ĐỀ 82

HSG TOÁN 9 THÁI NGUYÊN 2023-2024

Bài 1 (3 điểm) Cho $a-b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = a^3-b^3-6ab+2022$$

Bài 2 (6 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}+\frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\frac{4x}{x-9}\right).\frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

a. Rút gọn biểu thức Q

b. Tìm x biết Q = 36

c. Tìm x thỏa mãn $|Q|>Q$

Bài 3 (4 điểm) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+4m-m^2=0$ (m là tham số)

a. Giải phương trình với m = 1

b. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

c. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2+2(m+1)x_2-4=0$$

Bài 4 (5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc với K trên các cạnh AB, AC.

a. Chứng minh $\widehat{AEF}$ = $\widehat{ACB}$. Từ đó chỉ ra tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.

b. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Chứng minh rằng $IK^2=IB.IC$

c. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại điểm J (J ≠ A). Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE. Chứng minh rằng ba điểm D, K, J thẳng hàng.

Bài 5 (2 điểm)

a. Chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì $(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$ chia hết cho 35.

b. Cho m, n, p là ba số nguyên dương thỏa mãn mn = p(m + n) và m, p là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mnp là số chính phương.

-----------HẾT------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (3 điểm) Cho $a-b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = a^3-b^3-6ab+2022$$

Lời giải

Ta có $a-b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}=\sqrt{(2+\sqrt{7})^2}-\sqrt{7}=2$

P = $a^3-b^3-6ab+2022=(a-b)\left[(a-b)^2+3ab\right]-6ab+2022$

$= (a-b)^3+3ab(a-b)-6ab+2022$

$= 2^3+3ab.2-6ab+2022=2030$

Vậy P = 2030

Bài 2 (6 điểm) Cho biểu thức Q = $\left(\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{4x}{x-9}\right).\dfrac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

a. Rút gọn biểu thức Q

b. Tìm x biết Q = 36

c. Tìm x thỏa mãn $|Q|>Q$

Lời giải

a) ĐKXĐ $x\neq 9$; $x\neq 4$; $x\geq 0$

Q = $\left(\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{4x}{x-9}\right).\dfrac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

$=\left(\dfrac{(3+\sqrt{x})^2-(3-\sqrt{x})^2+4x}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}\right).\dfrac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$

$=\left(\dfrac{12x+4x}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}\right).\dfrac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}=\left(\dfrac{4\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}\right).\dfrac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$

$=\dfrac{4x}{\sqrt{x}-2}$

b) Để Q = 36 $\Leftrightarrow \dfrac{4x}{\sqrt{x}-2} = 36$

$\Rightarrow 4x = 36(\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow x-9\sqrt{x}+18=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-3=0\\ \sqrt{x}-6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9(KTM)\\ x=36(TM)\end{array}\right.$

Vậy $x=36$ thì Q = 36

c) Để $|Q|>Q \Rightarrow$ Q < 0 $\Rightarrow \dfrac{4x}{\sqrt{x}-2} < 0$

Vì $x \ge 0$ nên $\sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \Rightarrow 0 \le x < 4$

Vậy $0 \le x < 4$ thì $|Q| > Q$

Bài 3 (4 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - m^2 = 0$ (m là tham số)

a. Giải phương trình với m = 1

b. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luông có hai nghiệm phân biệt

c. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + 2(m+1)x_2 - 4 = 0$$

Lời giải

a) Thay m =1 vào phương trình ta được: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

b) Ta có:

$\Delta' = (m+1)^2 - (4m - m^2) = 2m^2 - 2m + 1 = m^2 + (m-1)^2 > 0$ với mọi m

c) Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 với mọi m

Theo đề bài ta có: $x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 4m - m^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - 4m + m^2$

Ta lại có: $x_1^2 + 2(m+1)x_1 - 4 = 0$

$\Rightarrow 2(m+1)x_1 - 4m + m^2 + 2(m+1)x_2 - 4 = 0$

$\Rightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) + m^2 - 4m - 4 = 0$

Theo Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$

$\Rightarrow [2(m+1)]^2 + m^2 - 4m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m(3m+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right.$$

