 1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $t = -1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $-1 < t < 1$, phương trình $t = \cos x$ có ba nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Thay $t = \cos x$ vào phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$, ta được phương trình:

$$f(f(t) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(t) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(t) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = a + 1 \in (-1; 0) & (1) \\ f(t) = b + 1 \in (0; 1) & (2) \\ f(t) = c + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có:

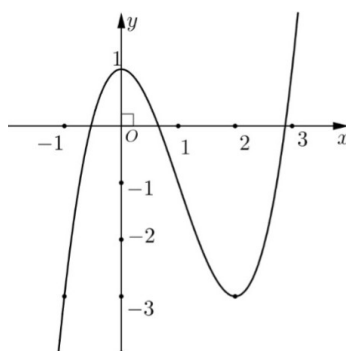
+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t > 1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 52. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



A. 7.

*B. 8.

C. 10.

D. 5.

Lời giải**Chọn B**

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = -m \\ x^3 - 3x^2 + 1 = -m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn } [-1; 2] \text{ thì } \begin{cases} -3 \leq -m \leq 1 \\ -3 \leq -m + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases} \\ \Rightarrow m \in [-1; 6]$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 53. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại $x = 1$ và $x = 2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

*A. 4037.

B. 2019.

C. 4001.

D. 2021.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Do hàm số có 2 điểm cực trị là: $x_1 = 1$ và $x_2 = 2021$.

$$\text{Nên: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 2022 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3033a \\ c = 6063a \end{cases}$$

Xét phương trình: $f(x) = f(m)$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = am^3 + bm^2 + cm + d$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - m^3) + b(x^2 - m^2) + c(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - m^3) - 3033a(x^2 - m^2) + 6063a(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 + mx + m^2 - 3033x - 3033m + 6063) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 0 \\ x^2 + mx + m^2 - 3033x - 3033m + 6063 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để phương trình $f(x) = f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt thì pt(*) có 2 nghiệm phân biệt khác m .

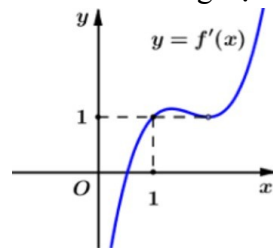
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 3033)^2 - 4(m^2 - 3033m + 6063) > 0 \\ m^2 + (m - 3033)m + m^2 - 3033m + 6063 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6063m + 3033^2 - 4m^2 + 4 \cdot 3033m - 4 \cdot 6063 > 0 \\ m^2 + (m - 3033)m + m^2 - 3033m + 6063 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1009 < m < 3031 \\ m \neq 2021; m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy: $m \in (-1009; 3031) \setminus \{1; 2021\}$ có 4037 giá trị m nguyên.

Câu 54. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1; 2021)$ để bất phương trình $f(1 - m^2) - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < x^2 - 2mx + 2m^2$ có nghiệm?



A. 0.

B. 1.

*C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

$$f(1 - m^2) - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < x^2 - 2mx + 2m^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx + 1 - 3m^2 - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < 1 - m^2 - f(1 - m^2) \quad (*)$$

Ta có:

$$1 - m^2 < 0, \forall m \in (1; 2021)$$

$$-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2 = -(x - m)^2 - 2m^2 + 1 < 0, \forall m \in (1; 2021), \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số $g(t) = t - f(t), t < 0$.

Có $g'(t) = 1 - f'(t) > 0, \forall t < 0$ (do từ đồ thị ta có $f'(x) < 0, \forall x < 0$)

Vậy $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

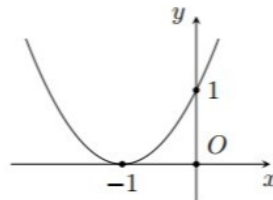
$$(*) \text{ có dạng } g(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < g(1 - m^2)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx + 1 - 3m^2 < 1 - m^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx - m^2 < m^2 \Leftrightarrow -(x - m)^2 < m^2 \quad (\text{luôn đúng } \forall m \in (1; 2021), \forall x \in \mathbb{R})$$

Vì m nguyên nên $m \in \{2; 3; \dots; 2020\}$. Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 55. Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x - 1) - x - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt?



