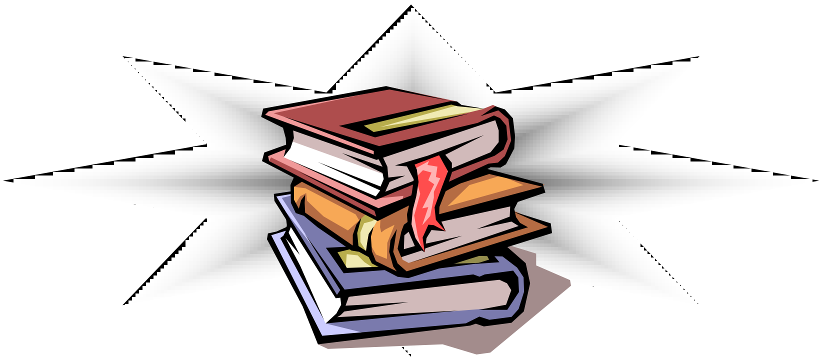
Tailieumontoan.com

Sưu tầm



CÁC BÀI GIẢNG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN HỌC

Thanh Hóa, tháng 8 năm 2019

BÀI GIẢNG VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN HỌC

BÀI GIẢNG 1: ỨNG DỤNG CỦA MỘT BĐT ĐƠN GIẢN

Chứng minh BĐT luôn là những bài toán hấp dẫn. Với bài viết này chúng ta sẽ khám phá một số bài BĐT hay và khó nhờ một BĐT đơn giản trong chương trình toán THCS.

Bài toán xuất phát: *Cho a, b là hai số bất kì và x, y là hai số dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\qquad(*)$$

Chứng minh: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\ge(a+b)^2xy$$
$$\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2\ge 2abxy$$
$$\Leftrightarrow (ay-bx)^2\ge 0.$$

BĐT sau cùng hiển nhiên đúng. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Sử dụng BĐT (*) hai lần, ta được $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (**)

với ba số a, b, c và ba số dương x, y, z bất kì. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Bây giờ, ta sẽ áp dụng hai BĐT trên để chững minh một số bài toán sau.

Bài toán 1. Cho hai số a, b, c bất kì. Chứng minh rằng $a^4+b^4\ge\frac{(a+b)^4}{8}$.

Chứng minh. Sử dụng BĐT (*) hai lần ta có :

$$a^4+b^4=\frac{a^4}{1}+\frac{b^4}{1}\ge\frac{(a^2+b^2)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^4}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài toán 2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chững minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Chứng minh: Sử dụng BĐT (*) hai lần, ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}{2x+y+z}\le\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+y}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+z}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{y}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z}=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$, $\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z.}\right)$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, chú ý tới giả thiết dẫn đến điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài toán 3. Cho 3 số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

(Bất đẳng thức Nasơbit)

Chứng minh: Sử dụng BĐT (**) ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ca}+\frac{c^2}{ca+cb}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Bây giờ chúng ta cần chứng minh BĐT: $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{3}{2}$.

Nhưng BĐT này tương đương với

$$2(a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$$

Đây là BĐT luôn đúng. Từ đó suy ra BDT cần phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 4. Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

(Vô địch Quốc tế năm 1995 tổ chức tại Canađa)

Chứng minh: Sử dụng BĐT (**) với lưu ý rằng $a^2b^2c^2 = 1$ ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$

$$\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh $ab + bc + ca \ge 3$. Thật vậy, áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương a, b, c kết hợp với giả thiết $abc = 1$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài tập vận dụng:

Bài 1. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge a+b+c.$$

HD:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)+\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right)$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}+\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=a+b+c$$

Bài 2. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng:

a) $$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\ge\frac{1}{2}$$

HD:

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}=\frac{x^2}{x^2+2yx+3zx}+\frac{y^2}{y^2+2zy+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+3(xy+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)^2}=\frac{1}{2}$$

b) $$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\ge\frac{3}{4}.$$

HD:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+\frac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{3}{4}$$

Bài 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $3(ab+bc+ca)=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}=\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-abc+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c}$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)+(a+b+c)}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac+1)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac+3ab+3bc+3ca)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a+b+c)^2}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{a+b+c}$$

Bài 4. Cho các số dương a, b, c, d, e . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\ge\frac{5}{2}.$$

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+bd}+\frac{c^2}{cd+ec}+\frac{d^2}{ed+ad}+\frac{e^2}{ae+be}\ge\frac{(a+b+c+d+e)^2}{a(b+c+d+e)+b(c+d+e)+c(d+e)+de}$$

Ta đi chứng minh:

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{a(b+c+d+e)+b(c+d+e)+c(d+e)+de}\ge\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c+d+e)^2\ge 5\left[a(b+c+d+e)+b(c+d+e)+c(d+e)+de\right]$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-2\left[a(b+c+d+e)+b(c+d+e)+c(d+e)+de\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-$$

Vậy BĐT được chứng minh

Bài 5. Cho 3 số dương x, y, z. Chứng minh rằng :

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}=\frac{4}{2(x+y)}+\frac{4}{2(y+z)}+\frac{4}{2(z+x)}\ge\frac{6^2}{4(x+y+z)}=\frac{9}{x+y+x}.$$

BÀI GIẢNG 2: TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN, CƠ BẢN ĐỂ PHÁT TRIỂN THÀNH CÁC BÀI TOÁN MỚI.

Khi chứng minh BĐT, ta thường phải dùng đến nhiều phương pháp khác nhau. Đôi khi, việc ta sử dụng những BĐT đơn giản, quen thuộc lại mang đến hiệu quả bật ngờ.

Bài toán cơ sở. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

- ✓ $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$ (1)
- ✓ $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ (2)
- ✓ $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (3)
- ✓ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)$ (4)
- ✓ $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$ (5)
- ✓ $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$ (6)

Bài toán. Cho a, b, c là các số thực dương:

a) thỏa mãn điều kiện a + b + c = abc. Chứng minh rằng: $a+b+c \ge 3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ (2)

b) Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$ (3)

c) thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{abc} \ge 3+\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+1} \quad (4)$$

d) thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}$.

Lời giải:

a) Ta có: (2) $\Leftrightarrow a+b+c \ge 3\dfrac{bc+ca+ab}{abc}$

$$\Leftrightarrow a+b+c \ge 3\frac{bc+ca+ab}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \quad \text{(Do giả thiết } a+b+c=abc)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do (1). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

b) Áp dụng trực tiếp (1), ta có:

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

$$\ge abbc+bcca+caab=abc(a+b+c)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

c) Ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{ab}-1\right)+\left(\frac{1}{bc}-1\right)+\left(\frac{1}{ca}-1\right) \geq \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-ab}{ab}+\frac{1-bc}{bc}+\frac{1-ca}{ca} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca+a^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca+b^2}{b^2}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca+c^2}{c^2}}$$

(do giả thiết ab + bc + ca = 1)

$$\Leftrightarrow \frac{bc+ca}{ab}+\frac{ca+ab}{bc}+\frac{ab+bc}{ca} \geq \sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{a^2}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+b)}{b^2}}+\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a+b)}{ab}+\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca} \geq \sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{a^2}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+b)}{b^2}}+\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{c^2}}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{c(a+b)}{ab}}$; $y = \sqrt{\frac{a(b+c)}{bc}}$; $z = \sqrt{\frac{b(c+a)}{ca}}$ với x, y, z > 0.

Bất đẳng thức cuối được chuyển về dạng của (1).

Suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\text{d) } S^2 = \left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\left(\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}+\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}\right)$$

$$= \left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\geq (a^2+b^2+c^2)+2(a^2+b^2+c^2) \qquad \text{(do áp dụng (1))}$$

$$= 3(a^2+b^2+c^2) = 3$$

(Do giả thiết $a^2+b^2+c^2 = 1$)

Mà S > 0 nên $S \geq \sqrt{3}$. Min $S = \sqrt{3}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Nhận xét.

1) Trong ví dụ a) và c), ta thay thế giả thiết vào bất đẳng thức cần chứng minh một cách thích hợp để chúng có những hân thức mà tử và mẫu cùng bậc.
2) Giả thiết ab + bc + ca = 1 thường được dùng trong bài toán chứng minh BĐT hay tìm cực trị mà dạng biến đổi thông thường của nó là $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$.

Bây giờ, hãy vận dụng BĐT (1) trên để chứng minh hoặc tìm cực trị của các bài toán dưới đây.

Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}.$$

HD Giải:

Áp dụng: $\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)$

Ta có: $3\left(a+b+c\right)=3abc\left(a+b+c\right)\le\left(ab+bc+ca\right)^2$

Do đó: $\dfrac{3}{a+b+c}=\dfrac{9}{3abc\left(a+b+c\right)}\ge\dfrac{9}{\left(ab+bc+ca\right)^2}$

Suy ra: $1+\dfrac{3}{a+b+c}\ge 1+\dfrac{9}{\left(ab+bc+ca\right)^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{9}{\left(ab+bc+ca\right)^2}}=\dfrac{6}{ab+bc+ca}$

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\dfrac{ab^2+bc^2+ca^2}{(ab+bc+ca)^2}$.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}.$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}\ge\frac{9}{2}.$$

BÀI GIẢNG 3: ĐỔI BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BĐT.

Có rất nhiều phương pháp chứng minh BĐT. Mỗi bài toán cũng có nhiều phương pháp để chứng minh. Bài viết này trình bày về một phương pháp được cho là khá thú vị và nếu tinh ý, chúng ta có thể sáng tạo thêm các bài toán khó hơn.

1. Đổi biến theo mẫu thức

Đặt mỗi mẫu có trong BĐT là một biến mới, rồi đưa BĐT đã cho hoàn toàn theo các biến mới này. Đây là một kỹ thuật được sử dụng khá phổ biến khi chứng minh BĐT. Chúng ta lần lượt xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{3a-2b-2c}{b+c-a}+\frac{3b-2c-2a}{c+a-b}+\frac{3c-2a-2b}{a+b-c}\ge -3$$

Lời giải:

Đặt $x=b+c-a,y=c+a-b,z=a+b-c\Rightarrow a=\frac{y+z}{2},b=\frac{z+x}{2},c=\frac{x+y}{2}\left(x,y,z>0\right)$

Khi đó: $P\ge -3\Leftrightarrow \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}-6\ge -3$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 6$$

Theo BĐT Cô-si ta có: $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}+2\sqrt{\frac{x}{z}.\frac{z}{x}}=6$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 2. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{3a+b+c}+\frac{b}{3b+c+a}+\frac{c}{3c+a+b}\le \frac{3}{5}$

(Đề thi HSG môn Toán lớp 9- Quảng Ninh-2010)

Lời giải:

Đặt $x=3a+b+c,y=3b+c+a,z=3c+a+b$.

Ta tính được: $a=\frac{4x-y-z}{10},b=\frac{4y-z-x}{10},c=\frac{4z-x-y}{10}\left(x,y,z>0\right)$

Khi đó BĐT đa cho được viết lại như sau:

$\frac{4x-y-z}{10x}+\frac{4y-z-x}{10y}+\frac{4z-x-y}{10z}\le \frac{3}{5}\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6\Rightarrow$ đpcm.(theo trên)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 3. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{25b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}>2$.

