

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT TRƯỜNG THI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**GIẢI CÁC BÀI TOÁN PT, HPT, BPT, HBPT CHỨA
THAM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ỨNG DỤNG
ĐẠO HÀM DÙNG ĐỂ BỒI DƯỠNG HỌC SINH
KHÁ, GIỎI**

Người thực hiện : Cao Thị Hằng

Chức vụ : Giáo viên

SKKN thuộc lĩnh vực: Toán

THANH HÓA, NĂM 2017

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
I. MỞ ĐẦU.....	1
1.1. Lí do chọn đề tài.....	1
1.2. Mục đích, nhiệm vụ nghiên cứu.....	1
1.3. Phạm vi và đối tượng nghiên cứu.....	1
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	1
I. NỘI DUNG.....	2
2.1. Cơ sở lí luận.....	2
2.2. Thực trạng vấn đề.....	3
2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện.....	3
2.4. Kết quả đạt được.....	18
3.2. Kiến nghị:.....	19
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	20

CHỮ VIẾT TẮT

Bất phương trình	BPT
Hệ bất phương trình	HBPT
Hệ phương trình	HPT
Học sinh giỏi	HSG
Phương trình	PT
Trung học phổ thông	THPT

I. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài

Đạo hàm, một trong những nội dung vô cùng quan trọng của chương trình toán THPT. Nó vừa là đối tượng, nhưng hơn thế nó vừa là công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều vấn đề phức tạp của toán THPT. Trong đó có việc ứng dụng đạo hàm để giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số.

Về vấn đề này, cũng đã có rất nhiều tài liệu, sáng kiến kinh nghiệm đề cập tới. Tuy nhiên tài liệu viết chuyên sâu, hệ thống về những ứng dụng của đạo hàm để giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số không nhiều và học sinh thường gặp khó khăn, lúng túng trong việc nhận diện, giải quyết dạng toán.

Chính vì vậy tôi chọn đề tài SKKN là: ***“Giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số bằng phương pháp ứng dụng đạo hàm dùng để bồi dưỡng học sinh khá, giỏi”***.

1.2. Mục đích, nhiệm vụ nghiên cứu

- Giúp học sinh nhận dạng được các PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số có thể ứng dụng đạo hàm để giải.
- Bồi dưỡng cho học sinh về phương pháp, kỹ năng giải toán. Qua đó học sinh nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo tìm tòi của học sinh.
- Nâng cao khả năng tự học, tự bồi dưỡng và khả năng giải toán.

1.3. Phạm vi và đối tượng nghiên cứu

- Các dạng toán giải PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số trong chương trình toán phổ thông, đặc biệt là trong các kỳ thi tuyển sinh đại học, cao đẳng, kì thi THPT Quốc gia và kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh.
- Phân loại các dạng toán thường gặp và phương pháp giải mỗi dạng.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- Trình bày cho học sinh những kiến thức cơ bản liên quan đến dạng toán có thể ứng dụng đạo hàm để giải. Thông qua những ví dụ cụ thể với cách giải rõ ràng, chi tiết làm cho học sinh thấy được những thế mạnh của việc sử dụng phương pháp trên.
- Các ví dụ minh họa trong đề tài này được chọn lọc từ những tài liệu tham khảo về đề thi đại học và đề thi học sinh giỏi những năm qua và có những nhận xét chi tiết từng cách giải.
- Tham khảo trực tiếp ý kiến của giáo viên và học sinh để từ đó đánh giá được tính ưu việt của phương pháp này.

1.5 Những điểm mới của sáng kiến kinh nghiệm

- Hệ thống một cách logic dễ hiểu nhất về những ứng dụng của đạo hàm để giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số.

