

Chủ đề 3 - Nguyên hàm - Tích phân - Mức độ vận dụng cao

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Giả sử hàm số f có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(2)=2$ và $f(2-x)+x^2 f''(x)=2x$ vớimọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị tích phân $\int_0^2 x f'(x) dx$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. *C. $\frac{4}{3}$. D. 1.

Lời giảiTa có: $f(2-x)+x^2 f''(x)=2x \Rightarrow f(2)=0$ Lại có: $\int_0^2 f(2-x) dx + \int_0^2 x^2 f''(x) dx = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$

$$I_1 = \int_0^2 f(2-x) dx$$

Xét

Đặt $2-x=t \Rightarrow dx = -dt$ Với $x=0 \Rightarrow t=2$ $x=2 \Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I_1 = - \int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = (xf(x)) \Big|_0^2 - \int_0^2 xf'(x) dx = f(2) - \int_0^2 xf'(x) dx = - \int_0^2 xf'(x) dx$$

$$I_2 = \int_0^2 x^2 f''(x) dx$$

Xét

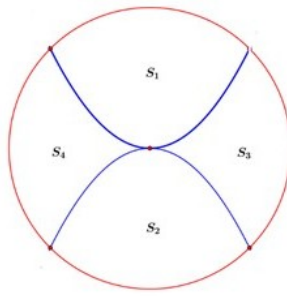
$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f'(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = (x^2 f'(x)) \Big|_0^2 - \int_0^2 2xf'(x) dx = 4f'(2) - 2 \int_0^2 xf'(x) dx = 8 - 2 \int_0^2 xf'(x) dx$$

$$- \int_0^2 xf'(x) dx + 8 - 2 \int_0^2 xf'(x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^2 xf'(x) dx = \frac{4}{3}$$

Vậy

Câu 2. Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định bồn hoa thành bốn phần bởi 2 đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng với nhau qua tâm O (như hình vẽ).



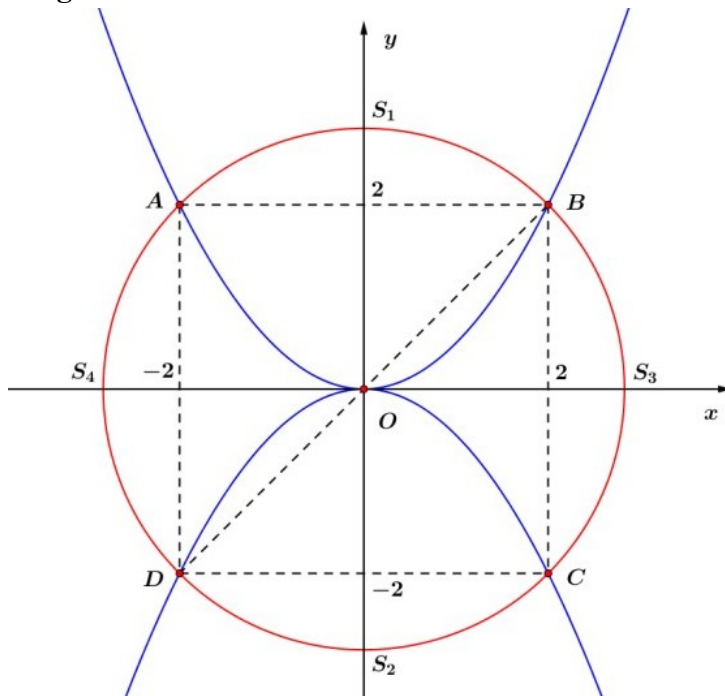
Hai đường parabol cắt đường tròn tại 4 điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$. Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ. Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng/ m^2 , kinh phí trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

*A. 3.270.000 đồng

B. 5.790.000 đồng.

C. 3.000.000 đồng. D 6.060.000 đồng.

Lời giải



• Ta có: vì $ABCD$ là hình vuông cạnh 4 nên $BD = BC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; $OB = 2\sqrt{2}$ và $A(-2; 2), B(2; 2)$

• Phương trình đường tròn tâm O có bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ là $(C): x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow y = \sqrt{8 - x^2}$

• Parabol đi qua hai điểm $A(-2; 2), B(2; 2)$ và đỉnh ngay gốc tọa độ nên suy ra $(P): y = \frac{x^2}{2}$

Từ đồ thị ta có được S_1 là diện tích giới hạn bởi hai đồ thị $y = \sqrt{8 - x^2}$ và $(P): y = \frac{x^2}{2}$ cùng với hai đường thẳng $x = -2; x = 2$

Từ đó suy ra $S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \frac{8}{3}$; Đặt $x = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt$

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos t dt - \frac{8}{3} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 8 \cos^2 t dt - \frac{8}{3} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 8 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$$

Suy ra

Mặt khác: $S_1 = S_2; S_3 = S_4$ nên suy ra
$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 2S_1 = 2\left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 4\pi + \frac{8}{3}(m^2) \\ S_3 + S_4 = S_{(C)} - (S_1 + S_2) = 8\pi - 2\left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 4\pi - \frac{8}{3}(m^2) \end{cases}$$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là: $\left(4\pi + \frac{8}{3}\right) \cdot 150000 + \left(4\pi - \frac{8}{3}\right) \cdot 100000 = 3274926$ đồng.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1 + f^2(x)}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số

$f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}, M = \sqrt{3}$.

B. $m = \frac{5}{2}, M = 3$.

C. $m = \sqrt{3}, M = 2\sqrt{2}$.

*D. $m = \frac{\sqrt{21}}{2}, M = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1 + f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \cos x$$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int \cos x dx = \sin x + C_1 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1 + f^2(x)} \Rightarrow t^2 = 1 + f^2(x) \Rightarrow t dt = f(x) \cdot f'(x) dx$.

Suy ra $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + C_2 = \sqrt{1 + f^2(x)} + C_2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + C$. Thay $x = 0$ vào ta có: $\sqrt{1 + 3} = C \Rightarrow C = 2$

Hay $\sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + 2$.

$$\Leftrightarrow f^2(x) = (\sin x + 2)^2 - 1 = \sin^2 x + 4 \sin x + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$$

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta đi xét hàm số $g(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 3}, t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$g'(t) = \frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 4t + 3}} > 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ do đó } g(t) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2} = \min_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = m$$

$$\max_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g(1) = 2\sqrt{2} = \max_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = M$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0; f'(1) = 1$ và $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$. Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{15}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $-\frac{1}{10}$. *D. $-\frac{1}{17}$.

Lời giải

Ta có: $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 10f(x) dx - \int_0^1 5xf'(x) dx + \int_0^1 x^2 f''(x) dx = 0$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

Đặt $I = \int_0^1 f(x) dx$, theo phương pháp tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{cases} \int_0^1 xf'(x) dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = -I \\ \int_0^1 x^2 f''(x) dx = x^2 f'(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 xf'(x) dx = 1 - 2(-I) = 1 + 2I \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10I - 5(-I) + 1 + 2I = 0 \Leftrightarrow I = -\frac{1}{17}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{17}.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và thỏa mãn $f(0) = 3$ và $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2$,

$\forall x \in R$. Tích phân $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx$ bằng

*A. $-\frac{10}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$. C. $-\frac{11}{3}$. D. $-\frac{7}{3}$.

Lời giải

$$I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx$$

• Ta có: $I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx$, ta sử dụng phương pháp từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x) dx$$

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2 \text{ thế } x=0 \text{ vào ta có: } f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = -1 \quad (1)$$

• Từ đó ta tích phân 2 vế từ 0 đến 2

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(2-x) dx$$

• Mặt khác ta lại có:

Nên suy ra $\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = 2 \int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$ (2)

• Từ (1) và (2) suy ra $I = \int_0^2 x \cdot f'(x)dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x)dx = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$ với mọi x . Tính $f'(0)$.

A. 1.

*B. -1.

C. e .

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Ta có: $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) + xf(x) = e^{-x}$

$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (x+1)e^x f(x) = 1$

$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (xe^x)' f(x) = 1$

$\Leftrightarrow (xe^x f(x))' = 1$

$\Leftrightarrow xe^x f(x) = \int dx = x + C$ (*)

Với $x=0$

+) Thay vào biểu thức ban đầu ta có: $0 \cdot f'(0) + (0+1)f(0) = e^{-0} = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$

+) Thay vào (*), ta có: $C=0$.

Khi đó: $xe^x f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{ khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{ khi } x = 0 \end{cases}$

Suy ra: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(1)=2$ và

$f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x), \forall x \in [1;3]$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. $1 + \ln 3$.

B. $\frac{2}{3} - \ln 3$.

*C. $\frac{2}{3} + \ln 3$.