A. $m < f(2)$.

*B. $m > f(0)$.

C. $m < f(0)$.

D. $m > f(2)$.

Lời giải

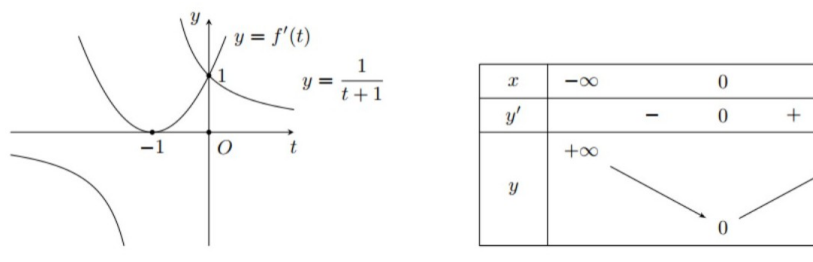
Cách 1. Ta có

$$f(e^x - 1) - x - m = 0 \Leftrightarrow f(e^x - 1) - x = m.$$

Đặt $h(x) = f(e^x - 1) - x$ thì $h'(x) = e^x f'(e^x - 1) - 1$. Suy ra

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'(e^x - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(e^x - 1) = \frac{1}{e^x}.$$

Đặt $t = e^x - 1, t > -1$ thì (1) trở thành $f'(t) = \frac{1}{t+1}$. Ta có đồ thị sau



Từ đồ thị ta có nghiệm của phương trình (2) là $t = 0$, suy ra $e^x - 1 = 0$ hay $x = 0$. Ta có bảng của $h(x)$ như trên. Từ đó, phương trình $h(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m > f(0)$.

Cách 2. Từ đồ thị ta có $f'(x) = (x+1)^2$. Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C.$$

Thay vào phương trình, ta được

$$\frac{e^{3x}}{3} + C - x - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{e^{3x}}{3} - x + C.$$

Đặt $g(x) = \frac{e^{3x}}{3} - x + C$. Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$g(0) = f(0)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình có hai nghiệm thực khi và chỉ khi $m > f(0)$.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x) = f(m+1)$ có nghiệm.

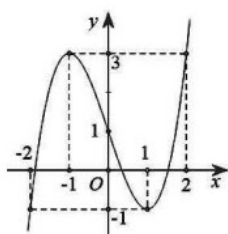
A. $-1 \leq m \leq 3$.

B. $-2 \leq m \leq 0$.

*C. $-3 \leq m \leq 1$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

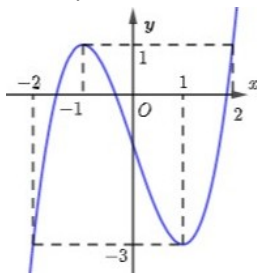


Ta có: $\sin x \in [-1; 1]$ nên $f(\sin x) \in [-1; 3]$.

nên $f(m+1) \in [-1; 3]$. Do đó, phương trình $f(\sin x) = f(m+1)$ có nghiệm

$$-1 \leq f(m+1) \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

Câu 57. Cho hàm số bậc ba $f = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(f(x) - m) = 0$ có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt?



A. 0.

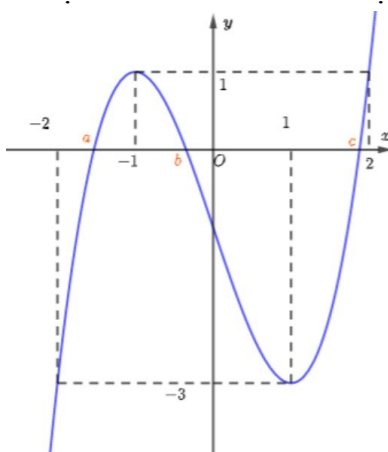
*B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Gọi a, b, c là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.