Giải:

Đặt: $x=b+c,y=c+a,z=a+b$.

Từ đó tính được: $a=\frac{y+z-x}{2},b=\frac{z+x-y}{2},c=\frac{x+y-z}{2}\left(x,y,z>0\right)$

Vì vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{25b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}>2\Leftrightarrow\frac{y+z-x}{2x}+\frac{25\left(z+x-y\right)}{2y}+\frac{4\left(x+y-z\right)}{2z}>2$

$$\Leftrightarrow\frac{y+z}{2x}+\frac{25z+25x}{2y}+\frac{2x+2y}{z}-\frac{1}{2}-\frac{25}{2}-2>2\Leftrightarrow\left(\frac{y}{2x}+\frac{25x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{25z}{2y}+\frac{2y}{z}\right)>17$$

Mặt khác áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{y}{2x}+\frac{25x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{25z}{2y}+\frac{y}{2z}\right)\geq2\sqrt{\frac{y}{2x}.\frac{25x}{2y}}+2\sqrt{\frac{z}{2x}.\frac{2x}{z}}+2\sqrt{\frac{25z}{2y}.\frac{2y}{z}}=2.\frac{5}{2}+2.1+2.5$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$\frac{y}{2x}=\frac{25x}{2y},\frac{z}{2x}=\frac{2x}{z},\frac{25z}{2y}=\frac{2y}{z}\Rightarrow y^2=25x^2,z^2=4x^2,4y^2=25z^2$ vô lí vì $x,y,z>0$.

Từ đó suy ra $\left(\frac{y}{2x}+\frac{25x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{25z}{2y}+\frac{2y}{z}\right)>17\Rightarrow$ đpcm.

● *Qua ba ví dụ trên chúng ta thấy được hướng đi rất rõ ràng của phép đổi biến này. Để thấy rõ vai trò của kỹ thuật này, ta tiếp tục xét bài toán thi học sinh giỏi lớp 9 của tỉnh Phú Thọ năm học 2010-2011 thông qua ví dụ sau:*

Ví dụ 4. Cho $a,b,c>0$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{4a}{a+b+2c}+\frac{b+3c}{2a+b+c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

(Đề thi HSG Toán lớp 9 Tỉnh Phú Thọ-2011)

Lời giải:

Đặt: $x=a+b+2c,y=2a+b+c,z=a+b+3c\left(x,y,z>0\right)$.

Từ đó tính được: $a=z+y-2x,b=5x-y-3z,c=z-x$

Biểu thức đã cho trở thành $A=\frac{4\left(z+y-2x\right)}{x}+\frac{\left(5x-y-3z\right)+3\left(z-x\right)}{y}-\frac{8\left(z-x\right)}{z}$

$$=\frac{4z+4y}{x}-8+\frac{2x}{y}-1+\frac{8x}{z}-8=\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)-17$$

Mặt khác áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)\geq 2\sqrt{\frac{4y}{x}.\frac{2x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{x}.\frac{8x}{z}}=2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=12\sqrt{2}$$

Do đó $A\geq 12\sqrt{2}-17$. Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{4y}{x}=\frac{2x}{y},\frac{4z}{x}=\frac{8x}{z}\Leftrightarrow x=y\sqrt{2},z=x\sqrt{2}=2y\Leftrightarrow x=k\sqrt{2},y=k,z=2k\left(k>0\right)$$

Vậy $\min A=12\sqrt{2}-17$ khi $a=\left(3-2\sqrt{2}\right)k,b=\left(5\sqrt{2}-7\right)k,c=\left(2-\sqrt{2}\right)k,\left(k>0\right)$

● *Sau đây là một số bài toán củng cố cho phương pháp nêu trên:*

1. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2b+2c-a}+\frac{b}{2c+2a-b}+\frac{c}{2a+2b-c}\geq 1$$

2. Cho Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{9b}{c+a}+\dfrac{16c}{a+b}>6$.

3. Cho các số $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\geq\frac{51}{7}$$

(Đề thi HSG môn Toán lớp 9 Tỉnh Bến Tre-2009)

4. Cho $a,b,c>0$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$ *(China-2004)*

3.2. Đổi biến khi tích các biến bằng k^3

Đây là một kỹ thuật đổi biến rất hiệu quả, giúp chúng ta giải quyết nhiều bài toán hay và khó. Tuy vậy ở đây cũng có nhiều cách đổi biến khác nhau, tùy theo tình huống cụ thể ta chọn cách làm thích hợp. Dưới đây xin trình bày một số trường hợp cụ thể:

3.2.1. Với $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=k^3\end{cases}$ ta có thể đổi biến như sau: $a=\dfrac{k}{x},b=\dfrac{k}{y},c=\dfrac{k}{z}\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\xyz=1\end{cases}$

Trong thực tế ta hay gặp $k=1$, đây là tình huống gặp khá nhiều ngay cả các kỳ thi lớn như IMO. Ta xét một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\frac{1}{b^3\left(c+a\right)}+\frac{1}{c^3\left(a+b\right)}\geq\frac{3}{2}$$ *(IMO-1995)*

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$, ta đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\xyz=1\end{cases}$

Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{x^3yz}{y+z}+\frac{y^3zx}{z+x}+\frac{z^3xy}{x+y}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=x\left(1\right)$$

$$\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\ge2\sqrt{\frac{y^2}{z+x}.\frac{z+x}{4}}=y\left(2\right)$$

$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge2\sqrt{\frac{z^2}{x+y}.\frac{x+y}{4}}=z\left(3\right)$$

Lấy $\left(1\right)+\left(2\right)+\left(3\right)$ theo vế ta được: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{1}{2}\left(x+y+z\right)\ge\left(x+y+z\right)$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2}\left(x+y+z\right)\left(4\right)$$

Lại áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương ta có: $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}=3\left(5\right)$

Từ $\left(4\right),\left(5\right)\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 6. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{yz}{x^2\left(y+z\right)}+\frac{zx}{y^2\left(z+x\right)}+\frac{xy}{z^2\left(x+y\right)}$$

Lời giải:

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$. Từ giả thiết suy ra $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$. Khi đó $P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

Làm tương tự bài toán trên ta có $\min P=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

● *Hai ví dụ trên cho thấy rõ phần nào ứng dụng của phép đổi biến này. Ví dụ sau với cách phát biểu lạ hơn, nhưng thông qua một vài biến đổi đơn giản chúng ta lại có cách đổi biến quen thuộc:*

Ví dụ 7. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc+a+b=3ab$. Chứng minh rằng:

$$P=\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}}+\sqrt{\frac{b}{bc+c+1}}+\sqrt{\frac{a}{ca+c+1}}\ge\sqrt{3}$$

(Đề thi HSG môn Toán lớp 9 Tỉnh Phú Thọ-2012)

Lời giải:

Ta có: $abc+a+b=3ab\Leftrightarrow c+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$. Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=c\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=3\end{cases}$

Khi đó:

$$P=\sqrt{\frac{1}{x+y+xy}}+\sqrt{\frac{1}{z+zy+y}}+\sqrt{\frac{1}{z+zx+x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{z+zy+y}}+\frac{1}{\sqrt{z+zx+x}}$$

Áp dụng BĐT: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\ge\frac{9}{m+n+p}\left(m,n,p>0\right)$ ta có:

$$P\ge\frac{9}{\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}}$$

Áp dụng BĐT cơ bản: $\left(u+v+w\right)^2\le3\left(u^2+v^2+w^2\right)$ ta có:

$$\left(\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\right)^2\le3\left(x+y+xy+z+zy+y+z+zx+x\right)$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\right)^2\le3\left[2\left(x+y+z\right)+\left(xy+yz+zx\right)\right]$$

Không khó khăn lắm ta chứng minh được $\left(xy+yz+zx\right)\le\frac{1}{3}\left(x+y+z\right)^2$

Do đó: $\left(\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\right)^2\le3\left(2.3+3\right)=27$

$$\Rightarrow\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\le3\sqrt{3}$$

Từ đó suy ra: $P\ge\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 8. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.Chứng minh rằng:

$$P=\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le1$$ *(Baltic Way 2005)*

Lời giải:

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\xyz=1\end{cases}$. Khi đó: $P=\frac{x}{2x^2+1}+\frac{y}{2y^2+1}+\frac{z}{2z^2+1}$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$2x^2+1=x^2+\left(x^2+1\right)\geq x^2+2x$$
$$2y^2+1=y^2+\left(y^2+1\right)\geq y^2+2y$$
$$2z^2+1=z^2+\left(z^2+1\right)\geq z^2+2z$$

Do đó $P\leq \dfrac{x}{x^2+2x}+\dfrac{y}{y^2+2y}+\dfrac{z}{z^2+2z}\Rightarrow P\leq \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}$

Ta cần chứng minh BĐT: $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}\leq 1(1)$

Với $x,y,z>0$ ta có:

$$(1)\Leftrightarrow (y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)+(x+2)(y+2)\leq (x+2)(y+2)(z+2)$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+4(x+y+z)+12\leq xyz+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+8$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq 3(\text{do } xyz=1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có:

$$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{xy.yz.zx}=3(\text{do } xyz=1)\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

● *Như vậy với kỹ thuật trên kết hợp với việc sử dụng thêm một số BĐT khác chúng ta tìm được lời giải của một lớp các bài toán tương đối khó.Với phương pháp như trên chúng ta có thể giải được một số bài toán sau:*

1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\geq \frac{3}{2}$$

2. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq \frac{ab+bc+ca}{2}$$

3.2.2. Với $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=k^3\end{cases}$ ta có thể đổi biến như sau: $a=\dfrac{kx}{y},b=\dfrac{ky}{z},c=\dfrac{kz}{x}(x,y,z>0)$

Lí giải cho phép đổi biến trên như sau:

Vì $a,b,c>0\Rightarrow$ Tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\dfrac{kx}{y},b=\dfrac{ky}{z}$.

Do $abc=k^3\Rightarrow \dfrac{kx}{y}.\dfrac{ky}{z}.c=k^3\Leftrightarrow c=\dfrac{kz}{x}$

Phép đổi biến này thực sự là một biện pháp hữu hiệu khi chứng minh nhiều BĐT tương đối khó. BĐT với biến mới giúp ta có nhiều sự lựa chọn hơn trong chứng minh.

Ví dụ 9. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1 \qquad \textit{(IMO-2000)}$$

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$ nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$.

