Chương

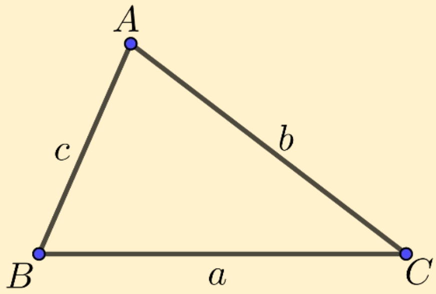
Bài 2. ĐỊNH LÝ SIN – COS, GIẢI TAM GIÁC & THỰC TẾ

A. Lý thuyết

1. Định lý hàm cos

» Trong ΔABC với $BC = a, CA = b, AB = c,$ ta có:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$
- $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba.\cos C$



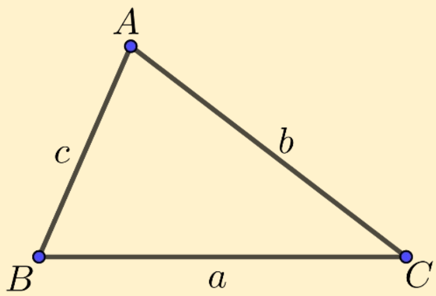
» Hệ quả

- $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
- $\cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{}$

2. Định lý hàm sin

» Trong ΔABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



» Hệ quả

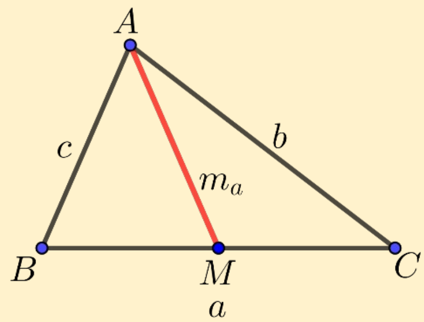
- $a = 2R\sin A \longrightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$
- $b = 2R\sin B \longrightarrow \sin B = \dfrac{b}{2R}$
- $c = 2R\sin C \longrightarrow \sin C = \dfrac{c}{2R}$

3. Đường trung tuyến

» Cho ΔABC, M là trung điểm cạnh BC,
$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2$.

» Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ A, B, C

- $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$
- $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$
- $m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{}$



4. Diện tích tam giác

(1) $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$.

(2) $S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C$

(3) $S = \frac{abc}{4R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

(4) $S = p.r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{}$

5. Giải tam giác

» Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

» Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giải tam giác

Phương pháp

≫ Định lý cos:

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

(3) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba.\cos C$

≫ Hệ quả

(4) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(5) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

(6) $\cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ac}$

≫ Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

≫ Hệ quả

(1) $a = 2R\sin A \longrightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$

(2) $b = 2R\sin B \longrightarrow \sin B = \dfrac{b}{2R}$

(3) $c = 2R\sin C \longrightarrow \sin C = \dfrac{c}{2R}$

≫ Đường trung tuyến: $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ A, B, C

$m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ $\quad$ $m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$ $\quad$ $m_c^2 = \dfrac{b^2 + a^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

Ví dụ 1.1.

Cho tam giác ABC có $a = 7; b = 8; c = 5$. Tính $\hat{A}, S, h_a, R$.

✍ *Lời giải*

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2.8.5} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$.

$S = \dfrac{1}{2}b.c\sin A = \dfrac{1}{2}.8.5.\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$.

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2.10\sqrt{3}}{7} = \dfrac{20\sqrt{3}}{7}$.

Ta có: $S = \dfrac{a.b.c}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{a.b.c}{4S} = \dfrac{7.8.5}{4.10\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 1.2.

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB=2$, $BC=5$, $CA=6$. Tính độ dài đường trung tuyến MA, với M là trung điểm của BC.

Lời giải

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$$MA=\sqrt{\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}}=\sqrt{\frac{2^2+6^2}{2}-\frac{5^2}{4}}=\frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Ví dụ 1.3.

Tam giác ABC có cạnh $a=2\sqrt{3}, b=2, C=30^\circ$.

(1) Tính cạnh c, góc A và diện tích S của ΔABC.

(2) Tính chiều cao h và độ dài m của đường trung tuyến kẻ từ A của

Lời giải

(1) Tính cạnh c, góc A và diện tích S của ΔABC.

Ta có $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \Leftrightarrow c^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2-2.2\sqrt{3}.2\cos 30^\circ=4 \Rightarrow c=2$.

Xét tam giác ABC có $b=c=2 \Rightarrow$ tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=30^\circ \Rightarrow \hat{A}=120^\circ$.

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.2.2\sin 120^\circ=\sqrt{3}$.