Ta có $a \in (-2; -1)$, $b \in (-1; 0)$, $c \in (1; 2)$.

$$f(f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - m = a \\ f(x) - m = b \\ f(x) - m = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a + m \\ f(x) = b + m \\ f(x) = c + m \end{cases}$$

Xét phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a + m < 1 \\ -3 < b + m < 1 \\ -3 < c + m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - a < m < 1 - a \\ -3 - b < m < 1 - b \\ -3 - c < m < 1 - c \end{cases}$$

Ycbt

Do $a \in (-2; -1)$, $c \in (1; 2)$ và $-3 - a < m < 1 - c$ nên có 1 giá trị nguyên của $m = -1$ thỏa mãn.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + k$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với a, b, c, d, k là các số thực).

Phương trình $g[f(x)] = 0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

*B. 3.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 = 0$ (vô nghiệm).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x) = m$ với m là số thực tùy ý luôn có duy nhất 1 nghiệm thực x . (1)

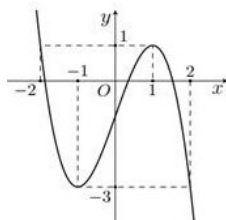
Đặt $f(x) = t$. Vì $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm bậc ba nên phương trình $g(t) = 0$ có tối đa ba nghiệm

$$t_1; t_2; t_3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = t_1 \\ f(x) = t_2 \\ f(x) = t_3 \end{cases} \quad (2).$$

$t_1; t_2; t_3$. Giả sử $g(t) = 0$ có ba nghiệm

Từ (1) và (2) ta có phương trình $g[f(x)] = 0$ có tối đa 3 nghiệm thực.

Câu 59. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0$ có đúng ba nghiệm $x \in [0; +\infty)$

A. 5.

B. 6.

C. 3.

*D. 4

Lời giải

Xét phương trình: $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(-x^2 + 4x + m) = -3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + m = -1 \\ -x^2 + 4x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = m + 1 \quad (1) \\ x^2 - 4x = m - 2 \quad (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x$ với $x \in [0; +\infty)$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

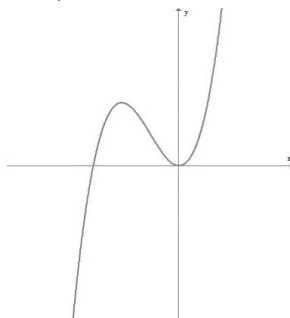
x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$\searrow -4$	$\nearrow +\infty$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Pt (2) có 2 nghiệm và phương trình (1) có 1 nghiệm hoặc phương trình (2) có 1 nghiệm và phương trình (1) có 2 nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m - 2 \leq 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m \leq 2 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

Suy ra có 4 nghiệm giá trị nguyên của m

Câu 60. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

A. 2.

*B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

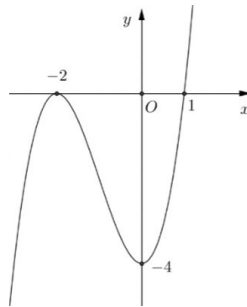
Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Do $2|\sin x| \geq 0; m^2 + 6m + 10 > 0$ nên $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10) \Leftrightarrow 2|\sin x| = m^2 + 6m + 10$.

Mà $0 \leq 2|\sin x| \leq 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương $0 \leq m^2 + 6m + 10 \leq 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

*C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

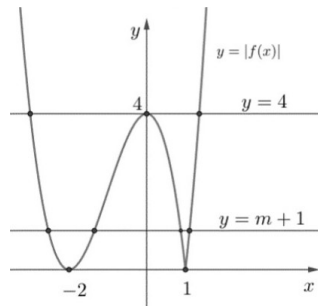
Phương trình tương đương với

$$f^2(x) - 5|f(x)| + 4 - m(|f(x)| - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1) - m(|f(x)| - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 4 & (1) \\ |f(x)| = m + 1 & (2) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau



Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0 < m + 1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow m = 0, 1, 2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

----HẾT----