- Đưa ra phương pháp giải gồm hai dạng cùng với các bước rõ ràng, cụ thể để học sinh nắm bắt, vận dụng linh hoạt các ví dụ và bài tập. Giúp học sinh hình thành một tư duy thuật toán và ý thức phân tích nhận dạng bài toán. Ngoài việc sử dụng đạo hàm thì còn phải áp dụng linh hoạt các mệnh đề (phần kiến thức vận dụng) để giải.

I. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lí luận

2.1.1. Lí luận chung

Quá trình dạy học với các nhiệm vụ cơ bản là hình thành tri thức, rèn luyện các kỹ năng hoạt động nhận thức, hình thành thái độ tích cực...được xây dựng trên quá trình hoạt động thống nhất giữa thầy và trò, trò và trò, tính tự giác, tích cực tổ chức, tự điều khiển hoạt động học nhằm thực hiện tốt các nhiệm vụ đã được đề ra.

-Trong quá trình dạy học người thầy phải khơi gợi để tự mỗi học sinh phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo phù hợp với đặc trưng môn học. Tăng khả năng hợp tác, rèn luyện kĩ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, đem lại niềm vui hứng thú học tập cho mỗi học sinh.

2.1.2. Kiến thức vận dụng¹:

* Định nghĩa đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm, các công thức tính đạo hàm của các hàm số thường gặp, công thức tính đạo hàm của hàm hợp.

* Một số mệnh đề quan trọng cần nắm trong giải bài toán về PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D

MĐ1: Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

MĐ2: Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm

$$\forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x)$$

MĐ3: BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm $\forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m$

MĐ4: BPT $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$

MĐ5: BPT $f(x) \geq m$ có nghiệm $\forall x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \geq m$

MĐ6: BPT $f(x) \geq m$, nghiệm đúng với mọi $\forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$

MĐ7: Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D Khi đó

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \text{ (với mọi } u, v \in D)$$

¹ Trong mục 2.1.2: Tác giả tham khảo từ TLTK số [1] ;[2].

2.2. Thực trạng vấn đề

Trong quá trình giảng dạy, tôi nhận thấy ứng dụng của đạo hàm trong giải các bài toán cấp THPT là rất đa dạng, đặc biệt là trong giải các PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số.

-Đạo hàm là phần kiến thức mới với học sinh, gắn liền với toán học hiện đại, học sinh bắt đầu được làm quen ở cuối chương trình lớp 11. Trong khi đó từ cấp Trung học cơ sở đến cấp THPT học sinh đã được tiếp xúc với rất nhiều bài toán về giải PT, HPT, BPT, HBPT (có tham số và không có tham số) và đã quen sử dụng các phương pháp giải toán đại số kinh điển để giải.

-Học sinh không nhận diện được các dạng toán và chưa được hướng dẫn một cách hệ thống phương pháp để giải quyết bài toán trọn vẹn.

2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện

2.3.1. Phương pháp giải²:

Dạng 1: Tìm giá trị tham số m để PT, BPT có nghiệm (hoặc có nghiệm thỏa mãn điều kiện nào đó). Với dạng toán này ta có thể thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1: Biến đổi PT, BPT về dạng $f(x) = g(m)$ (hoặc $f(x) \geq g(m)$, hoặc $f(x) \leq g(m)$). Hay còn gọi là cô lập m).

Bước 2: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)$

Bước 3: Tính $f'(x)$

Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

Bước 5: Xác định $\min_{x \in D} f(x)$ và $\max_{x \in D} f(x)$

Bước 6: Từ bảng biến thiên rút ra kết luận bài toán.

Dạng 2: Trường hợp các PT, BPT chứa các biểu thức phức tạp, ta có thể xem xét đặt ẩn phụ để đơn giản chúng.

Bước 1: Đặt $t = \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ là một biểu thức trong PT, BPT)

Bước 2: Từ điều kiện ràng buộc của ẩn số $x \in D$, tìm điều kiện của ẩn số t , ví dụ $t \in K$ (chú ý là phải tìm được điều kiện chặt của t)

Bước 3: Đưa PT, BPT ẩn số x về PT, BPT ẩn số t ta được $f(t) = h(m)$ (hoặc $f(t) \geq h(m)$, hoặc $f(t) \leq h(m)$).

Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên tập K .

Bước 5: Từ bảng biến thiên rút ra kết luận bài toán.

2.3.2. Một số ví dụ minh họa³.

Ví dụ 1: (Câu X.2. đề thi THPT Quốc gia năm 2016)

² Từ Dạng 1 cho đến hết Bước 5 của Dạng 2. Tác giả tham khảo có chọn lọc từ TLTK số [1];[2].

³ Ví dụ 1 được tham khảo nguyên văn từ TLTK số [5].

Xét các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$ (*). Tìm m để $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq m$ đúng với mọi x, y thỏa mãn (*)

Lời giải: Đk: $x \geq 2, y \geq -3$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3})$ (**)

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2 \geq 4(x+y+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \text{ (vì } x+y+1 \geq 0) \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3 \end{cases}$$

Vì $x^2 \geq 2x$ (do $x \geq 2$), $y^2 + 1 \geq 2y$ nên $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(x+y)$. Do đó:

$$3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3$$

Đặt $t=x+y$, ta có $t=-1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$.

Ta có: $f(-1) = \frac{2188}{243}$; $f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2 - 6$;

$$f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1) \ln 2 - 2] 2^{7-t} \ln 2 > 0, \forall t \in [3; 7]$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$. Mà $f'(t)$ liên tục trên $[3; 7]$ và $f'(3)f'(7) < 0$ do đó $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3; 7)$

Bảng biến thiên:

t	3		t_0
	7		
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-4	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$

Suy ra $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq \frac{148}{3}$ với mọi x, y thỏa mãn

(*). Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$. Vậy $m \geq \frac{148}{3}$

Ví dụ 2⁴: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m$$

Lời giải:

Điều kiện $-1 \leq x \leq 8$.

Đặt $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)}$, với $-1 \leq x \leq 8$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} + \frac{7-2x}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}} + \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}}$$

I. MỞ ĐẦU.....	1
1.1. Lí do chọn đề tài.....	1
1.2. Mục đích, nhiệm vụ nghiên cứu.....	1
1.3. Phạm vi và đối tượng nghiên cứu.....	1
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	1
I. NỘI DUNG.....	2
2.1. Cơ sở lí luận.....	2
2.2. Thực trạng vấn đề.....	3
2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện.....	3
2.4. Kết quả đạt được.....	18
3.2. Kiến nghị:.....	19
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	20

Mà $\frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}(\sqrt{8-x} + \sqrt{1+x})} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}} > 0$

nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{7}{2}$	8		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$			
		3		3	

giả tham khảo từ TLTK số [3];[4].

⁴ Ví dụ 2: Tác giả tham khảo từ TLTK số [3];[4].

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm thì

$$\min_{[-1;8]} f(x) \leq m \leq \max_{[-1;8]} f(x) \Leftrightarrow 3 \leq m \leq \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$$

Nhận xét:

Bài toán trên có thể giải bằng phương pháp thông thường là đặt ẩn phụ

$t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$, sau đó chuyển về bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước. Tuy nhiên với cách đặt ẩn phụ đó nếu không dùng đạo hàm thì thường phải vận dụng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai. Định lý này trong chương trình sách giáo khoa mới đã giảm tải. Vì vậy phương pháp dùng đạo hàm là sự lựa chọn thích hợp nhất cho bài toán này.