D. $1 - \ln 3$.

Lời giải

• Xét $f(x) \neq 0$: $f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - (x+1)f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{f(x)} \right]' = 2x$

$\Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{x+1}{f(x)} = x^2 + C$

$f(1)=2 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = x^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

Xét: $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

• $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{x+1}{x^2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{1}{3} \right) - (\ln 1 - 1) = \ln 3 + \frac{2}{3}$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x) = f(x) + e^x \cdot \cos 2021x$ và $f(0) = 0$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1; 1]$?

A. 3

B. 1

*C. 1287

D. 4043

Lời giải

Ta có phương trình trên tương đương với

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) + e^x \cdot \cos 2021x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x \cdot \cos 2021x$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) + (-e^{-x}) f(x) = \cos 2021x$$

Đến đây ta nguyên hàm hai vế thu được:

$$\Rightarrow (e^{-x} f(x))' = \cos 2021x \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = \int \cos 2021x dx = \frac{\sin 2021x}{2021} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0 \text{ suy ra } e^{-x} f(x) = \frac{\sin 2021x}{2021} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x \cdot \sin 2021x}{2021}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot \sin 2021x}{2021} = 0 \Leftrightarrow \sin 2021x = 0 \Leftrightarrow 2021x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2021}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [-1; 1] \text{ nên } -1 \leq \frac{k\pi}{2021} \leq 1 \Rightarrow \frac{-2021}{\pi} \leq k \leq \frac{2021}{\pi}$$

Mà do $k \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $k \in \{-643; -642; \dots; 643\}$ như vậy ta kết luận đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 1287 điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1; 1]$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $xf'(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0$. Giá trị

$$\int_0^1 xf(x) dx \text{ bằng}$$

*A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

• Tính $\int_0^1 xf(x) dx$:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Đặt

$$\int_0^1 xf(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} f(0) \cdot 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 x(e^x - 1) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 x(e^x - 1) dx = -\frac{1}{2} \left(xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(e - e - \frac{1}{2} \right) + e^0 \right] = -\frac{1}{4}$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$f'(x) + x(e^{f(x)} + 2) + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0. \text{ Giá trị của } f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ bằng}$$

*A. $\ln 7$.B. $\ln 5$.C. $\ln 6$.D. $\ln 3$.**Lời giải**

$$f'(x) + x + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + xe^{f(x)}(e^{f(x)} + 2) + x = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + x(e^{f(x)} + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-f'(x)e^{f(x)}}{(e^{f(x)} + 1)^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{-f'(x)e^{f(x)}}{(e^{f(x)} + 1)^2} dx = \int x dx \Leftrightarrow \int \frac{-d[e^{f(x)}]}{(e^{f(x)} + 1)^2} = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{e^{f(x)} + 1} = \frac{x^2}{2} + C, (1)$$

Trong (1) cho $x=1 \Rightarrow \frac{1}{e^{f(1)} + 1} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C=0$. Suy ra $\frac{1}{e^{f(x)} + 1} = \frac{x^2}{2}, (2)$

Trong (2) cho $x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{2}\right)} + 1} = \frac{1}{8} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 7$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + 3f(x) = \sin(2x^3 - 3x^2 + x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

thuộc khoảng nào?

A. $(-3; -2)$.B. $(-2; -1)$.*C. $(-1; 1)$.D. $(1; 2)$.**Lời giải**

Cách 1. Từ giả thiết ta có $f^3(1-x) + 3f(1-x) = \sin[2(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + (1-x)]$

$$\Leftrightarrow f^3(1-x) + 3f(1-x) = \sin(-2x^3 + 3x^2 - x) = -\sin(2x^3 - 3x^2 + x)$$

$$\Leftrightarrow f^3(1-x) + 3f(1-x) = -[f^3(x) + 3f(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f^3(1-x) + f^3(x)] + 3[f(1-x) + f(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(1-x) + f(x)] \cdot [f^2(1-x) - f(1-x) \cdot f(x) + f^2(x) + 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow f(1-x) = -f(x)$$

Khi đó $I = \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 f(1-x) dx \quad (1)$

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(1-x) dx = - \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = I \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = -I \Leftrightarrow I = 0$. Vậy $I \in (-1; 1)$.

Cách 2. Do $-1 \leq \sin(2x^3 - 3x^2 + x) \leq 1$ nên $-1 \leq f^3(x) + 3f(x) \leq 1 \Rightarrow -4 < f^3(x) + 3f(x) < 4$.

+ Từ $f^3(x) + 3f(x) > -4 \Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) + 4 > 0 \Leftrightarrow [f(x) + 1][f^2(x) - f(x) + 4] > 0$

$$\Leftrightarrow f(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > -1$$

+ Từ $f^3(x) + 3f(x) < 4 \Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) - 4 < 0 \Leftrightarrow [f(x) - 1][f^2(x) + f(x) + 4] < 0$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1$$

$$\text{Suy ra } -1 < f(x) < 1 \Rightarrow \int_0^1 (-1) dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 1 dx \Rightarrow -1 < \int_0^1 f(x) dx < 1. \text{ Vậy } I \in (-1; 1)$$

Câu 12. Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $(0; \pi)$ và $f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x, \forall x \in (0; \pi)$. Biết $f(\frac{\pi}{2}) = 1, f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{12}(a + b \ln 2 + c\pi\sqrt{3})$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng

*A. -1.

B. 1.

C. 11.

D. -11.

Lời giải

$$f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x \Leftrightarrow f'(x) \sin x - f(x) \cos x = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \sin x - f(x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\sin x} \right]' = \frac{x}{\sin^2 x}$$

Ta có:

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$\text{Hay } \frac{f(x)}{\sin x} = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2} + \ln \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| + C \Leftrightarrow C = 1$$

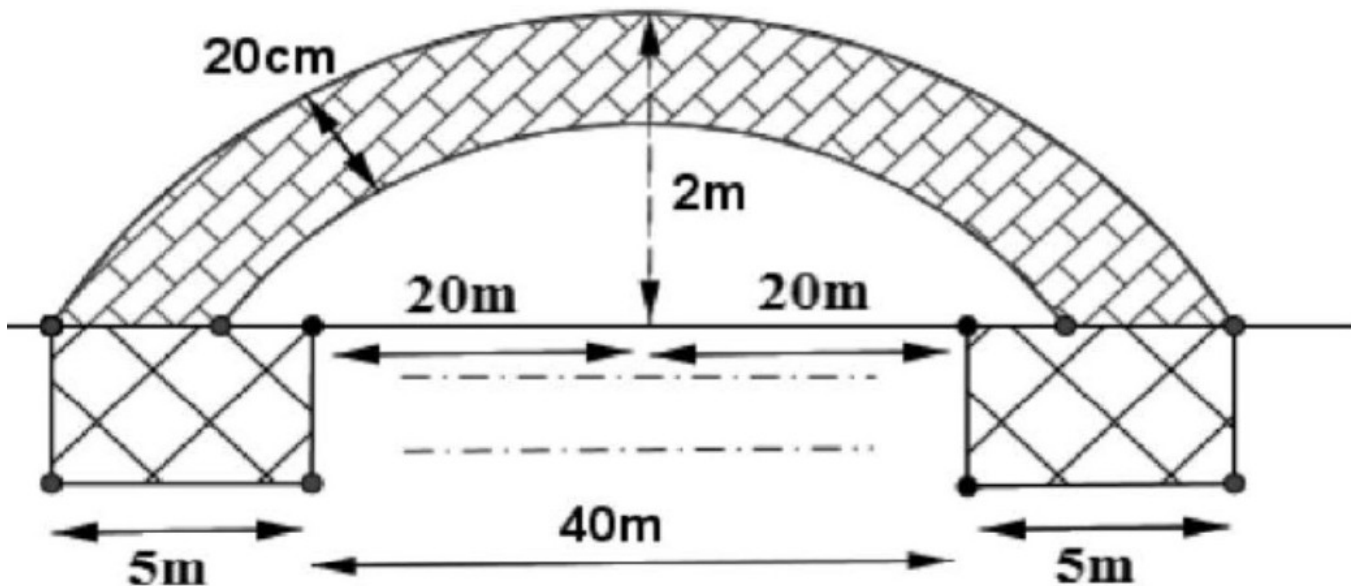
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = -x \cot x + \ln |\sin x| + 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6} + \ln \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| + 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{12}(6 - 6 \ln 2 - \pi\sqrt{3})$$

Do đó

$$\Rightarrow a = 6, b = -6, c = -1, a + b + c = -1$$

Câu 13. Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày và bề rộng của nhịp cầu không đổi là 20cm (mặt cắt của một nhịp cầu được mô phỏng như hình vẽ). Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị).