Khi đó BĐT được viết lại:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\le 1 \Leftrightarrow (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le xyz$$

Ta có: $\begin{cases}(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)=x+y+z\ge 0\\(x+y-z)+(y+z-x)=2y\ge 0\\(y+z-x)+(z+x-y)=2z\ge 0\\(z+x-y)+(x+y-z)=2x\ge 0\end{cases}$ do $x,y,z\ge 0$.

nên trong 3 tổng $(x+y-z),(y+z-x),(z+x-y)$ chỉ có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:

1) $(x+y-z),(y+z-x),(z+x-y)\ge 0$

Ta có: $\begin{cases}x^2\ge x^2-(y-z)^2=(x-y+z)(x+y-z)\\y^2\ge y^2-(z-x)^2=(y+z-x)(y-z+x)\\z^2\ge x^2-(x-y)^2=(z-x+y)(z+x-y)\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2y^2z^2\ge (x+y-z)^2(y+z-x)^2(z+x-y)^2$$

$$\Rightarrow xyz\ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

2) Hai trong 3 tổng đó lớn hơn bằng 0, tổng còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 0

$$\Rightarrow xyz\ge 0\ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

Từ các trường hợp trên suy ra bài toán được chứng minh.

● *Đây là một trong những bất đẳng thức rất quan trọng, từ bất đẳng thức này chúng ta có thể giải quyết được một số bài toán hay và khó. Chúng ta sẽ tìm hiểu ứng dụng của nó trong phần khác. Tiếp theo xét một số vị dụ khác để thấy rõ tác dụng của phương pháp nêu trên:*

Ví dụ 10. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$ nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$.

Khi đó BĐT đã cho trở thành: $\frac{zx}{xy+yz}+\frac{xy}{zx+yz}+\frac{yz}{zx+xy}\ge\frac{3}{2}$

Đây là BĐT Nesbit's quen thuộc. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 11. Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\le 1.$$

Lời giải:

BĐT được viết lại: $\frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\le 1$. Đặt $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\ xyz=1\end{cases}$

Khi đó cần chứng minh BĐT: $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le 1 \quad (1)$

Mặt khác:

$$(1)\Leftrightarrow(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)+(x+2)(y+2)\le(x+2)(y+2)(z+2)$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+4x+4y+4z+12\le xyz+4x+4y+4z+2xy+2yz+2zx+8$$

$$\Leftrightarrow 3\le xy+yz+zx \text{ (do } xyz=1)$$

Theo BĐT Cô-si ta có: $xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{xy.yz.zx}=3 \text{ (do } xyz=1) \Rightarrow$ đpcm

Ví dụ 12. Cho các số thực dương $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$M=\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}=\frac{1}{x^2+y^2+2x+2}\le\frac{1}{2xy+2x+2}$ do $x,y>0$ và $x^2+y^2\ge 2xy$.

Tương tự: $\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}\le\frac{1}{2yz+2y+2}$; $\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2zx+2z+2}$

Do đó: $M\le\frac{1}{2xy+2x+2}+\frac{1}{2yz+2y+2}+\frac{1}{2zx+2z+2}=P$

Vì $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$ nên tồn tại $a,b,c>0$ sao cho $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$.

Khi đó $P=\dfrac{1}{2.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}+2.\frac{a}{b}+2}+\dfrac{1}{2.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}+2.\frac{b}{c}+2}+\dfrac{1}{2.\frac{c}{a}.\frac{a}{b}+2.\frac{c}{a}+2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{ab+bc+ca}+\frac{ca}{ab+bc+ca}+\frac{ab}{ab+bc+ca}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

• *Qua bài toán này chúng ta thấy được vẻ đẹp của phép đổi biến trên, nó không chỉ áp dụng cho việc chứng minh các BĐT mà còn giải quyết được một số bài toán về chứng minh đẳng thức. Chẳng hạn xét thêm ví dụ sau:*

Ví dụ 13. Cho *a, b,* c là ba số thực thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(b+1-\frac{1}{c}\right)\left(c+1-\frac{1}{a}\right)$$

Lời giải:

Từ giả thiết $abc=1\Rightarrow a,b,c\neq 0\Rightarrow$ có thể đặt $a=\dfrac{x}{y},b=\dfrac{y}{z},c=\dfrac{z}{x}$ với $x,y,z\neq 0$

Vế trái được viết lại như sau:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)=\frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{xyz}\quad (1)$$

Vế phải trở thành:

$$\left(\frac{x}{y}+1-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}+1-\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}+1-\frac{y}{x}\right)=\frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{xyz}\quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra đẳng thức đã cho được chứng minh.

• *Trong một số tình huống việc đổi biến tương tự như trên nhưng khéo léo hơn chẳng hạn: Với* $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $abc=1$ *đặt:* $a=\dfrac{x^2}{y^2},b=\dfrac{y^2}{z^2},c=\dfrac{z^2}{x^2}$, *với* $x,y,z>0$.

Ví dụ 14. Cho *a, b,* c là ba số thực dương thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$a\left(b^2-\sqrt{b}\right)+b\left(c^2-\sqrt{c}\right)+c\left(a^2-\sqrt{a}\right)\geq 0$$

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thoả mãn *abc* = 1nên ta đặt: $a=\dfrac{x^2}{y^2},b=\dfrac{y^2}{z^2},c=\dfrac{z^2}{x^2}$ với $x,y,z>0$

BĐT trở thành: $\dfrac{x^2}{y^2}\left(\dfrac{y^4}{z^4}-\dfrac{y}{z}\right)+\dfrac{y^2}{z^2}\left(\dfrac{z^4}{x^4}-\dfrac{z}{x}\right)+\dfrac{z^2}{x^2}\left(\dfrac{x^4}{y^4}-\dfrac{x}{y}\right)\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{z^4}+\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{x^2}{yz}-\frac{y^2}{zx}-\frac{z^2}{xy}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2y^2z^2}\left(\frac{x^2y^2}{z^4}+\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{x^2}{yz}-\frac{y^2}{zx}-\frac{z^2}{xy}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^6}+\frac{1}{y^6}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{x^3y^3}-\frac{1}{y^3z^3}-\frac{1}{z^3x^3}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)^2+\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{z^3}\right)^2+\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{x^3}\right)^2\ge 0$$

Từ đó dẫn đến BĐT đã cho được chứng minh.

• *Trong một số tình huống việc đổi biến:* $a=\frac{kx}{y}, b=\frac{ky}{z}, c=\frac{kz}{x}$ *gặp khá nhiều khó khăn khi chứng minh BĐT tiếp theo. Lúc đó chúng ta có thể lựa chọn giải pháp đổi biến xoay vòng lại giữa các biến* x, y, z *chẳng hạn:* $a=\frac{kx}{y}, b=\frac{kz}{x}, c=\frac{ky}{z}$.

Ví dụ 15. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+d)}+\frac{1}{d(1+a)}\ge 2$$

Lời giải:

Vì $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $abcd=1$ nên ta đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{z}{x}, c=\frac{t}{z}, d=\frac{y}{t}$ với $x,y,z,t>0$.

Khi đó BĐT đã cho trở thành: $A=\frac{y}{x+z}+\frac{x}{z+t}+\frac{z}{t+y}+\frac{t}{y+x}\ge 2$

Ta có $A=\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{x^2}{zx+xt}+\frac{z^2}{tz+yz}+\frac{t^2}{yt+tx}$. Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left(\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{x^2}{zx+xt}+\frac{z^2}{tz+yz}+\frac{t^2}{yt+tx}\right)\left[(xy+yz)+(zx+xt)+(tz+yz)+(yt+tx)\right]\ge(x+y+z+$$

Suy ra: $A\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{(xy+yz)+(zx+xt)+(tz+yz)+(yt+tx)}$

Ta chứng minh BĐT: $\frac{(x+y+z+t)^2}{(xy+yz)+(zx+xt)+(tz+yz)+(yt+tx)}\ge 2(1)$

Thật vậy, BĐT $(1)\Leftrightarrow(x+y+z+t)^2\ge 2\left[(xy+yz)+(zx+xt)+(tz+yz)+(yt+tx)\right]$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2\ge 2(yz+zt)\Leftrightarrow(y-z)^2+(z-t)^2\ge 0.\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Ví dụ 16. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$ nên ta đổi biến: $a=\sqrt{\frac{x}{y}}, b=\sqrt{\frac{z}{x}}, c=\sqrt{\frac{y}{z}}$ với $x,y,z>0$.

Khi đó BĐT đã cho được viết lại như sau: $\frac{x}{z+\sqrt{xy}}+\frac{y}{x+\sqrt{yz}}+\frac{z}{y+\sqrt{xz}}\ge\frac{3}{2}$

Xét $P=\frac{x}{z+\sqrt{xy}}+\frac{y}{x+\sqrt{yz}}+\frac{z}{y+\sqrt{xz}}$. Theo BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$P=\frac{x}{z+\sqrt{xy}}+\frac{y}{x+\sqrt{yz}}+\frac{z}{y+\sqrt{xz}}\ge\frac{x}{z+\frac{x+y}{2}}+\frac{y}{x+\frac{y+z}{2}}+\frac{z}{y+\frac{z+x}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}P\ge\frac{x^2}{x^2+xy+2zx}+\frac{y^2}{y^2+yz+2xy}+\frac{z^2}{z^2+zx+2yz}$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta thu được:

$$\frac{1}{2}P\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+xy+2zx+y^2+yz+2xy+z^2+zx+2yz}=\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx}$$

Cuối cùng ta cần chứng minh BĐT: $\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx}\ge\frac{3}{4}(1)$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 4(x+y+z)^2\ge 3(x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx)$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\ge 3(x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx)$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ đúng với mọi $x,y,z>0\Rightarrow$ đpcm.

● *Với phương pháp như trên chúng ta một số bài toán tương tự:*

1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{2}$$

2. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

3. Cho bốn số dương x,y,z,t thỏa mãn điều kiện $xyzt=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\ge 1.$$ *(China IMO TST 2005)*

3.2.3. Với $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=k^3\end{cases}$ ta có thể đổi biến như sau: $a=\frac{kyz}{x^2},b=\frac{kzx}{y^2},c=\frac{kxy}{z^2}(x,y,z>0)$

$$\text{hoặc } a=\frac{kx^2}{yz},b=\frac{ky^2}{zx},c=\frac{kz^2}{xy}(x,y,z>0)$$

Hai phép đổi biến này cũng đem lại cho chúng ta thêm lựa chọn khi chứng minh BĐT, kết hợp với các BĐT đã biết một số bài toán BĐT khó được giải quyết.

Ví dụ 17. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$K=\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1$$ *(Vasile Cirtoaje)*

Lời giải:

Từ giả thiết ta có thể đặt $x=\frac{bc}{a^2},y=\frac{ca}{b^2},z=\frac{ab}{c^2}$ với $a,b,c>0$.

Khi đó $K=\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$K.\left[\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)\right]\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow K\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)}$$

$$\Rightarrow K\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab}$$

Vậy cần chứng minh BĐT: $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab}\ge 1(1)$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\ge a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương:

$$a^2b^2+b^2c^2\ge 2\sqrt{a^2b^2.b^2c^2}=2b^2ac$$

$$b^2c^2+c^2a^2\ge 2\sqrt{b^2c^2.c^2a^2}=2c^2ab$$

$$c^2a^2+a^2b^2\ge 2\sqrt{c^2a^2.a^2b^2}=2a^2bc$$

Cộng các vế của 3 BĐT trên suy ra:

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge 2\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right)\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

Do đó (1) được chứng minh. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Rightarrow x=y=z=1$

Ví dụ 18. Cho 3 số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge 1$$ *(Phạm Văn Thuận)*

Lời giải:

Từ giả thiết ta có thể đặt $a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{zx}{y^2},z=\frac{xy}{z^2}$ với $x,y,z>0$.