(2) Tính chiều cao h và độ dài m của đường trung tuyến kẻ từ A của ΔABC.

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a=\frac{2S_{ABC}}{a}=\frac{2.\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$.

Ta có $m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}=\frac{2\left(2^2+2^2\right)-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}=1 \Rightarrow m_a=1$.

Ví dụ 1.4.

Tính góc lớn nhất của tam giác ABC có cạnh $a=3, b=4, c=6$.
Tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Vì $c=6$ là cạnh lớn nhất nên góc lớn nhất là góc $\hat{C}$.

Ta có $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+4^2-6^2}{2.3.4}=\frac{-11}{24} \Rightarrow \hat{C}\approx 117^\circ 22' \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{455}}{24}$.

Vì $c=6$ là cạnh lớn nhất nên đường cao ứng với cạnh lớn nhất là h_c.

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}.3.4.\frac{\sqrt{455}}{24}=\frac{\sqrt{455}}{4}$ mà

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}h_c.c\Rightarrow h_c=\frac{2.S_{ABC}}{c}=\frac{2.\frac{\sqrt{455}}{4}}{6}=\frac{\sqrt{455}}{12}.$$

Ví dụ 1.5.

Tam giác ABC vuông tại A có $AC=6\text{ cm}$, $BC=10\text{ cm}$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Lời giải

Do tam giác ABC vuông tại A có $AC=6\text{ cm}$, $BC=10\text{ cm}$ nên $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

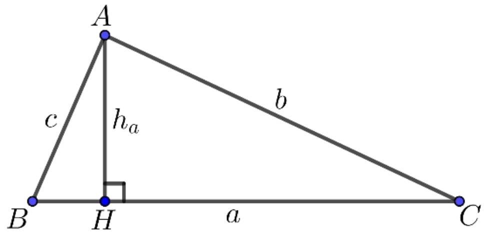
Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=24$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB+BC+CA}=\frac{2.24}{6+8+10}=2$.

Ví dụ 1.6.

Cho tam giác ABC có $b=7$, $c=5$, $\cos A=\frac{3}{5}$. Tính độ dài đường cao h_a của

Lời giải



Theo định lí hàm cos ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=49+25-2.7.5.\frac{3}{5}=32\Rightarrow a=4\sqrt{2}$.

Ta lại có: $\cos A=\frac{3}{5}\Rightarrow \sin A=\frac{4}{5}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5}=14$.

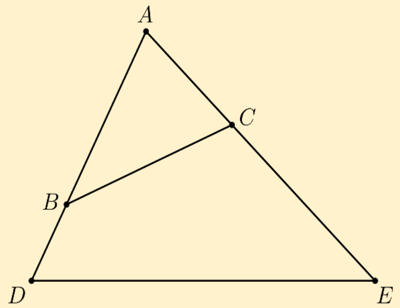
Vì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah_a$ nên $h_a=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a}=\frac{28}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy $h_a=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 2. Chứng minh hệ thức trong tam giác

Phương pháp

- Áp dụngĐịnh lý cos – sin, công thức đường trung tuyến.
- Biến đổi từ vế này sang vế kia hoặc biến đổi tương đương đến một hệ thức đã biết.
- Dùng một hệ thức đã biết biến đổi thành hệ thức phải chứng minh.
- Vận dụng tỉ số diện tích hai tam giác $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\dfrac{AB}{AD}.\dfrac{AC}{AE}.$



Ví dụ 2.1.

Chứng minh rằng trong tam giác $ABC,$ ta có

(1) $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B.$

(2) $h_a=2R\sin B\sin C.$

(3) $S=R.r.(\sin A+\sin B+\sin C)$

Lời giải

(1) $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B.$

Ta có $\sin B\cos C+\sin C\cos B$

$$=\frac{b}{2R}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{c}{2R}.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{4aR}=\frac{2a^2}{4aR}=\frac{a}{2R}=\sin A.$$

(2) $h_a=2R\sin B\sin C.$

Ta có $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2.\dfrac{abc}{4R}}{a}=\dfrac{bc}{2R}=\dfrac{2R\sin B.2R\sin C}{2R}=2R\sin B\sin C.$

(3) $S=R.r.(\sin A+\sin B+\sin C)$.

Ta có $VP=R.r.\left(\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}\right)=r.\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)=r.p=S$ (đpcm).

Ví dụ 2.2.

Cho tam giác ABC thỏa $\dfrac{\sin A}{\sin B}=2\cos C$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải

Ta có: $\dfrac{\sin A}{\sin B}=2\cos C\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=2\cos C$

$\Leftrightarrow a=2b.\cos C\Leftrightarrow a=2b.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Leftrightarrow a^2=a^2+b^2-c^2\Leftrightarrow b=c$

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Ví dụ 2.3.