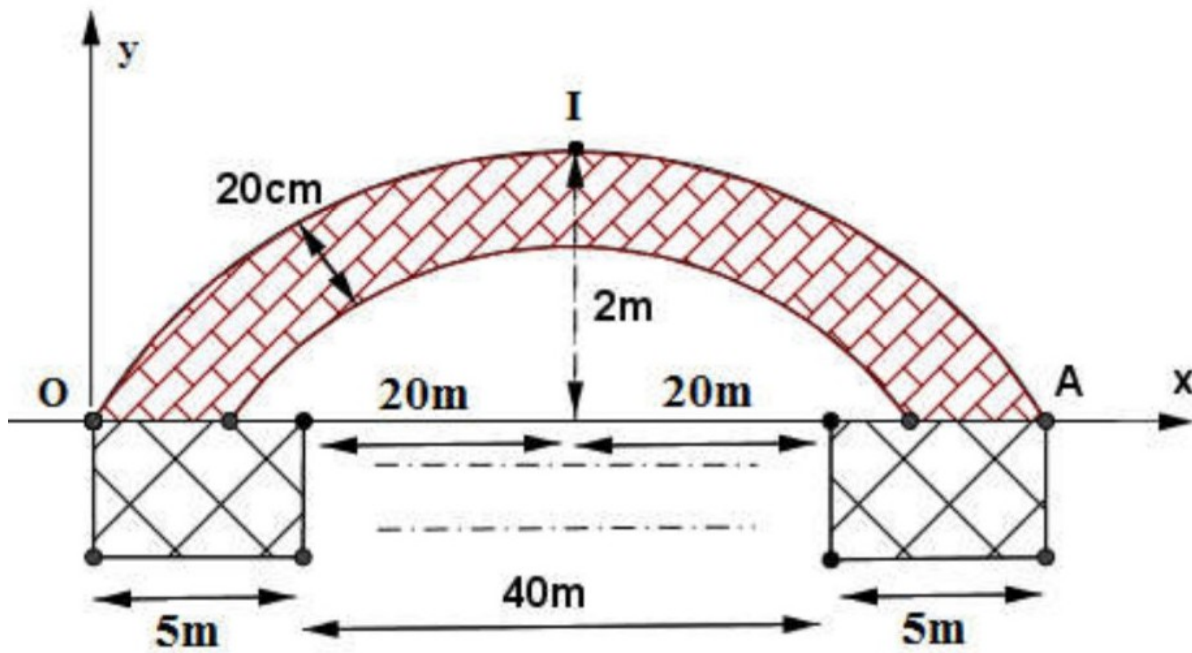
A. $50m^3$.

B. $20m^3$.

C. $100m^3$.

*D. $40m^3$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu (điểm tiếp xúc Parabol trên), đỉnh $I(25;2)$, điểm $A(50;0)$ (điểm tiếp xúc Parabol trên với chân đế).

Gọi Parabol trên có phương trình $(P_1): y_1 = ax^2 + bx$ (do (P) đi qua O).

$\Rightarrow$ Phương trình parabol dưới $(P_2): y_2 = ax^2 + bx - \frac{20}{100} = ax^2 + bx - \frac{1}{5}$.

Ta có (P_1) đi qua $I(25;2)$ và $A(50;0) \Rightarrow (P_1): y_1 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{1}{5}$

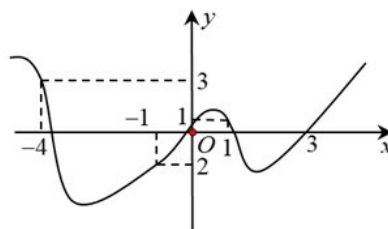
Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = 2S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0;25)$

$$S = 2 \left(\int_0^{25} \left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \right) dx + \int_{25}^{50} \frac{1}{5} dx \right) \approx 9,9m^2$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày $V = S \cdot 0,2 \approx 9,9 \cdot 0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow$ số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu $\approx 2m^3$.

Vậy 10 nhịp cầu 2 bên cần $\approx 40m^3$ bê tông.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Giá lớn nhất của hàm số $g(x) = f(3x) - 3x$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng



*A. $f(-3) + 3$

B. $f(1) - 1$

C. $f(-1) + 3$

D. $f(3) - 3$

Lời giải

$$g'(x) = 3f'(3x) - 3 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x) = 1 \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(3x)$ và $y = 1$

$$f'(3x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ 3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	1
$g'(x)$	-	0	+	0
$g(x)$	$f(-3)+3$		$f(1)-1$	

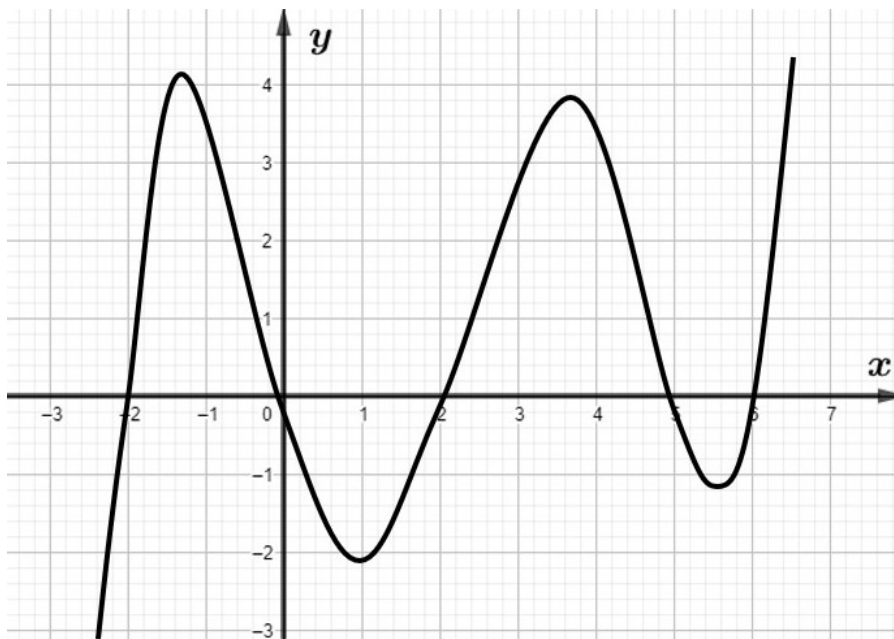
Dựa vào đồ thị ta có

$$\int_{-1}^0 g'(x)dx > \int_0^{\frac{1}{3}} g'(x)dx \Leftrightarrow -g(0)+g(-1) > g\left(\frac{1}{3}\right)-g(0)$$

$$\Leftrightarrow g(-1) > g\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow f(-3)+3 > g(1)-1$$

Giá trị lớn nhất của $y=g(x)$ trên $[-1;1]$ là $f(-3)+3$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là

*A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=5 \\ x=6 \end{cases}$$

Xét

Ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 6]$:

x	-2	0	2	5	6				
y'	0	+	0	-	0	+	0	-	0
y			$f(0)$		$f(5)$				
	$f(-2)$			$f(2)$				$f(6)$	

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x); y = 0; x = 0; x = 2$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x); y = 0; x = 2; x = 5$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x); y = 0; x = 5; x = 6$.

$$S_1 = - \int_0^2 f(x) dx = f(0) - f(2) \quad (2)$$

Khi đó

$$S_2 = \int_2^5 f(x) dx = f(5) - f(2) \quad (2)$$

$$S_3 = - \int_5^6 f(x) dx = f(5) - f(6) \quad (6)$$

Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(5) > f(0)$

$S_1 + S_3 < S_2 \Leftrightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(6)$

Khi đó ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 6]$ như sau:

x	-2	0	2	5	6
y'	0	+	0	-	0
y				$f(5)$	
	$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$		$f(6)$

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm xác định trên $(0; +\infty)$. Biết rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x)(\ln f(x) - 1) + x(f'(x) - 2f(x)) = 0$ và $\ln(f(2)) - \ln(f(1)) = 1$. Giá trị của tích

phân $\int_1^2 xf(x) dx$ nằm trong khoảng nào dưới đây:

A. $(0; 6)$

B. $(6; 12)$

C. $(12; 18)$

*D. $(18; 24)$

Lời giải

Ta có: $f(x)(\ln f(x) - 1) + x(f'(x) - 2f(x)) = 0$

Do $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên ta chia 2 vế phương trình đó cho $f(x)$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) - 1 + x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln f(x) + x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1$$

$\Leftrightarrow (x \ln f(x))' = 2x + 1$. Đến đây ta nguyên hàm 2 vế thì phương trình trở thành

$$\Rightarrow x \ln f(x) = x^2 + x + C \quad (*)$$

Thế $x=1$ vào ta thu được $\ln f(1) = 2 + C$

Thế $x=2$ vào ta thu được $2 \ln f(2) = 6 + C$

Lấy 2 phương trình trên trừ nhau ta thu được: $2 \ln f(2) - \ln f(1) = 4$

Mà đề cho $\ln(f(2)) - \ln(f(1)) = 1$ nên ta dễ dàng giải hệ phương trình ra được nghiệm là:

$$\begin{cases} \ln f(2) = 3 \\ \ln f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = e^3 \\ f(1) = e^2 \end{cases} \text{ . Thế vào phương trình (*) suy ra được } C = 0 \text{ nên ta có được}$$

$$\Rightarrow x \ln f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \ln f(x) = x + 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x+1}$$

Như vậy $\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 x e^{x+1} dx = \int_2^3 (x-1) e^x dx = e^3 \approx 20,085 \in (18; 24)$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{\pi}{4}$. *C. $-\frac{1}{4}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Thay $x = \frac{\pi}{2}$ vào đẳng thức $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (1)$$

Lại có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}$$

Vậy $I = -\frac{1}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = x^2(1-x)^2; \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{1}{30}$.