Vậy m = 0 hoặc m = $\dfrac{-4}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 2(m+1)x_2 - 4 = 0$

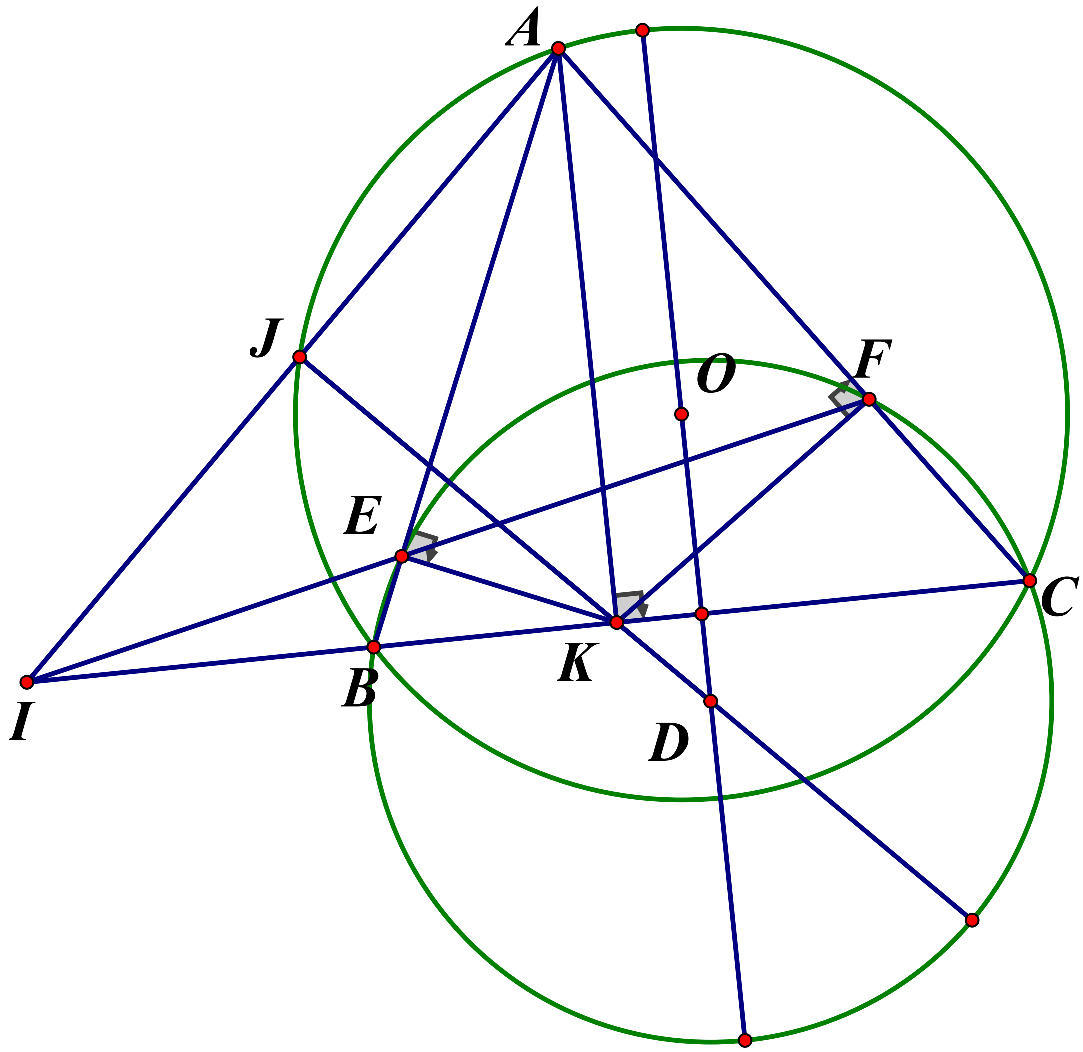
Bài 4 (5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc với K trên các cạnh AB, AC.

a. Chứng minh $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$. Từ đó chỉ ra tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.

b. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Chứng minh rằng $IK^2 = IB.IC$

c. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại điểm J (J ≠ A). Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE. Chứng minh rằng ba điểm D, K, J thẳng hàng.

