**Bài 2. Nhị thức Newton**

Ta đã có công thức

trong trường hợp n = 1, 2, 3, 4,5.

Công thức này có đúng với mọi số tự nhiên n không? Làm thể nào đề kiểm tra?

**Từ khoá:** **Nhị thức Newton; Tam giác Pascal.**

**1. Công thức nhị thức Newton**

Có ba hộp, mỗi hộp đưng hai quả câu được

dán nhãn và (xem Hình 1). Lấy từ mỗi

hộp một quả câu. Có bao nhiêu cách lấy để

trong ba quả câu lấy ra:

a) có 3 quả cầu dán nhãn ?

b) có 2 quả cấu dán nhãn ?

c) có 1 quả câu dán nhãn ?

d) không có quả cầu nào dán nhãn ?

Bằng lập luân tương tư như , ta. có thể sử dụng tổ hợp để tìm các hệ số của công

thức khai triển

.

Thật vậy, ta có khai triển

Trong khai triển trên, đề nhân được số hạng , ta lấy số hạng trong thừa số thứ

nhất nhân với số hạng trong thừa số thứ hai, rồi nhân với số hạng trong thừa

số (a + b) thử ba, Do đó, hệ số của bằng số cách chọn ba chữ từ ba chữ có trong ba

thừa số (a + b), tức bằng .

Tiếp theo, xét số hạng 3a hay tổng . Đề nhận được mỗi số hạng của tổng

này, ta lấy tích của hai số hạng từ hai thừa số rồi nhân với số hạng a của thừa số

 còn lại. Do đó, hệ số của bằng số cách chọn hai chữ từ ba chữ có trong ba

thừa số tức bằng .

Lập luận tương tự, ta được hệ số của bằng , hệ số của bằng .

Từ đó, ta nhận được

.

Một cách tổng quát, với số tự nhiên bất kì , ta có thể mở rộng lập luận ở trên để tim

các hệ số trong khai triển biểu thức

.

Khai triền biểu thức này, ta nhận được các số hạng dạng với , là hệ số . Hệ số bằng số cách chọn chữtừ chữ có trong thừa số

Nghĩa là,

Từ đó, ta nhân được kết quả

  Với mỗi số tự nhiên n, ta có:

. (1)

Công thức (1) được gọi là **công thức** nhị thức **Newton**, gọi tắt là **nhị thức Newton**

**Chú ý**

a) Trong cách viết về phải của (1), số hạng được gọi là **số hạng**

**tổng quát**.

b) Vế phải của (1) gồm số hạng. Đi qua các số hang từ trái sang phải, số mũ của a giảm dần, số mũ của 6 tăng dân, nhưng tổng của chúng không đổi và bằng n (quy ước

.

**Ví dụ 1**

Hãy khai trên

**Giải**

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

 .

Hãy khai triển:

a) ; b) .

**2. Tam giác Pascal**

Từ các công thức khai triển:

 ;

 ;

 ;

 ;

 ;

 ;

các hệ số được viết thành bảng số như Hình 2 sau đây. Nếu sử dụng kí hiệu tổ hợp thì nhận được bảng như Hình 3.



Từ các đằng thức như

, ,

có thể dự đoán rằng, với mỗi ,

 (2)

 . (3)

Hãy chứng minh các công thức trên.

Gợi ý: Sử dụng công thức , , từ bảng số, 0

Sử dụng công thức (3), với lưu ý rằng với mọi , từ bảng số ở Hình 2, ta có thể viết tiếp lần lượt từng hàng số để tạo thành một bảng số, được gọi **là tam giác** **Pascal** (xem Hình 4).

Trong thực hành, tam giác Pascal giúp ta nhanh chóng xác định các hệ số khi khai triển nhị thức Newton.

***Ví dụ 2***

Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển

**Giải**

Sử dụng tam giác Pascal, ta có.