*B. $\frac{1}{60}$.

C. $\frac{1}{45}$.

D. $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

Khi đó ta có: $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 [f(x) + f(1-x)]dx = 2 \cdot \int_0^1 f(x)dx$.

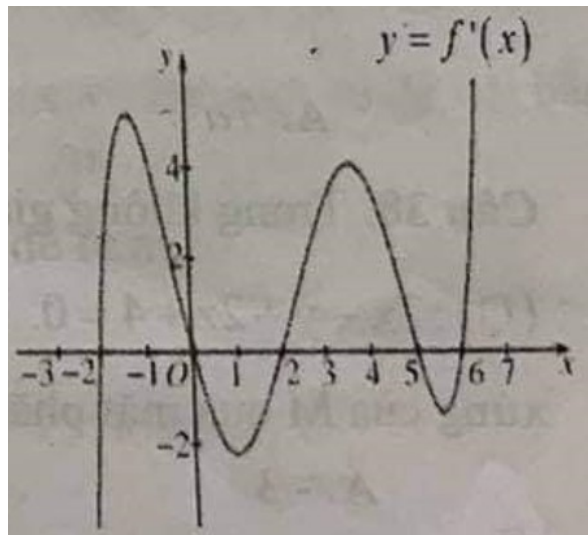
$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) + f(1-x)]dx = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{60}.$$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{60}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$; $m = \min_{[-2;6]} f(x)$. Tính giá trị $S = M + m$?

A. $S = f(0) + f(2)$

B. $S = f(5) + f(6)$

*C. $S = f(5) + f(-2)$

D. $S = f(0) + f(-2)$

Lời giải

Ta có BBT

x	$-\infty$	-2	0	2	5	6	$+\infty$
y'		0	+	0	-	0	0
y		$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$	$f(6)$	

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_1) gồm các đường: $y = f'(x)$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 0$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_2) gồm các đường: $y=f'(x)$; $y=0$; $x=0$; $x=2$.
 Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_3) gồm các đường: $y=f'(x)$; $y=0$; $x=2$; $x=5$.
 Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn (H_4) gồm các đường: $y=f'(x)$; $y=0$; $x=5$; $x=6$.

$$S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{-2}^0 f'(x)dx > \int_0^2 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$$

Ta có:

$$S_2 < S_3 \Leftrightarrow \int_0^2 f'(x)dx < \int_2^5 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$$

$$S_3 > S_4 \Leftrightarrow \int_2^5 f'(x)dx > \int_5^6 f'(x)dx \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} M = \max_{[-2;6]} f(x) = f(5) \\ m = \min_{[-2;6]} f(x) = f(-2) \end{cases} \Rightarrow T = M + m = f(5) + f(-2)$$

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$, biết $f(1)=1$ và $f(x).f'(x)+x-4=(x-2)f'(x)+f(x)$ với $\forall x \in [1;3]$. Biết $\int_1^3 f(x)dx = -\frac{a}{b} + 2\sqrt{c}$ (với a, b, c là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó, tổng $a+b+c$ bằng

A. 10.

*B. 19.

C. 17.

D. 53.

Lời giải

Ta có: $f(x).f'(x)+x-4=(x-2)f'(x)+f(x)$

$$\Rightarrow \int f(x)f'(x)dx + \int (x-4)dx = \int [(x-2)f'(x) + f(x)]dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x = (x-2)f(x) + C$$

$$\text{Theo bài, } f(1)=1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -1 + C \Leftrightarrow C = -2$$

$$\text{Khi đó, } \frac{f^2(x)}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x = (x-2)f(x) - 2 \Leftrightarrow [f(x) - (x-2)]^2 = 4x \Leftrightarrow f(x) = 2\sqrt{x} + x - 2$$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (2\sqrt{x} + x - 2)dx = \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^3 = -\frac{4}{3} + 4\sqrt{3}$$

Do đó, $a=4, b=3, c=12$.

Vậy $a+b+c=4+3+12=19$.

Câu 21. Biết rằng $y=f(x)$ là hàm số liên tục và khác $\pm x$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=2; f(2)=6$. Có tích phân $\int_1^2 \frac{xf'(x)-f(x)}{f^2(x)-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln \frac{a}{b}$; trong đó a, b là các số nguyên dương sao cho

phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức a^2+b^3 bằng

A. 5.

B. 10.

*C. 17.

D. 34.

Lời giải

$$\int_1^2 \frac{xf'(x) - f(x)}{f^2(x) - x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 1} d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{f(x)}{x} - 1}{\frac{f(x)}{x} + 1} \right| \Big|_1^2$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \Rightarrow a=3; b=2$$

Khi đó $a^2 + b^3 = 17$.

Câu 22. Hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; hàm số bậc hai $y=g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$. $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$?

A. $\frac{115}{3}$.

B. $\frac{32}{3}$.

*C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{112}{3}$.

Lời giải

Vì $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$ nên đa thức bậc ba $f(x) - g(x)$ có ba nghiệm $-1; 2; 3$. Do đó, $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$, với $a \neq 0$.

Mặt khác vì (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$ nên $f(1)=0, g(1)=-4$. Do đó, $f(1) - g(1) = 4$

Suy ra $a(1+1)(1-2)(1-3) = 4$ hay $a = 1$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$ là

$$\int_{-1}^2 |(x+1)(x-2)(x-3)| dx + \int_2^3 |(x+1)(x-2)(x-3)| dx = \frac{71}{6} \quad (\text{đvdt}).$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ và $f'(x) = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{3} - \ln 2$.

*B. $-\ln 3$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2} - \ln 3$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$.

Đặt $\sin 2x = t \Rightarrow 2\cos 2x dx = dt$.

Suy ra $f(x) = \int \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C = -\frac{2}{\sin 2x} + C - \left[-\frac{2}{\sin 2x} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rightarrow C = 0$.

$$f(x) = -\frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{\sin 2x} dx = I$$

Như vậy

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{\sin 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin 2x}{\sin^2 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin 2x}{1 - \cos^2 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin 2x}{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)} dx$$

Xét

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Đặt $\cos 2x = a \Rightarrow -2 \sin 2x dx = da$. Đổi cận:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{da}{(1-a)(1+a)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} \right) da = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(a+1)}{a+1} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(a-1)}{a-1} \right]$$

Suy ra

$$= \frac{1}{2} \left(\ln|a+1| \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \ln|a-1| \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right) = -\ln 3$$

Phương pháp trắc nghiệm: Dùng máy tính Casio bấm kết quả của tích phân I , sau đó thử 4 đáp án, đáp án nào trùng khớp chính là kết quả cần tính.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{3}{5}$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{9}$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{14}{15}$

B. $\frac{1}{15}$

*C. $\frac{14}{15}$

D. $-\frac{1}{15}$

Lời giải

$$\begin{cases} u = f(x) \\ v' = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = f'(x) \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ v' = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = f'(x) \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$, suy ra:

$$\frac{37}{180} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{x^4}{4} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx \Leftrightarrow \frac{37}{180} = \frac{1}{4} f(1) - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -\frac{2}{9}$$

$$\text{Mặt khác ta có: } \int_0^1 4x^8 dx = \frac{4}{9} x^9 \Big|_0^1 = \frac{4}{9}$$