Khi đó $P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}$

$$=\frac{x^4}{\left(x^2+yz\right)^2}+\frac{y^4}{\left(y^2+zx\right)^2}+\frac{z^4}{\left(z^2+xy\right)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+k^2\right)\ge\left(m^2+nk\right)^2\Rightarrow\frac{1}{\left(m^2+nk\right)^2}\ge\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+k^2\right)}(*)$$

Áp dụng BĐT $(*)$ ta được:

$$P\ge\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)\left(y^2+x^2\right)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)\left(z^2+y^2\right)}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}$$

$$P\ge\frac{x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}$$

Mặt khác theo BĐT trên ta có:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\ge\left(x^2+yz\right)^2\\ \left(y^2+z^2\right)\left(y^2+x^2\right)\ge\left(y^2+zx\right)^2\\ \left(z^2+y^2\right)\left(z^2+x^2\right)\ge\left(z^2+xy\right)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2\left(y^2+z^2\right)^2\left(z^2+x^2\right)^2\ge\left(x^2+yz\right)^2\left(y^2+zx\right)^2\left(z^2+xy\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)\ge\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)\text{ do } x,y,z>0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2y^2z^2}{(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)} \ge \frac{2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}$$

Do đó $P \ge \frac{x^4(y^2+z^2)+y^4(z^2+x^2)+z^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)} + \frac{2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x^4y^2+x^4z^2+y^4z^2+y^4x^2+z^4x^2+z^4y^2+2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x^4y^2+x^4z^2+y^4z^2+y^4x^2+z^4x^2+z^4y^2+2x^2y^2z^2}{x^4y^2+x^4z^2+y^4z^2+y^4x^2+z^4x^2+z^4y^2+2x^2y^2z^2} = 1$$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Ví dụ 19. Cho các số thực x, y, z khác 1 và thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \ge 1 \qquad \textit{(IMO-2008)}$$

Lời giải:

Do x, y, z khác 1 và thỏa mãn $xyz=1$ nên ta có thể đặt: $x=\frac{a^2}{bc}, y=\frac{b^2}{ca}, z=\frac{c^2}{ab}$

với $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab) \ne 0$.

Khi đó BĐT cần chứng minh được viết lại như sau:

$$\frac{a^4}{(a^2-bc)^2}+\frac{b^4}{(b^2-ca)^2}+\frac{c^4}{(c^2-ab)^2} \ge 1$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left[(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\right]\left[\frac{a^4}{(a^2-bc)^2}+\frac{a^4}{(b^2-ca)^2}+\frac{a^4}{(c^2-ab)^2}\right] \ge (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{(a^2-bc)^2}+\frac{a^4}{(b^2-ca)^2}+\frac{a^4}{(c^2-ab)^2} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2}$$

Ta cần chứng minh BĐT: $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2} \ge 1 (1)$

Thật vậy, BĐT $(1) \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \ge (a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge a^4+b^4+c^4+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2(a^2bc+b^2ca+c^2ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+b^2ca+c^2ab) \ge 0 \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \ge 0$$

Từ đó suy ra BĐT đã cho được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2+2x+4}+\frac{y^2}{y^2+2y+4}+\frac{z^2}{z^2+2z+4}\ge 1$$

Lời giải:

Đặt $x=\frac{2a^2}{bc}, y=\frac{2b^2}{ca}, z=\frac{2c^2}{ab}$. Khi đó BĐT đã cho được viết dưới dạng:

$$P=\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}\ge 1$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left[\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)\right].P\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)}$$

Vậy chỉ cần chứng minh BĐT:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)}\ge 1 (1)$$

Thật vậy

$$(1)\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge a^4+b^4+c^4+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab\ge 0\Leftrightarrow 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2b^2ca-2c^2ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(ab-ac)^2+(bc-ba)^2+(ca-cb)^2\ge 0$$

Do đó BĐT đã cho được chứng.

● *Những ví dụ trên cho thấy hiệu quả của phép đổi biến nêu trên là rất lớn. Với cách làm tương tự chúng ta có một số bài toán sau:*

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)}\ge\frac{1}{2}$$

2. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\ge 1$$

3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}$$

3.3. Sử dụng phép đổi biến giải quyết một số bài toán BĐT, GTNN-GTLN trong các đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, THPT chuyên.

Dưới đây trình bày một số ứng dụng của phép đổi biến khác trong việc giải quyết một số bài thi tuyển sinh lớp 10 THPT, THPT chuyên.

Bài 1. Cho hai số thực $x,y\ne 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\ge 3$.

(ĐTTS lớp 10 chuyên Toán, ĐHKHTN-2004)

Lời giải:

Vì $x,y\ne 0$ nên BĐT đã cho được biến đổi thành: $\dfrac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2y^2}\ge 5$

Đặt $t=\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2y^2}\ge\dfrac{4x^2y^2}{x^2y^2}=4$. Do vậy cần chứng minh: $P=\dfrac{4}{t}+t\ge 5(1)$ với $t\ge 4$.

BĐT (1) có nhiều cách chứng minh. Ở đây ta sử dụng BĐT Cô-si:

$$P=\frac{4}{t}+\frac{t}{4}+\frac{3}{4}t\ge 2\sqrt{\frac{4}{t}.\frac{t}{4}}+\frac{3}{4}t\Rightarrow P\ge 2.1+\frac{3}{4}.4=5 \text{ do } t\ge 4.$$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=4\Leftrightarrow x=\pm y$.

Bài 2. Cho $x,y,z>2$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

Chứng minh rằng: $(x-2)(y-2)(z-2)\le 1$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2005)

Lời giải:

Đặt $a=x-2,b=y-2,c=z-2\Rightarrow x=a+2,y=b+2,z=c+2(a,b,c>0)$.

Ta cần chứng minh BĐT: $abc\le 1$

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1$

$$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)=(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$$
$$\Leftrightarrow abc+ab+bc+ca=4$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$abc+ab+bc+ca=4\ge abc+3\sqrt[3]{ab.bc.ca}\Rightarrow abc+3\sqrt[3]{abc}-4\le 0$$

Đặt $t=\sqrt[3]{abc}\left(t>0\right)\Rightarrow$ có $t^3+3t-4\le 0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t^2+t+4\right)\le 0$

Mặt khác: $t^2+t+4=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0,\forall t$. Do đó: $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $ab=cd=1$.

Chứng minh rằng: $\left(a+b\right)\left(c+d\right)+4\ge 2\left(a+b+c+d\right)$

(ĐTTS lớp 10 THPT Năng Khiếu ĐHQG HCM-2007)

Lời giải:

Đặt $u=a+b,v=c+d$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}=2,c+d\ge 2\sqrt{cd}=2$ do đó $u\ge 2,v\ge 2$.

BĐT cần chứng minh được viết lại như sau:

$uv+4\ge 2\left(u+v\right)\Leftrightarrow\left(u-2\right)\left(v-2\right)\ge 0$ đúng do $u\ge 2,v\ge 2$.

Từ đó suy ra BĐT đã được chứng minh.

Bài 4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $1+\dfrac{3}{ab+bc+ca}\ge\dfrac{6}{a+b+c}$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Vĩnh Phúc 2010)

Lời giải:

Đặt $t=a+b+c\left(t>0\right)$. Dễ dàng chứng minh được BĐT:

$\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}t^2$. Suy ra: $\dfrac{3}{ab+bc+ca}\ge\dfrac{3}{\frac{1}{3}t^2}=\dfrac{9}{t^2}$

Ta sẽ chứng minh BĐT: $1+\dfrac{9}{t^2}\ge\dfrac{6}{t}\Leftrightarrow\dfrac{9}{t^2}-\dfrac{6}{t}+1\ge 0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{t}-1\right)^2\ge 0$. BĐT này hiển nhiên đúng. Từ đó suy ra BĐT đã cho được chứng minh.

Bài 5. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng: $\dfrac{9}{a+b+c}-\dfrac{1}{abc}\le 2$

Lời giải:

Đặt $t=a+b+c\left(t>0\right)$. Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{t}{3}\Rightarrow abc\le\dfrac{t^3}{27}$

Khi đó: $\dfrac{9}{a+b+c}-\dfrac{1}{abc}\le\dfrac{9}{t}-\dfrac{27}{t^3}$.

Vậy chỉ cần chứng minh BĐT: $\dfrac{9}{t}-\dfrac{27}{t^3}\le 2\Leftrightarrow\dfrac{27}{t^3}+2\ge\dfrac{9}{t}$

Thậy vậy

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương ta có: $\frac{27}{t^3}+2=\frac{27}{t^3}+1+1\ge 3.\sqrt[3]{\frac{27}{t^3}.1.1}=\frac{9}{t}$

Từ đó suy ra BĐT đã cho được chứng minh.

Bài 6. Cho $x,y>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{(x-1)(y-1)}$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Toán, ĐHKHTN-2004)

Lời giải:

Ta có $P=\frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)}=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$

Đặt $\begin{cases}a=x-1\\ b=y-1\end{cases}(a,b>0)$. Khi đó $P=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}$

Áp BĐT cơ bản: $(m+n)^2\ge 4mn$, ta có: $P=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\ge\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}$

Mặt khác theo BĐT Cô-si ta có: $P\ge\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}.\frac{4b}{a}}=8$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=1\Leftrightarrow x=y=2$

Vậy $\min P=8$ khi $x=y=2$

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A, biết :

$$A=(x-1)^4+(x-3)^4+6(x-1)^2(x-3)^2$$

(ĐTTS lớp 10 TP Hà Nội 2008)

Lời giải:

Đặt $t=(x-1)(x-3)$, Ta có

$(x-1)^2+(x-3)^2=(x-1-x+3)^2+2(x-1)(x-3)=4+2t$

Mặt khác:

$(x-1)^4+(x-3)^4=\left[(x-1)^2+(x-3)^2\right]^2-2(x-1)^2.(x-3)^2=(4+2t)^2-2t^2$

$\Rightarrow(x-1)^4+(x-3)^4=2t^2+16t+16$. Do đó $A=8t^2+16t+16=8(t+1)^2+8\ge 8$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=-1\Leftrightarrow(x-1)(x-3)=-1\Leftrightarrow(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Vậy $\min A=8$ khi $x=2$

Bài 8. Cho số thực x thỏa mãn $x^2+(3-x)^2\ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^4+(3-x)^4+6x^2(3-x)^2$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Toán, ĐHKHTN-2003)

Lời giải:

Đặt $t = x^2 + (3-x)^2 \Rightarrow t \ge 5$

Mặt khác: $t = x^2 + (3-x)^2 = (x+3-x)^2 - 2x(3-x) = 9 - 2x(3-x)$

$\Rightarrow x(3-x) = \dfrac{9-t}{2}$

Do đó

$$P = \left[x^2 + (3-x)^2\right]^2 + 4x^2(3-x)^2 = t^2 + 4.\left(\frac{9-t}{2}\right)^2 = 2t^2 - 18t + 81 = 2\left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

Theo trên $t \ge 5 \Rightarrow t - \dfrac{9}{2} \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow P \ge 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{81}{2} = 41$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 5 \Leftrightarrow x^2 + (x-3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$

Bài toán 1. Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \le abc$. (1)

Lời giải:

Đặt $a + b - c = x; b + c - a = y; c + a - b = z$. (x; y; z là các số tự nhiên > 0)

Suy ra $a = \dfrac{x+z}{2}; b = \dfrac{x+y}{2}; c = \dfrac{y+z}{2}$. Thay vào (1), ta được:

$$xyz \le \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz \qquad (2)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho bộ 2 số dương, ta có:

$x + y \ge 2\sqrt{xy}$; $y + z \ge 2\sqrt{yz}$; $z + x \ge 2\sqrt{zx}$.