Ví dụ 3⁵: (Câu IV.2 khối A năm 2008)

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực

phân biệt: $\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x + 2\sqrt{6-x}} + 2\sqrt{6-x} = m$

Lời giải:

Điều kiện $0 \leq x \leq 6$

Đặt $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x + 2\sqrt{6-x}} + 2\sqrt{6-x}; x \in [0; 6]$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right), x \in (0; 6)$

Đặt $u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}; v(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}, x \in (0; 6)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x), v(x) > 0, \forall x \in (0, 2) \\ u(2) = v(2) = 0 \\ u(x), v(x) < 0, \forall x \in (2, 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (0, 2) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (2, 6) \\ f'(2) = 0, \end{cases}$$

(Nghĩa là: $u(2) = v(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$ và $u(x), v(x)$ luôn dương khi $x \in (0; 2)$ và âm khi $x \in (2; 6)$). Do đó ta có bảng biến thiên:

x	0	2	6
-----	---	---	---

⁵ Ví dụ 3: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [5]

$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$	$6 + 3\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị cần tìm là: $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 3\sqrt{2} + 6$.

Nhận xét:

Trong các ví dụ trên, chúng ta thấy một điểm chung là trong các PT, biến m đã được cô lập cho nên bước 1 (trong phương pháp giải) không phải làm. Nhưng trên thực tế có rất nhiều PT mà biến m chưa được cô lập. Khi đó ta phải thực hiện bước 1 một cách khéo léo để cô lập biến m (có nhiều mức độ) thì mới có thể tiến hành các bước tiếp theo được. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4⁶: (Câu 11.2 khối B năm 2007)

Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)} \quad (1)$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 2$.

Biến đổi phương trình ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = \sqrt{m(x-2)} \Leftrightarrow (x-2)^2(x+4)^2 = m(x-2) \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 6x^2 - 32 - m) = 0 \Leftrightarrow x=2 \vee g(x) = x^3 + 6x^2 - 32 = m. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(x) = m$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Thật vậy ta có: $g'(x) = 3x(x+4) > 0, \forall x > 2$. Do đó $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$, mặt khác $g(x)$ là hàm số liên tục và $g(2) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ nên với $\forall m > 0$, phương trình $g(x) = m$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Vậy với mọi giá trị dương của tham số m phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt

Nhận xét:

Một số bài toán sau quá trình biến đổi (có lập m) thì hàm số $f(x)$ nhận được tương đối phức tạp (Việc tính đạo hàm và xét dấu đạo hàm tương đối khó khăn). Khi đó để có thể giải quyết bài toán theo hướng dùng đạo hàm một cách đơn giản ngắn gọn hơn, ta cần xem xét đặt ẩn phụ một cách thích hợp để chuyển sang xét hàm số khác đơn giản hơn với biến vừa đặt. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5⁷: (Câu III.2 đề thi học sinh giỏi tỉnh Thanh hóa 2016-2017)

Tìm các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \log_3^2(x+7) + (x-3)\log_3(x+7) + x - 4 \geq 0 \\ mx(x+1+2\sqrt{x+2}) + 27m \leq x + \sqrt{x+2} \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} \log_3^2(x+7) + (x-3)\log_3(x+7) + x - 4 \geq 0 & (1) \\ mx(x+1+2\sqrt{x+2}) + 27m \leq x + \sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq -2$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow [\log_3(x+7) + 1][\log_3(x+7) + x - 4] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \log_3(x+7) + x - 4 \geq 0 \quad (3) \quad (\text{Do } \log_3(x+7) + 1 > 0, \forall x \geq -2) \end{aligned}$$

⁶ Ví dụ 4: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [5].

⁷ Ví dụ 5: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [6].

Xét hàm số $f(x) = \log_3(x+7) + x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+7)\ln 3} + 1 > 0, \forall x \geq -2$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$. Do đó $(3) \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2$.

Đặt $t = x + \sqrt{x+2} \ (t \geq 4 \text{ do } x \geq 2) \Rightarrow t^2 = x^2 + x + 2x\sqrt{x+2} + 2$.

Bất phương trình (2) biểu thị theo t là $m(t^2 + 25) \leq t \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{t^2 + 25}$.