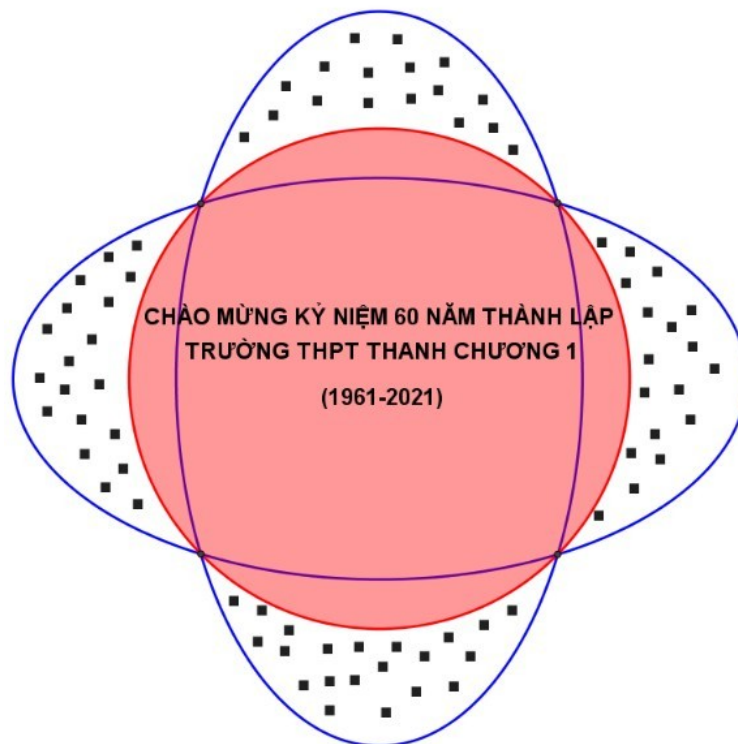
$$\text{Suy ra: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 x^4 f'(x) dx + \int_0^1 4x^8 dx = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 2x^4]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -2x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + C$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + 1$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{2}{5}x^5 + 1 \right) dx = \frac{14}{15}$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$



Phần diện tích nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa nằm giữa hình tròn và Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là 300.000 đồng, kinh phí để trồng cỏ là 200.000 đồng. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bốn hoa gần với số nào nhất trong các số sau:

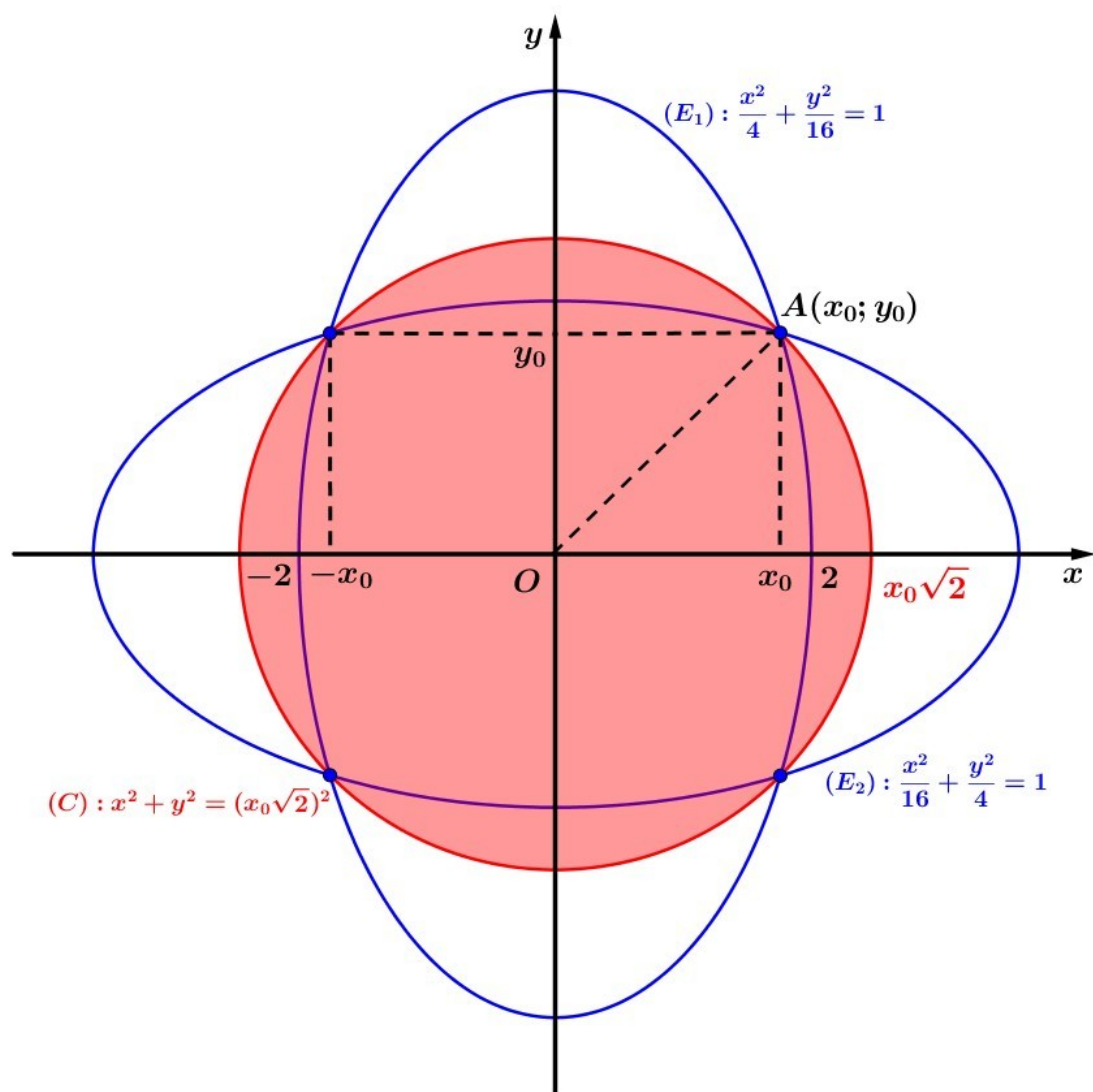
A. 6.200.000 đồng.

B. 8.200.000 đồng.

*C. 8.600.000 đồng.

D. 9.100.000 đồng.

Lời giải



- Ta có: độ dài trục lớn bằng 8m và độ dài trục nhỏ bằng 4m, ta có hình vẽ như trên:
- Tiếp theo ta sẽ thiết lập phương trình nửa bên trên trục hoành của cả hai Elip trên

2 phương trình đó là:

Gọi $A(x_0; y_0)$ là một trong hai giao điểm của hai đồ thị hàm số

Từ đó, hoành độ của điểm $A(x_0; y_0)$ chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số

Suy ra bán kính của đường tròn đi qua 4 giao điểm của 2 Elip trên là

Phương trình nửa trên của đường tròn là:

Diện tích hình tròn đó là:

Từ đó ta tính được kinh phí trồng cỏ là: _____ đồng.

Ta có diện tích giới hạn bởi hai đường _____, _____ là:

Diện tích phần hình giới hạn bởi hai đồ thị _____ cùng với trục hoành đó là

Từ đó ta suy ra diện tích dùng để trồng hoa là:

Như vậy giá tiền trồng hoa là:

Vậy tổng giá tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa bằng

(đồng).

Câu 27. Cho a, b, c là các số thực và $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $f'(t) = f'(t+5) = 2$ với t là hằng số.

Giá trị $\int_t^{t+5} f'(x) dx$ bằng

- *A. $-\frac{105}{2}$ B. $\frac{134}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{19}{4}$

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Vì $f'(t) = f'(t+5) = 2$ nên t và $t+5$ là hai nghiệm của phương trình $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b - 2 = 0$

$$\begin{cases} t + t + 5 = -\frac{2a}{3} \\ t(t+5) = \frac{b-2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}(2t+5) \\ b = 3(t^2+5t)+2 \end{cases}$$

Theo Viet ta có

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+5} f'(x) dx = f(t+5) - f(t) = [(t+5)^3 - t^3] + a[(t+5)^2 - t^2] + b[(t+5) - t] \\ &= [(t+5-t)^3 + 3t(t+5)(t+5-t)] + a \cdot 5 \cdot (2t+5) + 5b \\ &= 125 + 15(t^2+5t) - \frac{15}{2}(2t+5)^2 + 5[3(t^2+5t)+2] \\ &= 135 + 30(t^2+5t) - \frac{15}{2}(4t^2+20t+25) = -\frac{105}{2} \end{aligned}$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x) > 0, \forall x \in [1; 4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, thỏa

mãn $f(1) = 1$ và $[2f(x) + xf'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x}$ với mọi $x \in [1; 4]$. Khi đó $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

- A. 1. *B. $2 \ln 2$ C. $2 \ln 2 - 2$ D. -2.