Lời giải



a. Ta có tứ giác AEKF nội tiếp vì $\widehat{AEK}+\widehat{AFK}=180^0 \Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{AKF}$

Mà $\widehat{AKF}=\widehat{ACK}$ (vì cùng phụ $\widehat{CKF}$) hay $\widehat{AKF}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ACB}$

Xét tứ giác BEFK có $\widehat{AEF}=\widehat{ACB}$ mà $\widehat{AEF}+\widehat{BEF}=180^0$

$\Rightarrow \widehat{BEF}+\widehat{ACB}=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác BEFK là tứ giác nội tiếp

b. Do tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn nên

$\Rightarrow \triangle IBF$ $\triangle IEC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{IB}{IE}=\dfrac{IF}{IC} \Rightarrow IB.IC=IF.IE$

(1)

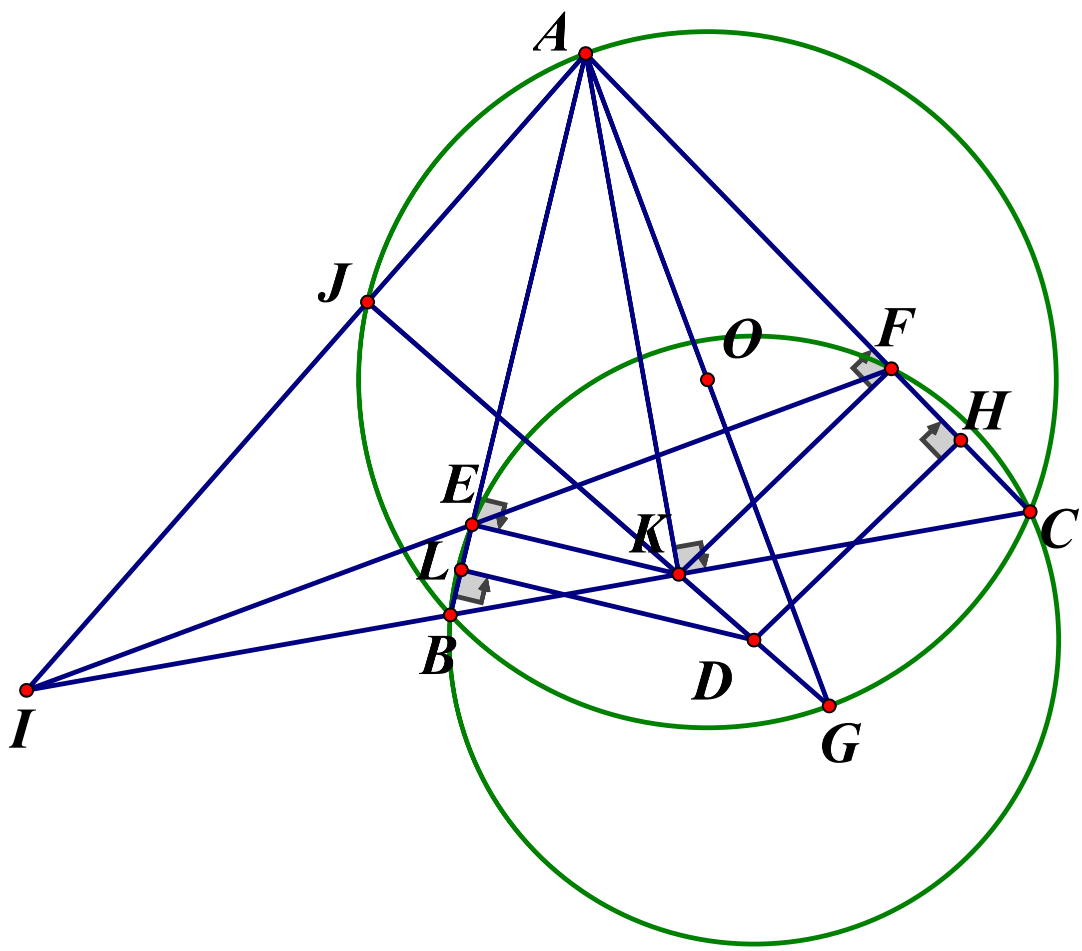
Xét $\triangle IEK$ *và* $\triangle IKF$ có $\begin{cases} \hat{I}\ chung \\ \widehat{IKE}=\widehat{BAK}\ (phụ\ góc\ ABC) \\ \widehat{BAL}=\widehat{IFK}\ (tứ\ giác\ AEKF\ nội\ tiếp) \end{cases}$