Đặt $g(t) = \frac{t}{t^2 + 25} \Rightarrow g(t) \leq \frac{t}{2\sqrt{t^2 \cdot 25}} = \frac{1}{10}$, dấu "=" xảy ra khi $t = 5$.

Suy ra $\max_{t \in [4; +\infty)} g(t) = g(5) = \frac{1}{10}$.

Yêu cầu của bài toán khi đó trở thành tìm m để bất phương trình

$m \leq \frac{t}{t^2 + 25}$ có nghiệm trên nửa khoảng $[4; +\infty)$.

Ta có $m \leq g(t)$ có nghiệm $t \in [4; +\infty) \Leftrightarrow \max_{t \in [4; +\infty)} g(t) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{10}$. Vậy $m \leq \frac{1}{10}$.

Ví dụ 6⁸: (Câu II.2 khối A năm 2007)

Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$$

Lời giải: Điều kiện: $x \geq 1$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = m$ (1).

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x+1}} \in [0; 1)$. Khi đó (1) trở thành $-3t^2 + 2t = m$ (2)

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$ trên nửa đoạn $[0; 1)$

Ta có $f'(t) = -6t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{3}$	-1

⁸ Ví dụ 6: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [5].

Do đó phương trình đã cho có nghiệm thực (thỏa mãn $x \geq 1$) khi và chỉ khi
 phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 1] \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{3}$

Nhận xét: Trong ví dụ này sau khi biến đổi phương trình (1) ta có thể làm
 như các ví dụ trên (tức là đặt $f(x) = -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ nhưng rõ ràng là hàm số
 $f(x)$ khi đó tương đối phức tạp. Vì thế việc đặt ẩn phụ để đơn giản hóa $f(x)$ là
 điều hợp lí.

- Đối với các bài toán chứa tham số: Khi đặt ẩn phụ ta phải chọn điều kiện
 nghiệm ngặt cho ẩn phụ. Khi đó ta mới xét được một hàm số xác định trên một
 miền xác định của nó. Từ đó mới tìm được điều kiện để tham số thỏa mãn yêu
 cầu đã cho của đề bài.

- Việc lựa chọn ẩn phụ như trên cũng không bắt buộc, ta có thể đặt như sau:

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} > 0$, tuy nhiên lúc đó điều kiện của ẩn phụ sẽ thay đổi theo
 $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1 \Rightarrow t \in [1; +\infty)$ Từ đó ta lại được một hàm số mới tập xác định
 tương ứng.

Ví dụ 7⁹: (Câu V – khối B năm 2004)

Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

Lời giải:

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$.

Ta có $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \geq 0; t = 0$ khi $x = 0$;

$t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}; t = \sqrt{2}$ khi $x = \pm 1$

Suy ra tập giá trị của t là $[0; \sqrt{2}]$ (t liên tục trên đoạn $[-1; 1]$).

Phương trình đã cho trở thành: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m$ (*)

Xét $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}; 0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Ta có $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$.

Phương trình đã cho có nghiệm x khi và chỉ khi phương trình (*) có
 nghiệm t thuộc $[0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow \min_{[0; \sqrt{2}]} f(t) \leq m \leq \max_{[0; \sqrt{2}]} f(t)$.

⁹ Ví dụ 7: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [5].

Ta có $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2} \leq 0, \forall t \in [0; \sqrt{2}] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$.

Suy ra: $\min_{[0; \sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$; $\max_{[0; \sqrt{2}]} f(t) = f(0) = 1$

Vậy giá trị cần tìm là: $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$.

Nhận xét:

• Trong bài này ta đã linh hoạt trong việc đánh giá, nhận xét để tìm ra tập giá trị của biến t . Cách làm này trong một số tình huống nên được phát huy vì nó có thể nhanh gọn hơn việc dùng đạo hàm khảo sát hàm số. Tuy nhiên cũng giống như nhận xét trong ví dụ 2, cách làm này không phải lúc nào cũng thực hiện được. Vì vậy cách dùng đạo hàm vẫn là tổng quát nhất.