Cho tam giác ABC có $b+c=2a$. Chứng minh rằng

(1) $2\sin A=\sin B+\sin C$ (2) $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$.

Lời giải

(1) $2\sin A=\sin B+\sin C$.

Ta có $b+c=2a\Leftrightarrow 2R\sin B+2R\sin C=2.2R\sin A\Leftrightarrow\sin B+\sin C=2\sin A$.

(2) $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$.

Ta có $b+c=2a\Leftrightarrow\dfrac{2S}{h_b}+\dfrac{2S}{h_c}=2.\dfrac{2S}{h_a}\Leftrightarrow\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{2}{h_a}$.

Ví dụ 2.4.

Cho tam giác ABC có $bc=a^2$. Chứng minh rằng

(1) $\sin^2 A=\sin B.\sin C$ (2) $h_b.h_c=h_a^2$.

Lời giải

(1) $\sin^2 A=\sin B.\sin C$.

Ta có $bc=a^2\Leftrightarrow 2R\sin B.2R\sin C=(2R\sin A)^2$

$\Leftrightarrow 4R^2\sin B\sin C=4R^2\sin^2 A\Leftrightarrow\sin B.\sin C=\sin^2 A$.

(2) $h_b.h_c=h_a^2$.

Ta có $bc=a^2\Leftrightarrow\dfrac{2S}{h_b}.\dfrac{2S}{h_c}=\left(\dfrac{2S}{h_a}\right)^2\Leftrightarrow\dfrac{4S^2}{h_bh_c}=\dfrac{4S^2}{h_a^2}\Leftrightarrow h_a^2=h_bh_c$.

Ví dụ 2.5.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có

(1) $b^2-c^2=a(b.\cos C-c.\cos B)$.

(2) $(b^2-c^2)\cos A=a(c.\cos C-b.\cos B)$

(3) $\sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

Lời giải

(1) $b^2-c^2=a(b.\cos C-c.\cos B)$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC. Ta có: $\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2a(c.\cos B - b.\cos C)$

$\Leftrightarrow 2(b^2 - c^2) = 2a(b.\cos C - c.\cos B)$

$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$ (Điều phải chứng minh)

(2) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$

Ta có: $\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - a^2}{2ba} \end{cases}$

$\Rightarrow (b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$

$\Leftrightarrow (b^2 - c^2).\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a\left(c.\dfrac{b^2 + a^2 - a^2}{2ba} - c.\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$

$\Leftrightarrow (b^2 - c^2).\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = c.\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{b} - b.\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{c}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{b^4 - c^4 - a^2b^2 + a^2c^2}{bc} = \dfrac{cb^2 + ca^2 - c^3}{b} - \dfrac{ba^2 + bc^2 - b^3}{c}$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^4 - c^4 - a^2b^2 + a^2c^2}{bc} = \dfrac{c^2b^2 + c\,a^2 - c^4}{bc} - \dfrac{b^2a^2 + b^2c^2 - b^4}{bc}$

$\Leftrightarrow b^4 - c^4 - a^2b^2 + a^2c^2 = c^2b^2 + c\,a^2 - c^4 - b^2a^2 - b^2c^2 + b^4 \Leftrightarrow 0 = 0$ (Điều phải chứng minh).

(3) $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

$VP = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

$= \dfrac{a}{2R}.\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \dfrac{b}{2R}.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(a^2 + c^2 - b^2) + (b^2 + c^2 - a^2)}{4Rc} = \dfrac{2c^2}{4Rc} = \dfrac{c}{2R} = \sin C = VT\,(dpcm)$.

Ví dụ 2.6.

Cho tam giác ABC thỏa $\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b.\cos C \end{cases}$. Chứng minh $DABC$ là tam giác đều.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b.\cos C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2b + a^2c - a^3 \\ a = 2b.\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(b+c)(b^2-bc+c^2-a^2)=0\\ a=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-bc+2bc.\cos A=0\\ b^2=c^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{2}\\ b=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=60^\circ\\ b=c\end{cases}$$

Vì tam giác ABC cân có 1 góc bằng 60° nên tam giác ABC là tam giác đều.

Ví dụ 2.7.

Chứng minh rằng trong tam giác diện tích hình bình hành bằng tích hai cạnh bên liên tiếp với $\sin$ của góc xen giữa chúng.

Lời giải

Giả sử với hình hình hành: $ABCD$,

Ta có: $S_{ABCD}=2S_{ABC}=2.\dfrac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{ABC}=BA.BC.\sin\widehat{ABC}$

Do vai trò các góc các cạnh trong hình bình hành như nhau nên suy ra điều phải chứng minh.