Nên $\triangle IEK$ $\triangle IKF$

Suy ra $\frac{IK}{IF} = \frac{IE}{IK} \Rightarrow$ IK.IK = IE.IF (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IK^2 = IB.IC$

c.



Cách 1: Thep ý b) ta có KJ ⊥ AI

Kẻ đường kính AG của đường tròn (O)

Gọi H, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các cạnh AB, AC

Gọi D_1 là giao điểm của LD và KG.

Do $IK^2 = IB.IC$ mà $\widehat{AKI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AJK} = \widehat{AJG} = ¿\ 90^0$. Suy ra ba điểm G, K, J thẳng hàng

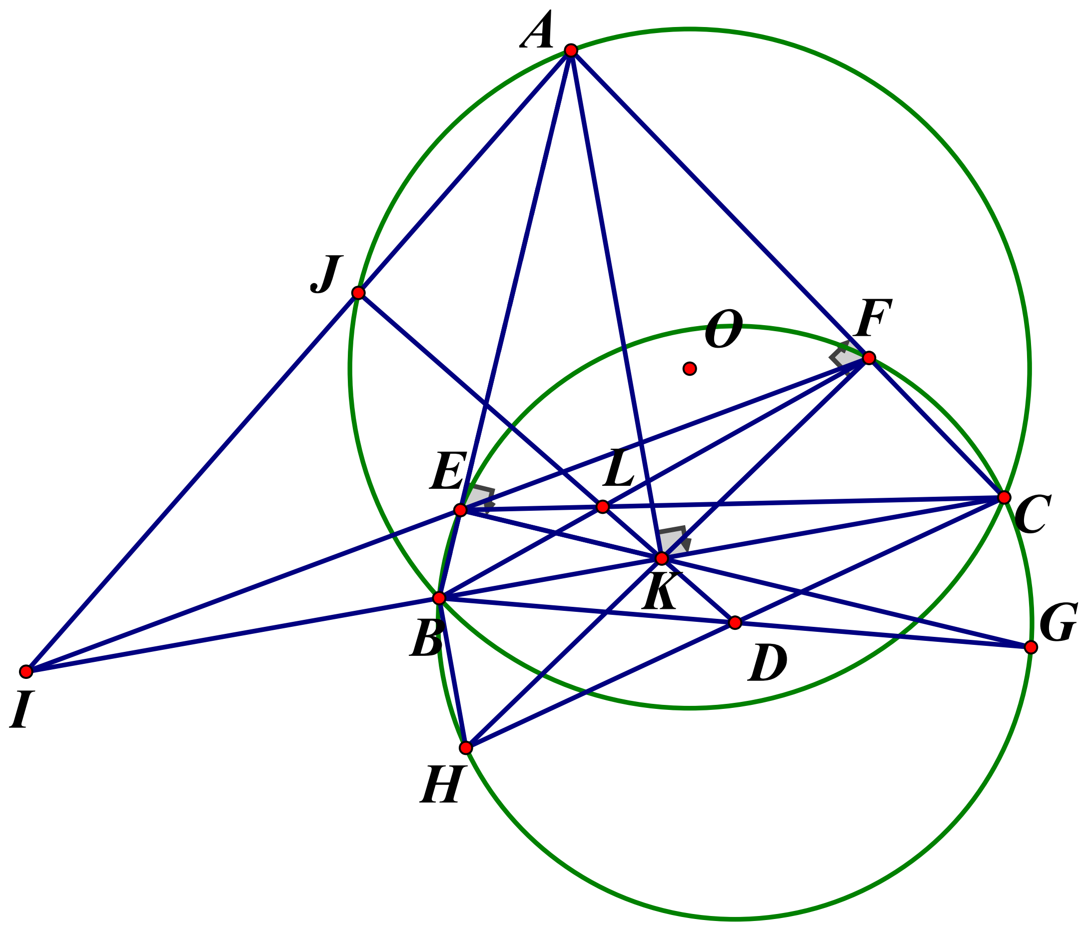
Do D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE nên ta có 1 = $\frac{EL}{LB}$ = $\frac{FH}{HC}$

Mặt khác LD_1//GB $\Rightarrow \frac{FH}{HC} = \frac{EL}{LB} = \frac{KD_1}{D_1G} \Rightarrow HD_1$//CG $\Rightarrow HD_1 \perp$CF.