• Đối với các bài toán về Hệ PT chứa tham số thì bước đầu ta phải vận dụng các phương pháp cơ bản để giải Hệ PT (như phương pháp: Biến đổi tương đương; thế; đặt ẩn phụ; dùng hàm số; đánh giá...). Rồi sau đó cũng quy về các bài toán PT có chứa tham số như trên. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 8¹⁰: (Câu V- khối D năm 2011)

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} 2x^3 = (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x^2 - x)(2x - y) = m \\ (x^2 - x) + (2x - y) = 1 - 2m \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 - x, u \geq -\frac{1}{4}; v = 2x - y$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} uv = m \\ u + v = 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (2m - 1)u + m = 0(1) \\ v = 1 - 2m - u \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thỏa mãn $u \geq -\frac{1}{4}$

Với $u \geq -\frac{1}{4}$, ta có: (1) $\Leftrightarrow m(2u + 1) = -u^2 + u \Leftrightarrow m = \frac{-u^2 + u}{2u + 1}$

Xét hàm số $f(u) = \frac{-u^2 + u}{2u + 1}$; với $u \geq -\frac{1}{4}$; ta có:

¹⁰ Ví dụ 8: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [5].

$$f'(u) = \frac{2u^2 + 2u - 1}{(2u + 1)^2}; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Bảng biến thiên:

u	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$f'(u)$		+	0 -
$f(u)$			

$-\frac{5}{8}$ $\nearrow$ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ $\searrow$ $-\infty$

Suy ra giá trị cần tìm là: $m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 9¹¹: (HSG - Nghệ An năm học 2011 — 2012)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + m = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

Ta có hệ:
$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t, t \in [-2; 2]$

$\Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12t = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in (-2; 2)$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-2; 2]$ (3)

Ta có x và $y-2$ cùng thuộc đoạn $[-2; 2]$ và $f(x) = f(y-2)$ nên kết hợp (3) suy ra $x = y-2$

Thay vào (2) ta có phương trình $3\sqrt{4-x^2} - 4x^2 = m$ (4)

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm x thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Đặt $g(x) = 3\sqrt{4-x^2} - 4x^2, x \in [-2; 2]$

¹¹ Ví dụ 9: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [6].

$$g'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{4-x^2}} - 8x = -x \left(\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} + 8 \right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad g(0) = 6; g(-2) = g(2) = -16$$

$$\min_{x \in [-2; 2]} g(x) = -16; \max_{x \in [-2; 2]} g(x) = 6.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-16 \leq m \leq 6$.

Đối với các bài toán về BPT chứa tham số thì phương pháp cơ bản cũng tương tự như các bài toán về PT chứa tham số như trên. Tuy nhiên ta cần bám sát và vận dụng các mệnh đề: MD3, MD4, MD5, MD6 trong phần kiến thức vận dụng. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 10¹²: (HSG - Thanh Hóa năm học 2009 - 2010)

Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{(x+4)(6-x)} + x^2 - 2x \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 6]$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{(x+4)(6-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 24} = \sqrt{25 - (x-1)^2} \Rightarrow 0 \leq t \leq 5$$

$$t^2 = -x^2 + 2x + 24 \Rightarrow x^2 - 2x = 24 - t^2$$

Bất phương trình trở thành: $t + 24 - t^2 \geq m; t \in [0; 5]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 1 + 24$ trên đoạn $[0; 5]$

Ta có bảng biến thiên :

t	0	$\frac{1}{2}$	5
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	24	$\frac{97}{4}$	4

Từ đó suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 6] \Leftrightarrow m \leq \min_{[0; 5]} f(x) = 4$

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $m \leq 4$

-Cũng giống như các ví dụ về PT chứa tham số. Trong phần BPT chứa tham số thì hướng giải chủ đạo cũng là tìm cách đặt ẩn phụ để đơn giản hóa bài toán, sau đó dùng đạo hàm. Tuy nhiên trong một số trường hợp thì vẫn rất cần sự linh hoạt trong cách giải.