Lời giải

• Ta có
$$\left[2f(x) + x.f'(x)\right]^2 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow 2f(x) + x.f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} + \frac{x.f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left[2x.\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

• Suy ra
$$\int \left[2x.\sqrt{f(x)}\right]' dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow 2x.\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x} + C$$

• Thế $x=1$, ta được $2.\sqrt{f(1)} = 2\sqrt{1} + C \Leftrightarrow C=0$

Suy ra
$$2x.\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2.f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

• Ta có
$$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^4 = 2\ln 2$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$xf'(x) = f(x) + x^3 \ln x, \forall x > 0$ và $f(1) = \frac{3}{4}$. Tính $f(2)$

A. $2\ln 2 + 1$.

B. $4\ln 2 + 1$.

C. $2\ln 2$

*D. $4\ln 2$

Lời giải

$$xf'(x) = f(x) + x^3 \ln x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = x \ln x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = x \ln x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \int x \ln x dx$$

Mà
$$\int x \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Suy ra
$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{1}{4}x^3 + Cx$$
, mà $f(1) = \frac{3}{4} = C - \frac{1}{4} \Rightarrow C=1$

Vậy
$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{1}{4}x^3 + x$$
. Khi đó $f(2) = 4\ln 2$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và

$f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân
$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$$

A. $I = -\frac{32}{5}$.

B. $I = -\frac{16}{3}$.

*C. $I = -\frac{16}{5}$.

D. $I = -\frac{14}{3}$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên
$$\ln[f(x).f(2-x)] = \ln e^{2x^2-4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x$$

Mặt khác, với $x=0$, ta có: $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$

Xét
$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$$
, ta có
$$I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$$

Đặt

$$I = \left[(x^3 - 3x^2) \ln f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx$$

Suy ra

Đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = 0$

Khi đó:

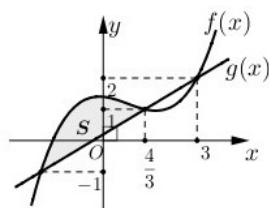
$$I = - \int_2^0 (3t^2 - 6t) \ln f(2-t) (-dt) = - \int_0^2 (3t^2 - 6t) \ln f(2-t) dt = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(2-x) dx \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được

$$I = - \frac{1}{2} \int_0^2 (3x^2 - 6x)(2x^2 - 4x) dx = - \frac{1}{2} \int_0^2 (6x^4 - 24x^3 - 24x^2) dx = - \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} x^5 - 6x^4 - 8x^3 \right) \Big|_0^2 = - \frac{16}{5}$$

Hay

Câu 31. Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{38}{15}$.

C. $\frac{8}{3}$.

*D. $\frac{34}{15}$.

Lời giải

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ và $B(3; 2)$ nên $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

Với $y = -1 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2; -1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

$$\text{Do đó } f(x) - g(x) = a(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3)$$

$$S = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} [f(x) - g(x)] dx \Leftrightarrow \frac{250}{81} = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} a(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) dx \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}$$

Lại có

$$f(x) - g(x) = \frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

Suy ra

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \right] dx = \frac{34}{15}$$

Câu 32. Giả sử $\int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{a \ln 3 + b \ln 2}{3} - \frac{c}{9}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của biểu thức $b+c-a$ bằng

A. -2.

*B. 24.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

$$I = \int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$$

Đặt , suy ra

$$I = \int_3^5 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{x^3 \ln(x+1)}{3} \Big|_3^5 - \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{x^3}{x+1} dx$$

$$= \frac{125 \ln 6 - 27 \ln 4}{3} - \frac{1}{3} \int_3^5 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{125 \ln 6 - 27 \ln 4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| \right) \Big|_3^5$$

$$= \frac{126 \ln 6 - 28 \ln 4}{3} - \frac{80}{9}$$

$$= \frac{126 \ln 3 + 70 \ln 2}{3} - \frac{80}{9} = \frac{a \ln 3 + b \ln 2}{3} - \frac{c}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = 126 \\ b = 70 \\ c = 80 \end{cases} \Rightarrow b + c - a = 24$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{ khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbf{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

A. $I = e + 2\sqrt{3} - 22$ B. $I = e + 2\sqrt{3} + \frac{22}{3}$ C. $I = e - 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$ *D. $I = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0$ và $f(0) = m + 1$.

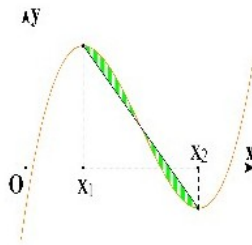
Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbf{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ hay $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1) dx$

$$= \frac{2}{3} (3+x^2)\sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$$

Câu 34. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -3$. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d (phần được tô đậm trong hình) bằng



A. 1.

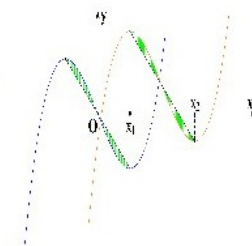
B. 2.

C. $\frac{1}{4}$.

*D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tính tiền điểm uốn về gốc tọa độ, ta được đồ thị mới như hình vẽ



Vì $f(x)$ là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng nên $f(x) = ax^3 + cx$.

Chọn $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, khi đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Ta lại có $f(x) = \frac{1}{3}x(3x^2 - 3) - 2x$, suy ra $d: y = -2x$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{3}x(3x^2 - 3)dx = \frac{1}{2}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \geq 5 \\ 2x - 6, & x < 5 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 2} f(3e^x + 1) \cdot e^x dx$ bằng

A. $\frac{77}{3}$.

*B. $\frac{77}{9}$.

C. $\frac{68}{3}$.

D. $\frac{77}{6}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) = 4$ nên hàm số liên tục tại $x = 5$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

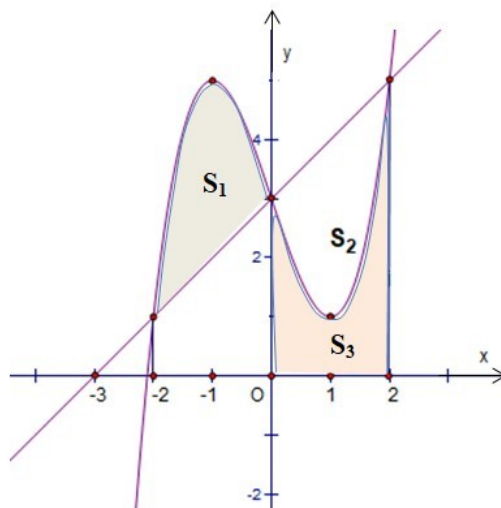
Đặt $t = 3e^x + 1 \Rightarrow e^x dx = \frac{1}{3} dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 4$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 7$

Khi đó $I = \frac{1}{3} \int_4^7 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_4^7 f(x) dx = \frac{1}{3} \left(\int_4^5 (2x - 6) dx + \int_5^7 (x^2 - 4x - 1) dx \right) = \frac{77}{9}$

Câu 36. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ.

Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1 = 4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



A. $\frac{3}{2}$.

*B. 1.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

• Dựa vào đồ thị như hình vẽ, ta có: $f(x) - g(x) = k \cdot x(x+2)(x-2)$

$$g(x) = x + 3$$

$$S_1 = S_2 = \int_{-2}^0 kx(x+2)(x-2)dx = 4k$$

$$S_2 + S_3 = \frac{(|g(0)| + |g(2)|) \cdot 2}{2} = \frac{(3+5) \cdot 2}{2} = 8$$

Vì $S_1 = 4 \Rightarrow S_2 = 4 \Rightarrow S_3 = 8 - 4 = 4$. Vậy $\frac{S_2}{S_3} = 1$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x+m, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết $\int_{-1}^2 f(x)dx = a + \frac{b}{e^2}$ trong đó a, b là các số hữu tỉ. Tính $a+b$.

*A. 4.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m=1$

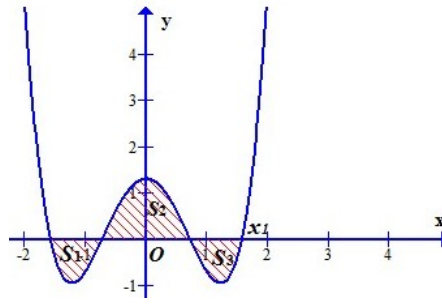
Khi đó ta có $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 e^{2x}dx + \int_0^2 (x+1)dx$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2}$$

Do đó $a = \frac{9}{2}; b = -\frac{1}{2}$.

Vậy $a+b=4$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

*A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$ (1).

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x) dx = 0$.

Mà $\int_0^{x_1} f(x) dx = \int_0^{x_1} (x^4 - 3x^2 + m) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right)$.

Do đó, $x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0$ (2).

Từ (1) và (2), ta có phương trình $\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}$.

Vậy $m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = 1$, $y = g(x) = |x|$. Giá trị $I = \int_{-1}^2 \min \{ f(x); g(x) \} dx$

A. 1. B. $\frac{3}{2}$. *C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Xét bất phương trình $|x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$.

