|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD & ĐT TỈNH BÌNH ĐỊNH  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN** | **ĐỀ (GIỚI THIỆU) THI CHỌN HSG**  **VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **MÔN: TOÁN HỌC. LỚP 10**  **NĂM 2023**  *Thời gian làm bài: 180 phút* |

*(Đề thi gồm 01 trang)*

**Câu 1 (4,0 điểm).**  Tìm tất cả các hàm  thỏa mãn



với mọi  là hai số thực.

**Câu 2 (4,0 điểm).**  Xét bộ ba số thực  đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Câu 3 (4,0 điểm).**  Cho tam giác nhọn có trực tâm với các đường cao . Đường tròn đường kính cắt tại . Đường tròn qua , tiếp xúc cạnh tại ( thuộc đoạn ) và cắt đường tròn tâm bán kính tại hai điểm .

1/ Chứng minh các điểm cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Gọi là điểm đối xứng với qua . Chứng minh rằng giao điểm của và thuộc đường tròn đường kính .

**Câu 4 (4,0 điểm).**  Cho  là hai số nguyên dương tùy ý. Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên dương *n* sao cho 

(Kí hiệu được định nghĩa như sau: Nếu  thì )

**Câu 5 (4,0 điểm).**  Cho tâp hợp . Xét 24 tập hợp  là các tập con của  trong đó mỗi tập hợp  có đúng 1012 phần tử. Chứng minh rằng trong các tập  luôn tìm được hai tập hợp có chung ít nhất 484 phần tử.

-------------------Hết-------------------

|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD & ĐT TỈNH BÌNH ĐỊNH  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN** | **ĐÁP ÁN ĐỀ (GIỚI THIỆU) THI CHỌN HSG**  **VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **NĂM 2023**  **MÔN: TOÁN HỌC. LỚP 10** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1**  **(4 điểm)** | Tìm tất cả các hàm  thỏa mãn    với mọi  là hai số thực. |  |
| **Chứng minh bổ đề:** Nếu  thì  Với  như trên, áp dụng phương trình đã cho ta có    Suy ra  (vì *c* khác 0). Vậy BĐ được chứng minh. | 0,5 |
| Trong phương trình hàm đã cho thay , ta có  (1)  Từ (1) và áp dụng bổ đề suy ra  (2)  Thật vậy, nếu  thì từ (1) suy ra  (do bổ đề) (mâu thuẫn). Mâu thuẫn này chứng tỏ (2) đúng. | 0,5 |
| Trong phương trình hàm ta chọn  và sử dụng (2) ta có  (3)  Từ (3) và bổ đề suy ra  với mỗi  (4)  1) Trước hết dễ thấy  và  là hai nghiệm hàm. | 1,0 |
| 2) Tiếp theo ta sẽ chứng minh không còn nghiệm hàm nào  Thật vậy, giả sử có nghiệm hàm  có tính chất tồn tại  và  Theo (2) suy ra  Hơn nữa theo (4) thì  (5)  Trong phương trình hàm thay  và áp dụng (5) ta có    Áp dụng bổ đề  (vô lý).  Vậy  và  là hai nghiệm hàm | 2,0 |
| **2**  **(4 điểm)** | Xét bộ ba số thực  đôi một khác nhau. Tìm gía trị nhỏ nhất của biểu thức |  |
| Đặt , khi đó, ta có    và  Suy ra  và . | 1,0 |
| Ta nhận thấy  và biến  đặc biệt, chọn  .  Nhưng theo yêu cầu xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức P, do đó, ta chỉ cần xét trường hợp . Khi đó, ta viết lại P dưới dạng    là phương trình bậc hai có nghiệm , do đó    , | 1,0 |
| có vế trái là một tam thức bậc hai có hệ số cao nhất âm , bất phương trình có nghiệm  thì    Ta đang xét ; vậy . | 1,0 |
| Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi    Từ đó, ta có: hoặc . Vậy . | 1,0 |
| **3**  **(4 điểm)** | Cho tam giác nhọn có trực tâm với các đường cao . Đường tròn đường kính cắt tại . Đường tròn qua , tiếp xúc cạnh tại ( thuộc đoạn ) và cắt đường tròn tâm bán kính tại hai điểm .  1/ Chứng minh các điểm cùng nằm trên một đường tròn.  2/ Gọi là điểm đối xứng với qua . Chứng minh rằng giao điểm của và thuộc đường tròn đường kính . |  |
|  |  |
| 1***)*** Vì tam giác vuông tại có là đường cao nên . Dễ thấy tứ giác nội tiếp nên ta có .  Xét phương tích của điểm đối với đường tròn tâm , bán kính và đường tròn ta có  Do đó thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn nói trên, hay thẳng hàng. | 1,0 |
| Bốn điểm đồng viên và cắt tại nên . Mặt khắc đồng viên và cắt tại nên . Từ đó suy ra  Suy ra bốn điểm đồng viên. | 1,0 |
|  | 2) Đường tròn đường kính cắt lần lượt tại , gọi là giao điểm của và . Ta cần chứng minh trùng .  Áp dụng định lý Pascal cho lục giác ta có  nên thẳng hàng.  Giả sử cắt đường tròn đường kính tại. Dễ thấy hai tam giác đồng dạng nên  .  Dễ thấy là trực tâm tam giác , do đó cũng là trực tâm tam giác nên dễ chứng minh được hai tam giác vuông và đồng dạng, suy ra  Do đó suy ra trùng . Từ đó ta có  Do đó Mà tam giác vuông tại nên từ đây suy ra là tâm đường tròn đường kính do đó trùng . | 1,0  1,0 |
| **4**  **(4 điểm)** | Cho  là hai số nguyên dương tùy ý. Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên dương *n* sao cho  (kí hiệu được định nghĩa như sau: Nếu  thì ). |  |
| Giả sử . Theo định lí phần du trung hoa, tồn tại *k* sao cho  và .  Xét các số *n* có dạng trong đó  là các số tự nhiên.  Theo công thức Legendre . | 1,5 |
| Ta chọn  và  Khi đó  **(**vì**)** và  **(**vìđịnh lí Euler) | 1,5 |
| Từ đó suy ra . Vì có vô số cách chọn  nên tồn tại vô số *n*. | 1,0 |
| **5**  **(4 điểm)** | Cho tâp hợp . Xét 24 tập hợp  là các tập con của  trong đó mỗi tập hợp  có đúng 1012 phần tử. Chứng minh rằng trong các tập  luôn tìm được hai tập hợp có chung ít nhất 484 phần tử. |  |
| Với mỗi phần tử , gọi  là số tập hợp  chứa . Khi đó  Đặt .  Đếm số bộ , trong đó  và 2 tập  chứa phần tử x, theo 2 cách.  Cách 1. Đếm  trước. Với mỗi  có  cách chọn tập , nên ta có  cách chọn bộ . ( quy ước nếu  thì ).  Cách 2. Đếm tập  trước. Có  cách chọn tập , tương ứng có không quá  cách chọn nên có không quá  cách chọn bộ . | 2,0 |
| Do đó  . (1)  Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có  (2)  Từ (1), (2) và kết hợp, suy ra    Vậy luôn tồn tại hai tập hợp  có chung ít nhất 484 phần tử. | 2,0 |

-------------------HẾT---------------------