¹² Ví dụ 10: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [6].

Ví dụ 11¹³: (HSG - Nghệ An năm học 2010 – 2011)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình:

$$\sqrt{(m+2)x - m} \geq |x+1| \text{ có nghiệm thuộc đoạn } [-2; 2]$$

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với bpt

$$(m+2)x - m \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow m(x-1) \geq x^2 + 1 (*)$$

Nhận thấy $x=1$ không nghiệm đúng bất phương trình (*)

Với $x \in [-2; 1)$. Ta có bpt (*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (1)

Với $x \in (1; 2]$. Ta có bpt (*) $\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (2)

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, với $x \in [-2; 1) \cup (1; 2]$

Có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ (loại)

Bảng biến thiên:

x	-2	$1 - \sqrt{2}$	1	2
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\frac{5}{3}$	$2 - 2\sqrt{2}$	$+\infty$	5

Từ bảng biến thiên suy ra:

Bpt (*) có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2] \Leftrightarrow$ hoặc bpt (1) có nghiệm thuộc

$$[-2; 1) \text{ hoặc bpt (2) có nghiệm thuộc } (1; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 - 2\sqrt{2} \\ m \geq 5 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}] \cup [5; +\infty)$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Đối với các bài toán về Hệ bất phương trình chứa tham số thì thông thường trọng hệ sẽ có một Bất PT không chứa tham số và có thể giải được. Rồi sau đó cũng quy về các bài toán Bất PT chứa tham số. Ta xét ví dụ sau:

¹³ Ví dụ 11: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [6].

Ví dụ 12¹⁴: (HSG – Thanh Hóa năm học 2012-2013)

Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} x^3 - mx + 2 \leq 0 & (1) \\ 4^x - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} - 4^{\sqrt{x}+1} \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 0$

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} \leq 0$

$$\Leftrightarrow (2^x + 2^{\sqrt{x}})(2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}) \leq 0 \Leftrightarrow 2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4. \text{ Đổi chiều ĐK được } 0 \leq x \leq 4 (*)$$

Do đó: Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x^3 + 3mx + 2 \geq 0$ có nghiệm $x \in [0; 4]$

Với $x=0$ thì (1) không thỏa mãn

Với $0 < x \leq 4$: (1) có nghiệm thỏa mãn $x \in (0; 4] \Leftrightarrow m \geq x^2 + \frac{2}{x} = g(x)$ có nghiệm $x \in (0; 4] \Leftrightarrow m \geq \min_{(0; 4]} g(x)$

Xét $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x \in (0; 4]$. Có $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	3	$\frac{33}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min_{(0; 4]} g(x) = g(1) = 3$

Vậy $m \geq 3$ là giá trị cần tìm

¹⁴ Ví dụ 12: Tác giả tham khảo nguyên văn từ TLTK số [6].

2.3.3. Bài tập tương tự:

BÀI TẬP 1: Cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

BÀI TẬP 2: Tìm a để phương trình $\frac{3x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2x - 1} + ax$ có nghiệm duy nhất

BÀI TẬP 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực $2\sqrt{x+1} = x + m$

BÀI TẬP 4: Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm dương:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$$

BÀI TẬP 5: Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$$
 có nghiệm

BÀI TẬP 6: Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$$

BÀI TẬP 7: Tìm m để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \geq 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình

$$a \cdot 2^{x+1} + (2a+1)(3 - \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x < 0$$
 nghiệm đúng với mọi $x \leq 0$

BÀI TẬP 9: Tìm m để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 & (1) \\ x^3 + 3mx + 1 < 0 & (2) \end{cases}$$
 (m- tham số)

BÀI TẬP 10: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^3 + 1} \geq m(x^2 + 1) + (1 - m)x + 1$$
 có ít nhất một nghiệm

2.4. Kết quả đạt được

Sau khi được rèn luyện hệ thống kiến thức trên, đa số các em học sinh đều tỏ ra mạnh dạn, tự tin và linh hoạt hơn rất nhiều trong việc dùng đạo hàm để giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số. Bên cạnh đó, những em học sinh khá, giỏi khác cũng nhanh chóng nắm bắt được phương pháp và biết vận dụng các ví dụ tương tự.