(x - 1)7 = x7+ . (-1) + 21

= 7x7 -

Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển

a) b)

**3. Vận dụng công thức nhị thức Newton**

Công thức nhị thức Newton với các dạng mở rộng của nó có nhiều ứng dụng quan trọng trong toán học. Dưới đây, ta xét thêm vài ví dụ đơn giản

***Ví dụ 3***

Xác định hệ số của trong khai triển

**Giải**

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

=

Số hạng chứa ứng với giá trị k = 6. Do đó, hệ số của là

***Ví dụ 4***

Cho a là một số thực dương, Biết rắng trong khai triển (3r + a)g, hệ số của x là 70. Hãy tìm giá trị của a.

**Giải**

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

=

Số hạng chứa ứng với giá trị k = 4. Hệ số của số hạng này là = 70.

Theo giả thiết, ta có 70. hay 70 hay , suy ra a= (vì a>0)

Vây a = là giá trị cần tìm

***Ví dụ 5***

Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi n N\*

 =

**Giải**

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

=

Thay x = 1 vào công thức trên, ta nhận được

Đây là điều phải chứng minh

**Nhận xét:** Từ công thức khai triển

=

với mỗi cách chọn giá trị của x và a, ta nhận được một hệ thức liên quan đền các hệ số tổ hợp

***Ví dụ 6***

Cho tập hợp A =( có n phần tử. Tập hợp A có bạo nhiêu tập con?

**Giải**

Mỗi tập con của A có k (1 k n) phân tử là một tổ hợp chập k của A. Do đó, số tập con như vậy bằng , Mặt khác, có một tập con của 4 không có phần tử nào (tập rỗng), tức có = 1 tập con như vậy, Do đó, số tập con của A bằng

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

=(1+

Vậy tập hợp 4 có tập con.

Xác định hệ số của trong khai triển

 Biết rằng trong khai triển với a là một số thực, hệ số của là 60. Tìm giá trị của a.

Chứng minh rằng, với mọi n , ta có

 = 0

Trong hộp A có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10. Người ta lấy một số quả cầu từ hộp A rồi cho vào hộp B. Có tất cả bao nhiêu cách lấy, tính cả trường hợp lấy không quả (tức không lấy quả nào)?

**BÀI TẬP**

**1.** Khai triển biểu thức:

a)

**2.** Tìm hệ số của trong khai triển của biểu thức

**3**. Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của hệ số của gấp bốn lần hệ số của . Tìm giá trị của a.

**4.** Biết rằng hệ số của trong khai triển của là 90. Tim giá trị của n

**5.** Chứng minh công thức nhị thức Newton (công thức (1), trang 35) bằng phương pháp quy nạp toán học.

**6**. Biết rằng = . Hãy tính

a)

b)

**7.** Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

**8.** Từ 15 bút chì màu có màu khác nhau đôi một,

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một số bút chì màu, tính cả trường hợp không chọn cái nào?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra it nhất 8 bút chì màu?**Bạn có biết?**

**Tên gọi Tam giác Pascal và Nhị thức Newton**

****Tam giác Pascal được đặt theo tên của nhà toan học, nhà vật lí học, nhà triết học tài ba người Pháp Blaise Pascal, sau công trình của ông công bố vào năm 1653, Thực ra, tam giác này cùng với công thức khai triển biểu thứcvới n là số tự nhiên đã được nghiên cứu trước đó bởi các nhà toán học Ấn Độ và Ba Tư ở thế kỉ X, hay bởi các nhà toàn học Trung Hoa ở thế kỉ XI. Pascal có công lớn trong việc nghiên cửu một cách hệ thống các tính chất của tam giác này, cũng như phát hiện ra các mỗi liên hệ giữa chúng với lí thuyết xác suất.

Công thức nhị thức Newton được đặt theo tên nhà toán học, nhà vật lí học vĩ đại người Anh Isaac Newton. Như trên đã nơi, thực ra công thức này (trường hợp số mũ là số tự nhiên) đã được biết đến trước thời Newton hàng thế ki. Newton là người có công mở rộng công thức cho trường hợp số mũ n là số thực bất kì. Ông khám phá ra công thức đó vào năm 1664, nhưng đến năm 1676 mới công bố

Công thức nhị thức Newton có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều ngành toàn học khác nhau như đại số, giải tích, lí thuyết xác suất,

(Theo Britannica)