Suy ra $D_1 \equiv$ D hay ba điểm G, K, D thẳng hàng

Vậy bón điểm G, D, K, J thẳng hàng

Cách 2



Gọi G là giao điểm của EK và đường tròn (D).

Gọi H là giao điểm của KF và đường tròn (D).

Suy ra $\widehat{BEG}=\widehat{CFH}=¿$ 90^0 nên BG, CH là đường kính của đường tròn (D).

Ta có 6 điểm H , B , E , F ,C , G cùng nằm trên đường tròn (D) với các điểm D , K , L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (BG,CH), (BC,HF), (BF, CE)

Khi đó theo định lý Pascal ta có ba điểm D , K , L thẳng hàng.

Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác nội tiếp BEFC ta có $\overline{D,K,L}$vuông góc AI

Mà KJ ⊥ AI nên ba điểm D, K, J thẳng hàng.

Bài 5 (2 điểm)

a. Chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì $\left(a^4-1\right)\left(a^4+15a^2+1\right)$ chia hết cho 35.

b. Cho m, n, p là ba số nguyên dương thỏa mãn mn = p(m + n) và m, p là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mnp là số chính phương.

Lời giải

a. Ta có a ≡ 1(mod 5) ⇒ a^4 ≡ 1(mod 5) ⇒ $a^4-1 \vdots 5$

a ≡ 2(mod 5) ⇒ a^4 ≡ 1(mod 5) ⇒ $a^4-1 \vdots 5$

a ≡ 3(mod 5) ⇒ a^4 ≡ 1(mod 5) ⇒ $a^4-1 \vdots 5$

a ≡ 4(mod 5) ⇒ a^4 ≡ 1(mod 5) ⇒ $a^4-1 \vdots 5$

⇒ $a^4-1 \vdots 5$ với mọi a không chia hết cho 5 (1)

Lại có a ≡ 1(mod 7) ⇒ a^6 ≡ 1(mod 7) ⇒ $a^6-1 \vdots 7$

a ≡ 2(mod 7) ⇒ a^6 ≡ 1(mod 7) ⇒ $a^6-1 \vdots 7$

a ≡ 3(mod 7) ⇒ a^6 ≡ 1(mod 7) ⇒ $a^6-1 \vdots 7$

a ≡ 4(mod 7) ⇒ a^6 ≡ 1(mod 7) ⇒ $a^6-1 \vdots 7$

a ≡ 5(mod 7) ⇒ a^6 ≡ 1(mod 7) ⇒ $a^6-1 \vdots 7$

a ≡ 6(mod 7) ⇒ a^6 ≡ 1(mod 7) ⇒ $a^6-1 \vdots 7$

⇒ $a^6-1 \vdots 7$ ⇒ $\left(a^6-1\right)\left(a^2+1\right) \vdots 7$ với mọi a không chia hết cho 7

⇒ $\left(a^6-1\right)\left(a^2+1\right)+14ab\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right) \vdots 7$

Hay $(a^4-1)(a^4+15a+1) \vdots 7$ (2)

Do (7,5) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra: $(a^4-1)(a^4+15a+1) \vdots$ 35 với mọi a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7

b. Ta có $mn=p(m+n) \Leftrightarrow mn=pm+pn \Leftrightarrow m(n-p)=pn$

Vì (p,m) = 1 nên $\begin{cases} n=m \\ n-p=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2p \\ m=2p \end{cases}$ mà (p,m) = 1

Nên $p=1$. Khi đó $mnp=4$ là số chính phương

-----------HẾT------------