Nhân từng vế các BĐT trên ta suy ra (2). Nghĩa là (1) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c hay tam giác đó đều.

Chú ý:

1) Ta có thể sử dụng phương pháp khác để chứng minh BĐT (1). Hầu hết các bài toán có dạng a + b – c; b + c – a; c + a – b đều có chung một hướng giải là đổi biến.
2) Bất đẳng thức (1) có thể mở rộng thành bài toán khó hơn bằng cách xem a; b; c là 3 số thực dương.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn a + b + c = 1.

Chứng minh rằng: $7(ab + bc + ca) \le 2 + 9abc$. (3)

Lời giải:

Đặt x = 1 – a; y = 1 – b; z = 1 – c. Khi đó x, y, z là các số không âm và x + y + z = 2. Bất đẳng thức (3) được viết về dạng như sau :

$7\left[(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-z)(1-x)\right]\le 2+9(1-x)(1-y)(1-z)$

$\Leftrightarrow 7\left[3-2(x+y+z)+xy+yz+zx\right]\le 2+9\left[1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz\right]$

$\Leftrightarrow 10\le 5(x+y+z)+2(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 9xyz\le 2(xy+yz+zx)\Leftrightarrow 9xyz\le (x+y+z)(xy+yz+zx)$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có : $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}>0$

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}>0$$

Nhân các vế tương ứng của hai BĐT trên thì được (4), nghĩa là (4) đúng. Vậy BĐT (3) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z, suy ra $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 3. Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ac}{b^2(a+c)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a}$; $y=\frac{1}{b}$; $z=\frac{1}{c}$ thì x, y, z > 0 và $xyz=1$. Khi đó

$$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}$$

(BĐT Cauchy cho 3 số dương, kết hợp với giả thiết $xyz=1$).

Min $P=\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$, tức là $a=b=c=1$.

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

(Bất đẳng thức Nêsơbit)

Đây là bài toán cơ bản, là BĐT được sử dụng *không nhiều* trong chương trình toán THCS. Có nhiều cách để chứng minh nó. Xin giới thiệu phương pháp: Đổi biến!

Lời giải:

Đặt x = b + c; y = c + a; z = a + b.

Ta có : $a=\frac{y+z-x}{2}$; $b=\frac{x+z-y}{2}$; $c=\frac{x+y-z}{2}$. Bất đẳng thức trên chuyển về dạng sau

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\left(\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{x}{2z}\right)+\left(\frac{z}{2y}+\frac{y}{2z}\right)-\frac{3}{2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Bài tập vận dụng :

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}\ge 26$$

Bài 2. Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}.$$

Bài 3. Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{a+b+c+d}$.

Bài 4. Cho ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng:

a) $3abc(a+b+c)\le 1$

b) Nếu a, b, c dương thì: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le 2(a+b+c)$

c) Nếu a, b, c dương thì: $\frac{2a}{a^6+b^4}+\frac{2b}{b^6+c^4}+\frac{2c}{c^6+a^4}\le\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}$.

BÀI GIẢNG 4:

VẬN DỤNG LINH HOẠT CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CHỨNG MINH HOẶC TÌM CỰC TRỊ.

Trong chứng minh BĐT, việc vận dụng một cách linh hoạt các BĐT phụ khác cho ta đến một hiệu quả bất ngờ. Chúng ta cùng xét các ví dụ sau:

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta có:

$$f(a, b, c, d) = \frac{a-d}{d+b} + \frac{d-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+d} \geq 0.$$

Lời giải:

Bằng cách cộng 4 vào mỗi vế của BĐT trên, ta được:

$$\frac{a+b}{d+b} + \frac{d+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+d}{a+d} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a}\right) + (c+d)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d}\right) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(a+b)}{a+b+c+d} + \frac{4(c+d)}{a+b+c+d} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d} \geq 4$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

a = b = c = d.

Bài toán 2. Hai số dương a, b có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 6$;   b) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geq 14$.

Nhận xét: Để làm được bài toán này, chúng ta cần xác định được điểm rơi và cách biến đổi chúng cũng như sử dụng các BĐT phụ khác.

Lời giải:

a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2+b^2+2ab} + \frac{2}{(a+b)^2} = 6$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = 0,5.

b) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} = 3\left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{2ab} \geq \frac{12}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+b)^2} = 14.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = 0,5.

Bài toán 3. Cho n số dương bất kì $a_1; a_2; \ldots; a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_2})$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy, ta nhận được:

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+...+\frac{a_n}{1+a_n}\geq n\frac{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_n)}},$$

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq n\frac{1}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_n)}}.$$

Cộng các vế tương ứng của hai BĐT này thì được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các số trên bằng nhau.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có:

$$\frac{12}{a+b+c+d}\leq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\leq\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hướng dẫn:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\geq 4\left(\frac{1}{a+b+c+d}+\frac{1}{a+b+c+d}+\frac{1}{a+b+c+d}\right)$$

$$=\frac{12}{a+b+c+d}$$

* Trường hợp còn lại xin dành bạn đọc.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: abc = 1. Chứng minh rằng:

$$2(a^2+b^2+c^2)+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 7(a+b+c)-3.$$

(Xem toán tuổi thơ 2 tháng 8 + 9 / 2011)

Lời giải:

Đặt S = a + b + c. Áp dụng BĐT Cô si cho 3 số thức dương ta có: $S\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$. Do đó:

$$2(a^2+b^2+c^2)+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-7(a+b+c)+3$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)+4.\frac{ab+bc+ca}{abc}-7(a+b+c)-3$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)-7(a+b+c)+3$$

$$=2(a+b+c)^2-7(a+b+c)+3$$

$= 2S^2 – 7S + 3 = (2S – 1)(S – 3) \geq 0.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Bài toán 6. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}\ge 9+2(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$$

(Xem toán học và tuổi trẻ tháng 2/2012)

Lời giải:

Đặt A = $\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}+\frac{b^2+2bc+c^2}{bc}+\frac{c^2+2ca+a^2}{ca}$$

$$=\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+2+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+2+\frac{a}{c}=6+a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\ge 6+\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}\ge 6+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$\ge 6+2.\frac{3}{2}+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=9+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: *Việc vận dụng BĐT Cauchy và các BĐT phụ khác đem lại một hiểu quả bất ngờ!*

** Trong giải toán, một số BĐT cần phải chứng minh mới sử dụng được.*

BÀI GIẢNG 5
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ CHỨA BIẾN Ở MẪU

I. Một số phương pháp 1:Sử dụng hai bất đẳng thức cơ bản sau:

Với a, b, c là ba số thực dương tuỳ ý, ta có:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (1). Dấu " =" xảy ra khi a = b

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (2). Dấu " =" xảy ra khi a = b

Ví dụ 1: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a + b + c* = 1. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge 16$ (THPT chuyên Hà Tĩnh năm 2007-2008) (*)

Lời giải

• Áp dụng (1) ta có: $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4}{c(a+b)}\ge\frac{4}{\left(\frac{c+a+b}{2}\right)^2}=16.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}, a=b=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a + b + c* ≤ 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670.$$

Lời giải

• Áp dụng (2), ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1 \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có: $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\Rightarrow\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge\frac{3.2007}{(a+b+c)^2}\ge 669$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

2. Đặt mẫu là các biến mới

Ví dụ 3: Cho ba số thực dương *x, y, z*. Chứng minh rằng: $\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$ (*)

Lời giải

• Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ (với $a>0,\ b>0,\ c>0$).

Suy ra: $x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{c+a-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}$.

Ta có: VT (*) = $\frac{25(b+c-a)}{2a}+\frac{4(c+a-b)}{2b}+\frac{9(a+b-c)}{2c}$

$$=\left(\frac{25b}{2a}+\frac{4a}{2b}\right)+\left(\frac{25c}{2a}+\frac{9a}{2c}\right)+\left(\frac{4a}{2b}+\frac{9b}{2c}\right)-19\geq 10+15+6-19=12.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}5b=2a\\5c=3a\end{cases} \Rightarrow 5b+5c=5a \Rightarrow x=0$ (vô lí). Vậy BĐT (*) đúng.

3. Đánh giá nghịch đảo

Ví dụ 4: Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geq 3.$$

Lời giải

• Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}\leq\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{b+c}{a}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq\frac{2a}{b+c}.$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}\geq\frac{2b}{a+c}$; $\quad\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geq\frac{2c}{a+b}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ là xong.

4. Đưa về đồng bậc

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn: $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\leq\frac{3}{2}.$$

Lời giải

• Ta có: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}\right)$, $\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{c}{b+c}\right)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Thêm bớt biểu thức để khử mẫu

Ví dụ 6: Cho ba số thực dương *x, y, z* thoả mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8} \ge \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx). \qquad (*)$$

Lời giải

• Ta có: $\dfrac{x^3}{y^3+8}+\dfrac{y+2}{27}+\dfrac{y^2-2y+4}{27} \ge \dfrac{x}{3} \Rightarrow \dfrac{x^3}{y^3+8} \ge \dfrac{9x+y-y^2-6}{27}$.

Tương tự: $\dfrac{y^3}{z^3+8} \ge \dfrac{9y+z-z^2-6}{27}$; $\dfrac{z^3}{x^3+8} \ge \dfrac{9z+x-x^2-6}{27}$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta có:

$$\text{VT }(*) \ge \frac{10(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)-18}{27} = \frac{12-(x^2+y^2+z^2)}{27} =$$

$$= \frac{3+(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{27} = \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx) \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Ví dụ 7: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Lời giải

• Ta có: $\dfrac{a}{1+b^2} = \dfrac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a-\dfrac{ab^2}{1+b^2} \ge a-\dfrac{ab}{2}$.

Tương tự: $\dfrac{b}{1+c^2} \ge b-\dfrac{bc}{2}$; $\dfrac{c}{1+a^2} \ge c-\dfrac{ac}{2}$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh: $a+b+c-\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge \dfrac{3}{2}$.

Từ BĐT $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$ suy ra $ab+bc+ca \le 3$.