Vậy $\min \{ 1; |x| \} = 1$ khi $1 < x$ hoặc $x < -1$

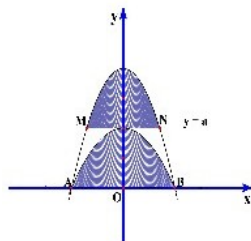
$\min \{ 1; |x| \} = |x|$ khi $-1 < x < 1$

Xét $I = \int_{-1}^2 \min \{ f(x); g(x) \} dx = \int_{-1}^2 \min \{ 1; |x| \} dx = \int_{-1}^1 \min \{ 1; |x| \} dx + \int_1^2 \min \{ 1; |x| \} dx$

$I = \int_{-1}^1 |x| dx + \int_1^2 dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx + \int_1^2 dx = \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 2$.

Câu 40. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình

phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$.

*B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

Lời giải

- Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 0) \Rightarrow AB = 4$.

- Gọi M, N là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a) \Rightarrow MN = 2\sqrt{4-a}$.

- Nhận thấy: (P_2) là parabol có phương trình $y = -\frac{a}{4}x^2 + a$.

- Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta được:

$$S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} \cdot dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}$$

$$S_2 = 2 \int_0^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a \right) \cdot dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$$

- Theo giả thiết: $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - m & (x \geq 0) \\ 2 \cos x - 3 & (x < 0) \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f|2 \cos x - 1| \sin x dx$

*A. $-\frac{2}{3}$.

B. 0.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - m) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 \cos x - 3) \Rightarrow m = 1$$

Xét bất phương trình $2 \cos x - 1 > 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\Leftrightarrow 2 \cos x > 1 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

Vậy $2 \cos x - 1 > 0$ khi $0 < x < \frac{\pi}{3}$,

$2 \cos x - 1 < 0$ khi $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f|2\cos x - 1|\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f|2\cos x - 1|\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f|2\cos x - 1|\sin x dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(2\cos x - 1)\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(1 - 2\cos x)\sin x dx$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(2\cos x - 1)\sin x dx$$

Xét

$$\text{Xét } t = 2\cos x - 1 \Rightarrow dt = -2\sin x dx \Rightarrow \frac{-dt}{2} = \sin x dx$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
t	1	0

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(2\cos x - 1)\sin x dx = \int_1^0 f(t) \frac{-dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

Suy ra

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left. \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \right|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(1 - 2\cos x)\sin x dx$$

Xét

$$\text{Xét } t = 1 - 2\cos x \Rightarrow dt = 2\sin x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = \sin x dx$$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(1 - 2\cos x)\sin x dx = \int_0^1 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

Suy ra

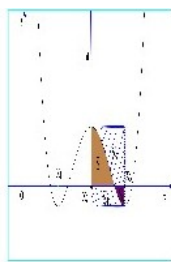
$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left. \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \right|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{-2}{3}$$

Suy ra

Câu 42. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm

trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



*A. 0,60

B. 0,55

C. 0,65

D. 0,70

Lời giải

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c (k > 0)$

Lại có $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$

Suy ra: $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \frac{3}{4}k$

Khi đó: $S_1 + S_2 = k \int_0^1 \left| x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} \right| dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k$

Ta lại có: $g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k \cdot 1 = k$

Suy ra $S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60}k \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{77 - 28\sqrt{2}} \approx 0,604$

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq 4 \\ \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x & \text{khi } x < 4 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ bằng

A. $\frac{28}{3}$

B. 8

C. $\frac{341}{48}$

*D. $\frac{341}{96}$

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x - 4) = 4; \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) = 4; f(4) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 4$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$$

Xét

$$\text{Đặt } 2\sin^2 x + 3 = t \Rightarrow \sin 2x dx = \frac{1}{2} dt$$

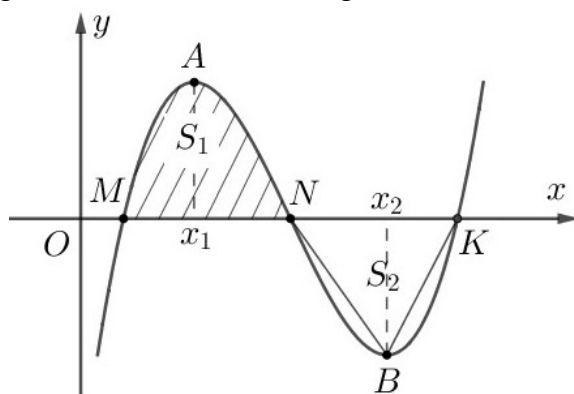
$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 5$$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_3^4 \left(\frac{1}{4} t^3 - t^2 + t \right) dt + \frac{1}{2} \int_4^5 (2t - 4) dt = \frac{341}{96}$$

Câu 44. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Bi

ết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

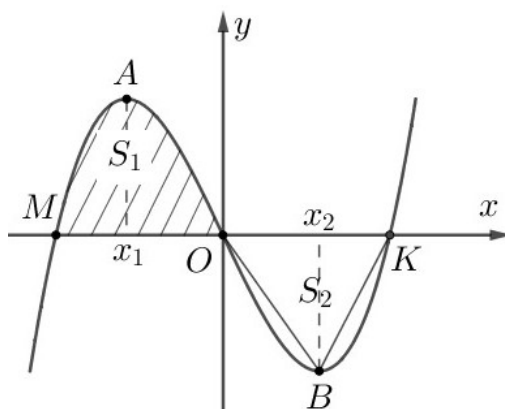
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

*D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang trái sao cho điểm uốn trùng với gốc tọa độ O . (như hình dưới)



Do $f(x)$ là hàm số bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng $(O \equiv N)$.

Đặt $x_1 = -a, x_2 = a$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = k(x^2 - a^2)$ với $k > 0$

$$\Rightarrow f(x) = k \left(\frac{1}{3} x^3 - a^2 x \right) \Rightarrow x_M = -a\sqrt{3}, x_K = a\sqrt{3}$$

Có $MAKB$ nội tiếp đường tròn tâm $O \Rightarrow OA = OM = a\sqrt{3}$

$$\text{Có } f(x_1) = \sqrt{OA^2 - x_1^2} \Leftrightarrow f(-a) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k \left(-\frac{1}{3} a^3 + a^3 \right) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2} \left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x \right)$$

$$S_1 = \int_{-a\sqrt{3}}^0 f(x)dx = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2 \right) \Big|_{-a\sqrt{3}}^0 = \frac{9\sqrt{2}}{8}a^2$$

$$S_2 = S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2}f(-a) \cdot MO = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ 3x^2 - x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(3 - 4\cos x) \sin x dx$ bằng

*A. $\frac{37}{24}$.

B. $\frac{37}{6}$.

C. 6.

D. 12.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + 2) = 2; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - x + 2) = 2; f(0) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(3 - 4\cos x) \sin x dx$$

Xét

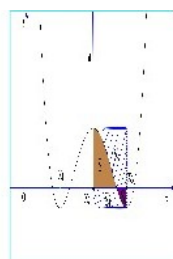
$$\text{Đặt } 3 - 4\cos x = t \Rightarrow \sin x dx = \frac{1}{4} dt$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 f(t) \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 (3t^2 - t + 2) dt + \frac{1}{4} \int_0^1 (\sqrt{t} + 2) dt = \frac{37}{24}$$

Câu 46. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



*A. 0,60.

B. 0,55.

C. 0,65.

D. 0,70.

Lời giải

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị ^(C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó ^(C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c$ ($k > 0$)

Lại có $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$

Suy ra: $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \frac{3}{4}k$

Khi đó: $S_1 + S_2 = k \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}) dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k$

Ta lại có: $g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k \cdot 1 = k$

Suy ra $S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60}k \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{77 - 28\sqrt{2}} \approx 0,604$

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x) dx$$

A. 3.

B. 0.

C. -2.

*D. 4.

Lời giải

• Hàm số có đạo hàm tại $\Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4 + 2a + b = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -6$. (1)

• Có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 10 - 4 - 2a - b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)^2(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(x - 2)(x + 3)] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + ax + b - 4 - 2a - b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2 + a)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + a + 2) = a + 4.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$

suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $a = -4$ và $b = 2$.