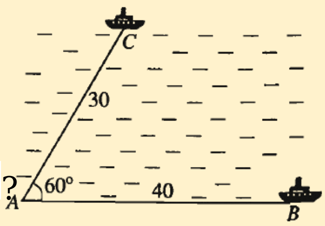
Dạng 3. Ứng dụng thực tế

Phương

≫ Áp dụngĐịnh lý cos – sin, công thức đường trung tuyến, hệ thức lượng trong tam giác...
≫ Thường gặp: vận tốc – thời gian, tính độ dài đường đi, tính khoảng cách giữa các

Ví dụ 3.1.

Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60^0. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30\,km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40\,km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?



Lời giải

Ta có: Sau $2h$ quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60\,km.$

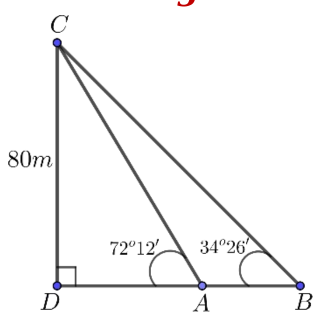
Sau $2h$ quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80\,km.$

Vậy: sau $2h$ hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2.\cos 60^0} = 20\sqrt{13}.$

Ví dụ 3.2.

Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80\,m$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^0 12'$ và $34^0 26'$ so với phương nằm ngang. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB (chính xác đến hàng đơn vị)?

Lời giải



Trong tam giác vuông CDA: $\tan 72^0 12' = \dfrac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \dfrac{CD}{\tan 72^0 12'} = \dfrac{80}{\tan 72^0 12'} \approx 25,7.$

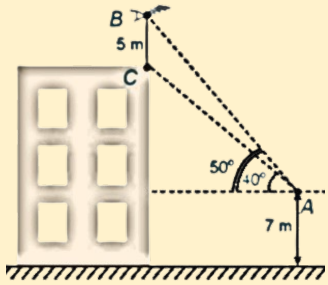
Trong tam giác vuông CDB: $\tan 34^0 26' = \dfrac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{CD}{\tan 34^0 26'} = \dfrac{80}{\tan 34^0 26'} \approx 116,7.$

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91m.$

Ví dụ 3.3.

Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang

(1) Tính các góc của tam giác ABC.
(2) Tính chiều cao của tòa nhà.



Lời giải

(1) Tính các góc của tam giác ABC.

Ta có $\widehat{BAC}=50^\circ-40^\circ=10^\circ$, $\widehat{ABC}=90^\circ-\widehat{BAD}=40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACB}=180^\circ-\widehat{ABC}-\widehat{BAC}=130^\circ$

(2) Tính chiều cao của tòa nhà.

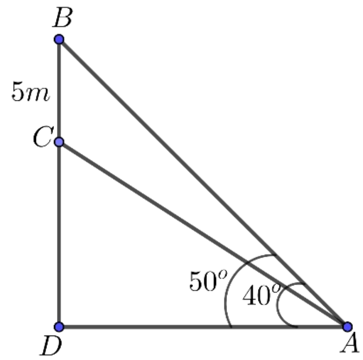
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Rightarrow AC=\dfrac{BC.\sin B}{\sin A}=\dfrac{5.\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}\approx 18,51.$

Xét tam giác ACD vuông tại D có

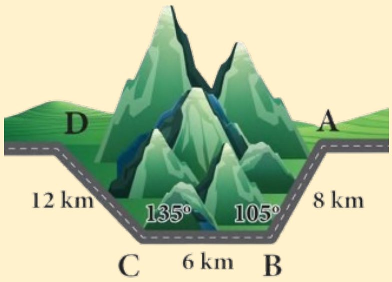
$CD=AC.\sin 40^\circ\approx 11,9$

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $11,9+7=18,9m$



Ví dụ 3.4.

Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong.Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D. Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Lời giải

Dựng CE,BF vuông góc với AD.

Xét tam giác CDE vuông tại E có $\hat{D}=\hat{C}=45^\circ$

$\Rightarrow DE=CD.\sin 45^\circ=6\sqrt{2}\ km$

Xét $\Delta ABF: \hat{B}=15^\circ$

$\Rightarrow AF=AB.\sin 15^\circ=\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)km$

Mặt khác $EF=BC=6km$

$\Rightarrow AD=DE+EF+FA=6+4\sqrt{2}+2\sqrt{6}\approx 16,56\ km$

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm $9,44\ km$ so với đường cũ.