Do đó: $a+b+c-\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge \dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

6. Đánh giá mẫu

Ví dụ 8: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{1}{5}(a+b+c) \quad (*)$$

Lời giải

• Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \le \dfrac{1}{2}(4a+6b)=2a+3b$.

Tương tự với các mẫu số còn lại. Từ đó:

$$VT(*) \ge \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2a+3b+2b+3c+2c+3a}=\frac{1}{5}(a+b+c)$$

(đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 9: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1. \quad (*)$$

Lời giải

• Trước hết ta chứng minh BĐT: $x^5+y^5 \ge x^2y^2(x+y)$ (1) với mọi $x>0, y>0$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-x^2) \ge 0 \Leftrightarrow (x^3-y^3)(x^2-y^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+xy+y^2) \ge 0$ (luôn đúng với mọi $x>0, y>0$).

Do đó: $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab} \le \dfrac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\dfrac{1}{ab(a+b)+abc}=\dfrac{1}{ab(a+b+c)}$.

Tương tự: $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc} \le \dfrac{1}{bc(a+b+c)}$; $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca} \le \dfrac{1}{ca(a+b+c)}$.

Suy ra: $VT\ (*) \le \dfrac{1}{ab(a+b+c)}+\dfrac{1}{bc(a+b+c)}+\dfrac{1}{ca(a+b+c)}=\dfrac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=1$.

(đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

II. Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho ba số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^3}{a^6+bc}+\frac{2b^3}{b^6+ca}+\frac{2c^3}{c^6+ab}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}.$$

Bài 2: Cho ba số thực dương *x, y, z* thảo mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}.$$

Bài 3: Cho hai số *a, b* dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}.$$

Bài 4: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}\le 1.$$

Bài 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}.$$

Bài 6: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^5}{b^3+c^2}+\frac{b^5}{c^3+a^2}+\frac{c^5}{a^3+b^2}+a^4+b^4+c^4.$$

Bài 7: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}.$$

Bài 8: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(c+a)}\ge 3(ab+bc+ca)-2.$$

Bài 9: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

Bài 10: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c.$$

BÀI GIẢNG 6:

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài toán 1.

a. Với a,b, c > 0. Chứng minh: $$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

b. Cho a ≥ c > 0, b ≥ c. Chứng minh: $$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$$

Lời giải:

a. Ta có:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 2\,(bc+ac-ba)$ (Vì abc > 0)

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2bc-2ac+2ab\ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)^2\ge 0$ (hiển nhiên đúng).

Vậy: $$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\ge b\ge c$ và $3a-4b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{a^2-b^2}{c}-\frac{b^2-c^2}{a}-\frac{c^2-a^2}{b}$.

(Xem toán tuổi thơ 2 tháng 2/2011)

Lời giải:

Vì $a\ge b\ge c$ nên:

$$M=\frac{a^2-b^2}{c}-\frac{b^2-c^2}{a}-\frac{c^2-a^2}{b}=\frac{a^2-b^2}{c}-\frac{b^2-c^2}{a}-\frac{c^2-b^2+b^2-a^2}{b}$$

$$=(a^2-b^2)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+(b^2-c^2)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\ge 0.$$

M = 0 khi và chỉ khi a = b. Vì 3a – 4b + c = 0 nên a = b = c.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng 0.

Bài toán 3. Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng không thể đồng thời xảy ra các bất đẳng thức sau:

$$a+b<c+d\ ;\ (a+b)(c+d)<ab+cd\ ;\ (a+b)\,cd<(c+d)\,ab.$$

Lời giải:

Giả sử xảy ra đồng thời các bất đẳng thức trên. Từ hai bất đẳng thức đầu ta có:

$$(a+b)^2<(a+b)(c+d)<ab+cd\Rightarrow cd>(a+b)^2-ab\ge 3ab$$

$$\Rightarrow cd>3ab \qquad (1)$$

Mặt khác, ta cã:

(a + b) cd < (c + d) ab => $(a + b)^2$ cd < (c + d) ab (a + b) < ab (ab + cd)

=> 4abcd ≤ $(a + b)^2$ cd < ab (ab + cd) = a^2b^2 +abcd

=> a^2b^2 > 3abcd => ab > 3cd (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ab >3cd > 9ab, vô lý!

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 4. Cho a_k , b_k là các số dương thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của tổng: $P = \dfrac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \dfrac{a_2b_2}{a_2+b_2} + \ldots + \dfrac{a_nb_n}{a_n+b_n}$.

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$a_k + b_k \geq 2\sqrt{a_kb_k} \text{ hay } (a_k+b_k)^2 \geq 4a_kb_k \Rightarrow \frac{a_kb_k}{a_k+b_k} \leq \frac{a_k+b_k}{4}.$$

Cho k = 1, 2, ..., n, rồi cộng các vế tương ứng của n BĐT nhận được, ta có:

$$P \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_n}{4} = \frac{1}{2}.$$

Hơn nữa nếu chọn $a_k = b_k = \dfrac{1}{n}$ với mọi $1 \leq k \leq n$ thì P = 0,5.

Vậy giải trị lớn nhất của P là 0,5.

Bài toán 5. Cho $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$ trong đó ad - bc =1. Chứng minh rằng $S \geq \sqrt{3}$.

Lời giải:

$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$

$= a^2 (c^2 + d^2) + b^2 (c^2 + d^2) = (a^2 + b^2) (c^2 +d^2)$

Vì ad - bc = 1 nên: $1 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 +d)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$S = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + ac + bd \geq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + ac + bd$.

Đến đây bạn đọc tự giải tiếp.

Bài toán 6. Cho các số dương a, b, c, d. Biết $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c} + \dfrac{d}{1+d} \leq 1$.

Chứng minh rằng: $abcd \leq \dfrac{1}{81}$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra:

$\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}\le 1-\frac{a}{1+a}=\frac{1}{1+a}$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương, ta có:

$\frac{1}{1+a}\ge\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}\ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+1)(c+1)(d+1)}}$. Tương tự, ta có:

$\frac{1}{b+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{acd}{(a+1)(c+1)(d+1)}}$;

$\frac{1}{c+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{abd}{(a+1)(b+1)(d+1)}}$; $\frac{1}{d+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}}$.

Nhân từng vế bốn BĐT, ta được $1\ge 81abcd$. Nên abcd $\le\frac{1}{81}$.

Vậy: BĐT đã được chứng minh. Dấu "=" khi và chỉ khi a = b = c = d = $\frac{1}{3}$.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và một điểm Q nào đó ở trong tam giác. Qua Q kẻ đường thẳng

song song với AB cắt AC ở M và cắt BC ở N. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở F và cắt BC ở E. Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC ở P và cắt AB ở R. Ký hiệu S_1 = dt (QMP), S_2 = dt(QEN), S_3 = dt(QFR) và S = dt (ABC). Chứng minh rằng:

a. $S_1+S_2+S_3\ge\frac{1}{3}S.$

b. $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$

b.

Lời giải:

a. Ta có ΔQMP ~ ΔBAC

(Tỷ số $\frac{MP}{AC}$), suy ra: $\frac{S_2}{S}=\left(\frac{QE}{AC}\right)^2=\left(\frac{PC}{AC}\right)^2$

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Tương tự, ta có: $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{MP}{AC}\right)^2\Rightarrow\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{MP}{AC}$

Suy ra: $\frac{\sqrt{S_2}}{S}=\frac{PC}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{PC}{AC};\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{AM}{AC}.$

Do đó: $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{MP+PC+AM}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$

Suy ra: $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\Rightarrow S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$

b. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

S = $(1.\sqrt{S_1}+1.\sqrt{S_2}+1.\sqrt{S_3})^2\le(1^2+1^2+1^2)(S_1+S_2+S_3)$

Suy ra: $S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$S_1 = S_2 = S_3$ <=> Q là trọng tâm ΔABC.

Bài toỏn 8. Tỡm giỏ trị nhỏ nhất của biểu thức sau đõy với mọi x thuộc R.

$$B = |x| + |2x + 1| + |3x + 2| + ... + |99x + 98|$$

Lời giải :

Để ý rằng $|70x + 69| = |70(x + \frac{69}{70})| \geq |50(x + \frac{69}{70})|$.

Vì vậy : $B = |-x| + |-2x - 1| + ... + |-69x - 68| + |70x + 69| + |71x + 70| + ... + |99x + 98| \geq$

$|-x| + |-2x - 1| + ... + |-69x - 68| + \left|-50\left(x + \frac{69}{70}\right)\right| + |71x + 70| + ... + |99x + 98|$

$\geq |-x + (-2x - 1) + ... + (-69x - 68) - 50\left(x + \frac{69}{70}\right) + (71x + 70) + ... + (99x + 98)| = \frac{285}{7}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{69}{70}$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của B là min B = $\frac{285}{7}$.

- *Cơ sở đâu, nguyên nhân nào và tại sao lại biến đổi được như vậy ?*
- *Có cách nào khác nữa hay không ?*
- *Cách giải trên dùng tính chất gì của giá trị tuyệt đối ?*

Bài toán 9. Cho x là số thực thay đổi trên đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}.$$

Lời giải :

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có :

$A = \sqrt{13}.\sqrt{13(x^2 - x^4)} + \sqrt{27}.\sqrt{3(x^2 + x^4)} \leq \sqrt{(13 + 27)\left[13(x^2 - x^4) + 3(x^2 + x^4)\right]}$. Hay :

$A \leq \sqrt{80(8x^2 - 5x^4)} = \sqrt{80\left[\frac{16}{5} - 5\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)^2\right]} \leq 16$. Hơn nữa, A = 16 khi và chỉ khi x =

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Vậy, giá trị lớn nhất của A là max A = 16.

Bài toán 10. Cho 3 số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng $\frac{25x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{9z}{x+y} > 12$

Lời giải:

Đặt a = y + z, b = z + x ; c = x + y. Khi đó $x = \frac{b + c - a}{2}$; $y = \frac{a + c - b}{2}$; $z = \frac{a + b - c}{2}$.

Ta chứng minh được rằng VT ≥ 12. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi : 5b + 5c = 5a, suy ra x = 0, vô lý.

Dấu đẳng thức không xảy ra, suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 11. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$$

Lời giải:

Ta có, $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1$

(1)

Mặt khác: $3(ab + bc + ca) \le (a+b+c)^2$ suy ra : $\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge\frac{3.2007}{(a+b+c)^2}\ge 669$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 12. Cho hai dãy số sắp thứ tự: $a \ge b \ge c$ và $x \le y \le z$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(x + y + z) \ge 3(ax + by + cz)$$

*(BĐT Trê – bư - sép)**

Lời giải:

Xét hiệu:

$(a + b + c)(x + y + z) – 3(ax + by + cz)$

$= a(x + y + z) – 3ax + b(x + y + z) – 3by + c(x + y + z) – 3cz$

$= a(y + z – 2x) + b(x + z – 2y) + c(x + y – 2z)$

$= a\left[(y-x)-(x-z)\right]+b\left[(z-y)-(y-x)\right]+c\left[(x-z)-(z-y)\right]$

$= (y – x)(a – b) + (x – z)(c – a) + (z – y)(b – c) \ge 0$

(Vì theo giả thiết, ta có $a \ge b \ge c$ và $x \le y \le z$)

Nên suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ và $a = b = c$.