Khi đó $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

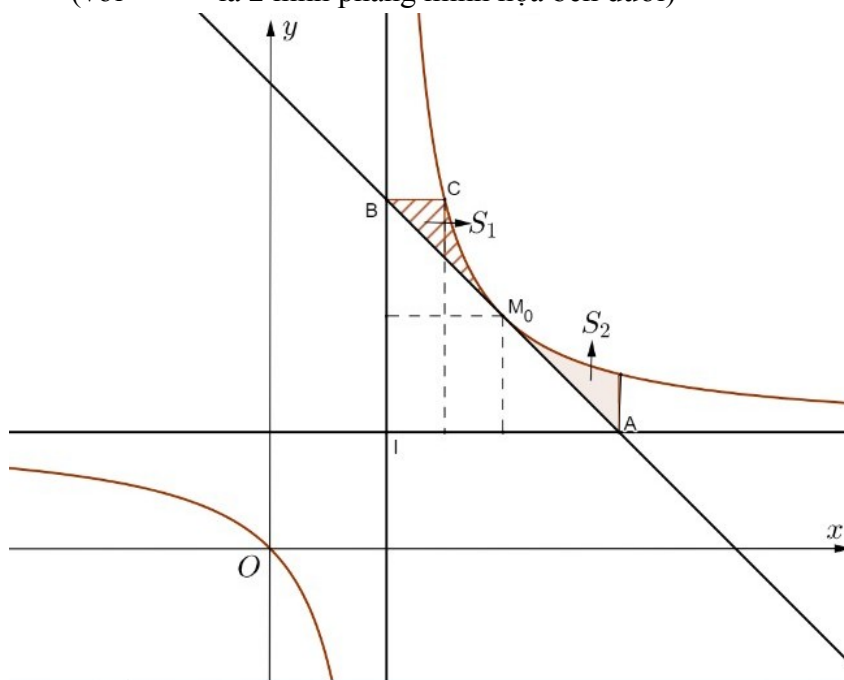
$$I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 - x^2 - 8x + 10) dx + \int_2^4 (x^2 - 4x + 2) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 10x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4$$

Vậy $I = 4$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I . Điểm $M_0(x_0; y_0)$ di động trên (C) , tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A, B và $S_{\Delta IAB} = 2$. Tìm giá trị IM_0^2 sao cho $\frac{S_1 + S_2}{S_{\Delta IAB}} = 1$ (với S_1, S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)



A. 2.

*B. $\frac{41}{20}$.

C. $\frac{169}{60}$.

D. $\frac{189}{60}$.

Lời giải

Nhận thấy kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) theo $\vec{IO}$. Khi đó hai tiệm cận của (C) là hai trục tọa độ.

Và hàm số của đồ thị (C) trở thành: $y = \frac{\alpha}{x} (\alpha > 0) \Rightarrow y' = -\frac{\alpha}{x^2}$.

Gọi d là tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0) \Rightarrow d: y = -\frac{\alpha}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{\alpha}{x_0} = -\frac{\alpha}{x_0^2}x + \frac{2\alpha}{x_0}$

Suy ra: $Ox \cap d = A(2x_0; 0)$ và $Oy \cap d = B\left(0; \frac{2\alpha}{x_0}\right)$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2\alpha \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow (C) y = \frac{1}{x}, d: y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}, B\left(0; \frac{2}{x_0}\right), C\left(\frac{x_0}{2}; \frac{2}{x_0}\right) \text{ và}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} x_0 \left(\frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) = \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} \left(\frac{2}{x_0} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3}{x_0} - \frac{1}{2} \quad S_2 = \int_{x_0}^{2x_0} \left(\frac{1}{x} \right) dx - \frac{1}{2} (2x_0 - x_0) \frac{1}{x_0} = \frac{3}{4x_0^2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Theo giả thiết } \frac{S_1 + S_2}{S_{\Delta IAB}} = 1 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_{\Delta IAB} \Rightarrow \frac{3}{x_0^2} + \frac{3}{4x_0^2} - 1 = 2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow y_0^2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } IM_0^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{41}{20}.$$

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x + 5 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$.

*A. $(-2; 3)$ B. $(3; -2)$ C. $(2; -1)$ D. $(-1; 2)$

Lời giải

• Với $x < 2$, ta có $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 2)$.

• Với $x > 2$, ta có $f(x) = x + 5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x - 1) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 5) = 7; \quad f(2) = 7$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$.

Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$t = \ln(x^2 + 1) \rightarrow dt = \frac{2x dx}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{dt}{2}.$$

Đặt

Đổi cận:

Với $x = 0$ ta có $t = 0$

Với $x = \sqrt{e^4 - 1}$ ta có $t = 4$

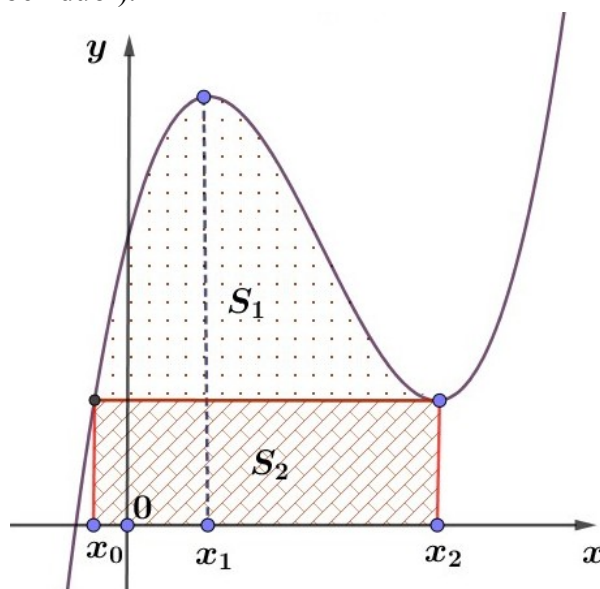
$$I = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (x^2 + 2x - 1) dx + \int_2^4 (x + 5) dx \right)$$

Khi đó

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_2^4 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 16 \right) = \frac{31}{3}$$

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu

cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



*A. $\frac{27}{8}$

B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{3}{5}$

Lời giải

+) Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

+) Theo giả thiết ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C$$

+) Ta có $f(x_1) - 3f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) - 3f(x_1 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow C - 3(8a - 12a + C) = 0 \Leftrightarrow -2C + 12a = 0 \Leftrightarrow C = 6a$$

Do đó $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a$

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và $f(x_2) = 8a - 12a + 6a = 2a$

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = x_0 = x_1 - 1$, $x = x_2 = x_1 + 2$, $y = f(x_2) = 2a$ và $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a$ nên suy ra

$$S_1 = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [f(x) - 2a] dx = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 4a] dx$$

$$= \left[\frac{a(x - x_1)^4}{4} - 3a \frac{(x - x_1)^3}{3} + 4ax \right]_{x_1-1}^{x_1+2} = \frac{27a}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{8}$$

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^\pi \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ bằng

*A. $I = \frac{9}{2}$

B. $I = -\frac{9}{2}$

C. $I = -\frac{7}{6}$

D. $I = \frac{7}{6}$

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -2$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \pi \Rightarrow t = -1$.

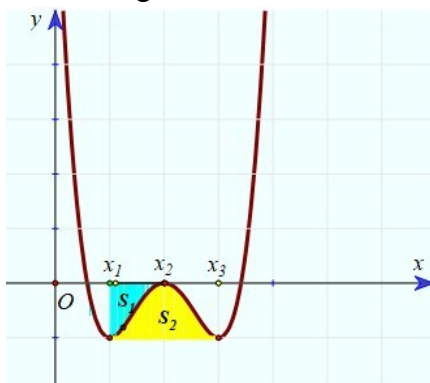
Ta có:

$$\int_0^\pi \sin 2x \cdot f(\cos x) dx = \int_0^\pi 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx = - \int_1^{-1} 2t \cdot f(t) dt = 2 \int_{-1}^1 t \cdot f(t) dt$$

$$= 2 \int_{-1}^0 x \cdot f(x) dx + 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 2 \int_{-1}^0 x(x^2 + 4x - 2) dx + 2 \int_0^1 x(2x - 2) dx$$

$$= 2 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + 4 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$$

Câu 52. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa mãn $x_1 + x_3 = 4$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{2}{5}$.

*B. $\frac{7}{16}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho $x_2 = 0$.

Gọi $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$, ta có hàm số $g(x)$ là chẵn và có 3 điểm cực trị tương ứng là $-2; 0; 2$ là các nghiệm của phương trình $4ax^3 + 2bx = 0$.

Dựa vào đồ thị $g(x)$, ta có $g(0) = 0$. Từ đó suy ra $g(x) = a(x^4 - 8x^2)$ với $a > 0$.

Do tính đối xứng của hàm trùng phương nên diện tích hình chữ nhật bằng $2S_1 + S_2 = |g(2)| \cdot 4 = 64a$

Ta có S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = -2, x = 0$.

$$S_1 = \int_{-2}^0 |g(x)| dx = a \int_{-2}^0 |x^4 - 8x^2| dx = \frac{224a}{15} \quad S_2 = 64a - 2 \cdot \frac{224a}{15} = \frac{512a}{15} \quad \text{. Suy ra}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{224}{512} = \frac{7}{16}.$$

---HẾT---

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>