Nhiều học sinh tỏ ra rất hứng thú với ứng dụng này của đạo hàm. Bởi vì phương pháp này không chỉ nhanh gọn, hiệu quả mà nó còn có tính tổng hợp rất

cao, đó là dùng đạo hàm để tìm cực trị, dùng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số,...và đó cũng là những bài toán hết sức quen thuộc và cơ bản về ứng dụng của đạo hàm trong phân môn Giải tích 12.

III. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận:

Các kiến thức về đạo hàm để giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số là một yêu cầu quan trọng cả về kiến thức lẫn kỹ năng đối với các học sinh ôn thi đại học và các học sinh trong đội tuyển HSG các cấp. Khi dạy chủ đề này giáo viên cần chú ý ngoài việc hình thành cho học sinh một tư duy thuật toán thì còn cần làm cho học sinh có ý thức phân tích nhận dạng bài toán, thói quen đặt ra nhu cầu giải quyết bài toán theo nhiều hướng khác nhau và cuối cùng phải biết tổng hợp lại bằng các đánh giá, nhận xét sâu sắc. Từ đó rút ra những kết luận súc tích nhất.

Cái hay của cách giải này là ngoài việc sử dụng đạo hàm thì còn phải vận dụng linh hoạt các mệnh đề (phần kiến thức vận dụng). Đồng thời với phương pháp mới này (cũng nằm trong xu thế ra đề học sinh giỏi hiện nay là tăng cường ứng dụng đạo hàm, hàm số vào giải toán) học sinh đã hoàn toàn rũ bỏ được các phương pháp đại số kinh điển trước đây.

Do trình độ bản thân còn hạn chế nên phần nội dung chính của đề tài này chưa thể khai thác hết tất cả các khía cạnh của việc ứng dụng đạo hàm để giải các PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số. Ngoài ra khi triển khai áp dụng các giáo viên có thể sắp xếp lại các ví dụ theo một trình tự logic khác và bổ sung thêm các ví dụ hoặc nhận xét mới để bài giảng đạt hiệu quả cao hơn. Chính vì vậy tác giả rất mong nhận được sự chia sẻ và góp ý của các bạn đồng nghiệp.

3.2. Kiến nghị:

Các nhà trường cần triển khai các sáng kiến kinh nghiệm đã đạt giải cấp tỉnh để giáo viên có thể áp dụng vào giảng dạy cho học sinh. Từ đó đưa ra được phương pháp hay hình thành cho học sinh tư duy tích cực trong việc học môn toán nói riêng và hiệu quả học tập nói chung.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1].Huỳnh Công Thái, Phương pháp ứng dụng đạo hàm để giải các bài toán luyện thi đại học tập 1, NXB Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.
- [2].Trần Phương, Tuyển tập các chuyên đề hàm số tập 1, NXB Tri thức.
- [3].Các bài toán chọn lọc 45 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, NXB Giáo dục Việt Nam. (ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ).
- [4].Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- [5]. Đề thi và đáp án thi tuyển sinh vào Đại học môn Toán các khối A, B, D từ năm 2002 đến năm 2012 và đề thi THPT Quốc gia năm 2016 do Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- [6]. Đề thi và đáp án thi học sinh giỏi các tỉnh môn Toán từ năm 2002 đến năm 2017 đưa lên các diễn đàn Toán học.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 23 tháng 05 năm 2017

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
minh viết, không sao chép nội dung của
người khác.

(Ký và ghi rõ họ tên)