---

* Trê – bư – sép (1821 – 1894), nhà toán học Nga.

Bài toán 13. Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với mọi x, y là các số dương, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{16}{d}$$

$$\geq\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}=16\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d}\right)\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = d.

Cũng có thể dùng BĐT Bunhiacopxki để chứng minh như sau:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)\geq\left(\sqrt{a}.\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}.\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}.\sqrt{\frac{4}{c}}+\sqrt{d}.\sqrt{\frac{16}{d}}\right)^2=64$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

*Nhận xét: * Việc áp dụng linh hoạt nhiều BĐT hoặc một BĐT nhiều lần giúp ta chứng minh bài toán thuận lợi hơn.*

** Trong bài toán BĐT, việc xác định điểm rơi của biến là rất cần thiết. Nó góp một phần nhỏ vào việc áp dụng các BĐT phụ.*

Bài toán 14. Cho a > b là các số không âm. Chứng minh rằng: $a+\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}\geq 3$.

Chúng ta thử xác định điểm rơi của bài toán. Ta có: 2a – 1 = 3b suy ra a – b = $\dfrac{b+1}{2}$.

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số thực không âm, ta có:

$$(a-b)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\geq 4\sqrt[4]{(a-b)\left(\frac{4(b+1)(b+1)}{4(a-b)(b+1)^2}\right)}=4.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

**Xem dòng trên, tại sao lại có "*2a – 1 = 3b suy ra a – b = $\dfrac{b+1}{2}$*" ? Đó chính là một quá trình suy luận? Bạn đọc hãy thử tìm tòi, khám phá xem?*

HD: Chú ý tới giả thiết và vế cần phải chứng minh.

Bài toán 15. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{2}$. *(Xem toán tuổi thơ 2 tháng 1/2011)*

Lời giải:

Dễ dàng chứng minh được BĐT sau với a, b, c là các số thực không âm tùy ý:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc \quad (1)$$

Từ (1) kết hợp với giả thiết a + b + c = 1, ta có:

$abc \geq (1-2c)(1-2a)(1-2b) = 1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8abc$

$\Rightarrow$ 9abc $\geq$ 4(ab + bc + ca) – 1 $\Rightarrow$ P = $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - \frac{1}{2}$

$= (a + b + c)^2 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Min P = $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi (1) trở thành đẳng thức. Suy ra a = b = c, hoặc

$(a + b – c)(b + c – a)(c + a – b) = abc$.

$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc (a , b , c) là một hoán vị của bộ số $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0,5.

Bài toán 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}}$ trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn a + b + c = 2001.

(Xem Toán học và Tuổi trẻ tháng 11/2001)

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 20 số, trong đó có 11 số y và 8 số 667, ta có:

$$\frac{x^{20}}{y^{11}667^8} + 11y + 8.667 \geq 20\sqrt[20]{\frac{x^{20}}{y^{11}667^8}.y^{11}.667^8} = 20x$$

Tương tự:
$$\frac{y^{20}}{z^{11}667^8} + 11z + 8.667 \geq 20y$$
$$\frac{z^{20}}{x^{11}667^8} + 11x + 8.667 \geq 20z$$

Cộng theo từng vế các BĐT trên và bằng biến đổi đơn giản, ta thu được BĐT:

$$\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}} \geq (9(x + y + z) – 3.8.667).667^8 = 3.667^9$$

với BĐT xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 667.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức cần tìm là 3.667^9.

Bài toán 17. Gọi x là số lớn nhất trong 3 số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{y}{z}} + \sqrt[3]{1 + \frac{z}{x}}$.

(Xem Toán học và Tuổi trẻ tháng 12/2001)

Lời giải:

Sử dụng BĐT Cauchy cho các số trong căn, ta có:

$$A = \frac{x}{y} + \sqrt{1+\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}$$

$$\geq \frac{x}{y} + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{2}\sqrt[6]{\frac{z}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{x}{y} + \left(\sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt[6]{\frac{z}{x}} \ (1)$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho 11 số, ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) \geq \frac{11}{2\sqrt{2}}\sqrt[11]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}} = \frac{11}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Mặt khác theo giả thiết đã cho *x = max(x , y , z)*, cho nên $\frac{x}{y} \geq 1 \geq \frac{z}{x}$ và vì

$-\frac{1}{2\sqrt{2}} > 0 > \sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}}$ nên từ (1) và (2) ta có: A

$$\geq \frac{11}{2\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

Bài toán 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của BT:

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + \frac{1}{4}\left(x^{16} + y^{16}\right) - \left(1 + x^2y^2\right)^2$$

Lời giải:

Sử dụng BĐT Cauchy cho 4 số, ta có:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 1 + 1\right) \geq 2x^2y^2; \ \frac{1}{4}(x^{16} + y^{16} + 1 + 1) \geq x^4y^4.$$

Suy ra: $\frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + \frac{1}{4}\left(x^{16} + y^{16}\right) + \frac{5}{2} \geq (1 + x^2y^2)^2 \Rightarrow Q \geq -\frac{5}{2}$.

$Q = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{-5}{2}$.

** Bạn có thắc mắc gì không? Tại sao lại dùng BĐT Cauchy cho 4 số?*

HD: Phát hiện từ giả thiết bài toán bằng cách quan sát thật kĩ. Sở dĩ dùng BĐT Cauchy cho 4 số là để đưa biểu thức Q về dạng lớn hơn hoặc bằng biểu thức trừ. Từ đó chuyển vế, chú ý giả thiết ta suy ra được kết quả cần tìm. Nếu biết quan sát kĩ bài toán trên ta sẽ thấy điều đặc biệt và dẫn đến lời giải.

Bài toán 19. Cho x, y là những số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của BT:

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

Lời giải:

Viết P về dạng:

$$P = \frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương, ta có:

$$P \ge \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \ge 2\frac{x}{\left(\frac{x-1+1}{2}\right)}.\frac{y}{\left(\frac{y-1+1}{2}\right)} = 8.$$

P = 8 khi và chỉ khi x = y = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P = 8 khi x = y = 2.

Bài toán 20. Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $\frac{1}{1+a}+\frac{35}{35+2b} \le \frac{4c}{4c+57}$. Tìm min abc ?

Lời giải:

Ta có: $\frac{4c}{4c+57} \ge \frac{1}{1+a}+\frac{35}{35+2b} \ge 2\sqrt{\frac{35}{(1+a)(35+2b)}} > 0.$ (1)

Mặt khác $\frac{1}{1+a} \le \frac{4c}{4c+57}-\frac{35}{35+2b} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}-\frac{4c}{4c+57} \le -\frac{35}{35+2b}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a}-\frac{4c}{4c+57}+1 \le 1-\frac{35}{35+2b} = \frac{2b}{35+2b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2b}{35+2b} \ge \frac{1}{1+a}+\frac{57}{4c+57} \ge 2\sqrt{\frac{57}{(1+a)(4c+57)}} > 0 \quad (2)$$

Ta có:

$$1-\frac{1}{1+a} \ge 1-\frac{4c}{4c+57}+\frac{35}{35+2b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+a} \ge \frac{57}{57+4c}+\frac{35}{35+2b} \ge 2\sqrt{\frac{35.57}{(57+4c)(35+2b)}} > 0 \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3) ta có:

$$\frac{8abc}{(1+a)(4c+57)(2b+35)} \ge \frac{8.35.57}{(1+a)(4c+57)(2b+35)} \Rightarrow abc \ge 35.57 = 1995.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = 2; b = 35; c = 57/2.

Vậy min abc = 1995 khi và chỉ khi a = 2; b = 35; c = 57/2.

Bài toán 21. Cho x, y là hai số thỏa mãn đồng thời: $x \ge 0, y \ge 0, 2x+3y \le 6$ và $2x+y \le 4$.

Tìm max và min của biểu thức K = $x^2 - 2x - y$.

Lời giải:

Từ $2x + 3y \le 6$ suy ra $y \le 2 - \frac{2}{3}x \Rightarrow -y \ge \frac{2}{3}x - 2$

$K = x^2 - 2x - y \ge x^2 - 2x + \frac{2x}{3} - 2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{22}{9} \ge -\frac{22}{9}$

Suy ra min $K = -\frac{22}{9}$ khi $x = \frac{2}{3}; y = \frac{14}{9}$.

Ta có: $2x^2 + xy \le 4x$ ($x \ge 0$). Suy ra: $x^2 - 2x - y \le -\frac{xy}{2} - y = \frac{-y(x+2)}{2} \le 0$

Suy ra max $K = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

** Nhiều khi việc tìm trực tiếp GTNN của biểu thức K gặp khó khăn. Tuy nhiên, ta có thể bắc cầu K qua biểu thức B (bé hơn)theo sơ đồ " bé dần" : K≥ B. Rồi đi tìm GTNN của B, từ đó suy ra GTNN của biểu thức K. Các mối liên hệ giữa K và giả thiết sẽ chỉ dẫn chúng ta đến tìm B.*

** Chắc chắn bạn còn thắc mắc bài toán có hai giả thiết, thế nhưng khi giải lại chỉ sử dụng đến một giả thiết mà thôi (!)*

** Trong quá trình đánh giá có thể tìm được nhiều biểu thức B. Gọi B_k là một trong những biểu thức đó và có min $B_k = \beta$ mà ta cũng có $K = B_k$ thì mới có min K = min $B_k = \beta$. Trong trường hợp đó biểu thức B_k được gọi là " kết". Trong bài toán trên, sử dụng giả thiết còn lại không dẫn tới " kết".*

** Trong bài toán trên, hình thức các giả thiết trên chưa đủ để chỉ dẫn bắt mạch sử dụng giả thiết này hay giả thiết kia. Nhiều bài toán phức tạp phải liên kết sử dụng tất cả các giả thiết mới tìm được " kết".*

Bài toán 22. Cho 3 số dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$P = \frac{3}{xy + yz + zx} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} > 14$$

Lời giải :

Với x, y, z là các số bất kì, ta có BĐT luôn đúng : $(x + y + z)^2 \ge 3(xy + yz + zx)$

Vì $x + y + z = 1$ nên suy ra $\frac{1}{xy + yz + zx} \ge 3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ta có : $\frac{1}{2(xy + yz + zx)} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \ge \frac{4}{(x + y + z)^2} = 4$

$$\Rightarrow \frac{3}{xy+yz+zx}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{4}{2(xy+yz+zx)}+\frac{2}{2(xy+yz+zx)}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\ge 2.3+2.4=14$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=z=\dfrac{1}{3} \\ 2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2 \end{cases}$

Hệ này vô nghiệm nên BĐT không trở thành đẳng thức.

Vậy BĐT được chứng minh.

** Bài toán này có '' kết'' là ở (1).*

** Việc vận dụng hai BĐT phụ trên và áp dụng giả thiết, đó là con đường đi tìm'' kết'' nhanh nhất.*

Bài toán 23. Số thực x thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (3 - x)^2 \ge 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $Q = x^4 + (3 - x)^4 + 6x^2(3 - x)^2$.

Lời giải :

Đặt $y = 3 - x$, bài toán đã cho trở thành : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$Q = x^4 + y^4 + 6x^2y^2$, trong đó x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2\ge 5 \end{cases}$

Từ các hệ thức trên, ta có : $\begin{cases} x^2+y^2+2xy=9 \\ x^2+y^2\ge 5 \end{cases}$

Suy ra $(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2 + 2xy) \ge 5 + 4.9 = 41 \Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 4(2xy) \ge 41$

Mặt khác : $16(x^2 + y^2)^2 + 25(2xy)^2 \ge 40(x^2 + y^2)(2xy)$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4(x^2 + y^2) = 10xy$

Cộng hai vế của (1) với $25(x^2 + y^2)^2 + 16(2xy)^2$ ta có :

$41\left[(x^2+y^2)+(2xy)^2\right]\ge\left[5(x^2+y^2)+4(2xy)^2\right]^2\ge 41^2$ hay $(x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2 \ge 41$ khi và chỉ khi $Q \ge 41$.

Min $Q = 41$, đạt được khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Bài toán 24. Cho a, b, c $\in\left[-2;3\right]$ thỏa mãn $a + 2b + 3c = 2$. Tìm max $M = a^2 + 2b^2 + 3c^2$.

Lời giải:

Đây là bài toán thuộc dạng *tìm cực trị có điều kiện*, hay và khó trong chương trình toán THCS nói chung và BĐT nói riêng. Chúng ta sử dụng giả thiết để đi tìm "kết".

Vì: a, b, c $\in\left[-2;3\right]$ suy ra: $(a + 2)(a - 3) \le 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 \le 0 \Rightarrow a^2 \le a + 6$.

Tương tự : $b^2 \le b + 6 \Rightarrow 2b^2 \le 2b + 12$;

$c^2 \le c + 6 \Rightarrow 3c^2 \le 3c + 18$.

Từ các BĐT trên, suy ra: $M = a^2 + 2b^2 + 3c^2 \le a + 2b + 3c + 36 = 38$.

Max M = 38 khi và chỉ khi a = 3; b = 3; c = 3.

Bạn hãy giải bài toán *tìm cực trị có điều kiện dưới đây xem*:

Bài toán 25. Cho a, b, c $\in[0;1]$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\le 2$.

HD: Biết được vai trò của các biến là như nhau. Vì vậy ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$ và đi xét các trường hợp cần thiết cho bài toán, ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số có 1 số bằng 0 và 2 số kia bằng 1.

Bài toán 26. Cho hàm số: $f(x;y) = (1 + x)(1 + \frac{1}{y}) + (1+ y)(1 + \frac{1}{x})$ với x, y > 0 và $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm min f(x ;y) ?

Lời giải :

$$f(x;y) = (1 + x)(1 + \frac{1}{y}) + (1+ y)(1 + \frac{1}{x})$$

$$= 1 + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + y$$

$$= 2 + (x + \frac{1}{2x}) + (y + \frac{1}{2y}) + (\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}) + (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$$

$$= 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 + (\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}).$$

Mặt khác :

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\ge\frac{4}{2(x+y)}=\frac{2}{x+y}\Rightarrow\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)^2\ge\frac{4}{(x+y)^2}=\frac{4}{x^2+2xy+y^2}\ge\frac{4}{2(x^2+y^2)}=2$$

Suy ra $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\ge\sqrt{2}\ \Rightarrow f(x;y)\ge 4+\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=4+3\sqrt{2}$.

Min f(x ;y) = $4+3\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 27. Cho biểu thức P = $x.\sqrt{5-x}+(3-x)\sqrt{2+x}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của P biết x nằm trong khoảng từ 0 cho đến 3.

Lời giải :

** Giá trị nhỏ nhất :*

Vì $0 \le x \le 3$ nên $\begin{cases}\sqrt{5-x}\ge\sqrt{5-3}=\sqrt{2}\\ x\ge 0\end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi x = 3 hoặc x = 0.

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}\ge\sqrt{2}\\ 3-x\ge 0\end{cases}\Rightarrow(3-x)\sqrt{x+2}\ge(3-x)\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi x = 3 hoặc x = 0.

$P \ge x.\sqrt{2}+(3-x).\sqrt{2}=3.\sqrt{2}\Leftrightarrow x=3$ hoặc x = 0.

Vậy Min P = $3.\sqrt{2}$ khi và chỉ khi x = 0 hoặc x = 3.

** Giá trị lớn nhất:*

Dễ thấy P > 0 và P lớn nhất khi P^2 lớn nhất. Ta có:

$P^2 = x^2.(5-x)+(3-x)^2.(2-x)+2x.\sqrt{5-x}.(3-x)\sqrt{2+x}..$

$= x^2-3x+18+2x.\sqrt{5-x}.(3-x)\sqrt{2+x}.$

$= 18+x(3-x).(2\sqrt{5-x}.\sqrt{2+x}-1).)$

Ta có : $0 \le x(3-x)=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 1,5.

Vì $(\sqrt{5-x}-\sqrt{2+x})^2\ge 0\Rightarrow 2.\sqrt{5-x}.\sqrt{2+x}\le 5-x+2+x=7$. Đẳng thức xảy ra khi x = 1,5.

Mặt khác $2\sqrt{5-x}.\sqrt{2+x}\ge 2.\sqrt{5-3}.\sqrt{2+0}=4>1\Rightarrow 2\sqrt{5-x}.\sqrt{2+x}-1\ge 0$.

$P^2\le 18+\frac{9}{4}.(7-1)=\frac{63}{2}$. Mà P > 0 nên $P\le\frac{3\sqrt{14}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 1,5.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3\sqrt{14}}{2}$.

Bài toán 28. Cho biểu thức : $P=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y+z}$.

Với giá trị nào của các số nguyên dương x, y, z thì P đạt giá trị dương bé nhất ?

(Thi HSG Quốc gia 1988 – 1989, Bảng A)

Lời giải :

Vì P > 0 suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y+z}<\frac{1}{2}$.

Đặt $Q=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y+z}\Rightarrow P=\frac{1}{2}-Q$.

Do đó : P_{min} khi và chỉ khi Q_{max} khi và chỉ khi x_{min}.

Ta có : $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\ge 3\Rightarrow x=3$ (Vì x nhỏ nhất)

Khi x = 3 $\Rightarrow Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{3+y} + \frac{1}{3+y+z} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3+y} + \frac{1}{3+y+z} < \frac{1}{6}$

Vì $\frac{1}{3}$ không đổi nên Q_{max} khi và chỉ khi y_{min} .

Mà : $\frac{1}{3+y} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow 3+y > 6 \Rightarrow 3+y \geq 7 \Rightarrow y \geq 4 \Rightarrow y = 4$ (Vì y nhỏ nhất)

Khi y = 4 $\Rightarrow \frac{1}{7} + \frac{1}{7+z} < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{7+z} < \frac{1}{42}$. Q_{max} khi z_{min}. Suy ra z = 36 (Vì z nhỏ nhất)

Suy ra $Q \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{43}$.

Min P = $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{43} \Leftrightarrow$ (x, y, z) = (3, 4, 36).

Vậy : Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{43}$.

Bài toán 29. Cho a, b, c là các số dương a + b + c = abc. Chứng minh rằng :

$$a^5(bc-1) + b^5(ca-1) + c^5(ab-1) \geq 54\sqrt{3}$$

HD: Bằng cách khai triển VT vủa BĐT trên, kết hợp với giả thiết bài toán, áp dụng thêm các BĐT phụ và biến đổi khéo léo, ta suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải: Xin dành cho bạn đọc (!)

Bài toán 30 Tìm giá trị lớn nhất của P = $\frac{yz\sqrt{x-1} + zx\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$

Lời giải:

ĐKXĐ của biểu thức P: $x \geq 1$; $y \geq 2$ và $z \geq 3$.

Ta có: P = $\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z}$.

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho các số không âm, ta có:

$$\sqrt{x-1} \leq \frac{1+x-1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2}.\sqrt{y-2} \leq \frac{y-2+2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-2}}{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{3}.\sqrt{y-3} \leq \frac{z-3+3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-3}}{z} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Suy ra P $\leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Max P = $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ khi và chỉ khi x = 2; y = 4; z = 6.

Bài toán 31. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn xyz = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x\left(y + \frac{x}{1+y}\right) + y\left(z + \frac{y}{1+z}\right) + z\left(x + \frac{z}{1+x}\right).$$

Lời giải :

Bằng cách khai triển, ta thu được

$$M = xy + yz + zx + \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x}.$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho các số không âm, ta có :

$\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2(1+y)}{4(1+y)}} = 2.\frac{x}{2} = x$. Tương tự, ta cũng có :

$\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq y$; $\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq z$. Cộng từng vế các BĐT trên, ta có :

$\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.3.\sqrt[3]{xyz} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ (Vì $xyz = 1$)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1.

Suy ra $M \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Min M = $\frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là $\frac{9}{2}$.

Bài toán 32. Cho các số thực dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn a + b + c = 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với P = $\frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+4}{2+b} + \frac{a+b+3}{3+c}$.

Lời giải:

Từ giả thiết, ta suy ra P = $\frac{11-a}{1+a} + \frac{10-b}{2+b} + \frac{9-c}{3+c}$.

Biến đổi biểu thức P, ta được P = $12\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{3+c}\right) - 3$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số thực không âm, ta có:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{3+c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+a)(2+b)(3+c)}} \geq \frac{3}{\frac{1+a+2+b+3+c}{3}} = \frac{9}{12}$$

Suy ra $P \geq 6$. Min P = 6 khi và chỉ khi 1 + a = 2 + b = 3 + c suy ra (a, b, c) = (3, 2, 1).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Bài toán 33. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z \le 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}\le\frac{5}{x+y+z}$$

Lời giải :

Vì $0 < x, y, z \le 1$ suy ra :

$(xy + 1) - (x + y) = (1 - x)(1 - y) \ge 0$ suy ra $xy + 1 \ge x + y$.

Tương tự : $yz + 1 \ge y + z$; $zx + 1 \ge z + x$.

$$\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}\right)\le\frac{x}{yz+1}+\frac{y}{zx+1}+\frac{z}{xy+1}+3$$

$$\le\frac{x}{yz+1}+\frac{y}{zx+y}+\frac{z}{xy+z}+3$$

$$=x\left(\frac{1}{yz+1}-\frac{z}{zx+y}-\frac{y}{xy+z}\right)+5\le x\left(1-\frac{z}{x+y}-\frac{y}{y+z}\right)+5=5.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 34. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3a+c}+\frac{2}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b}<2$$

Lời giải :

Đặt $\frac{a+b}{2}=x;\frac{c+a}{2}=y;a=z$. *(x, y, z > 0)*

Suy ra $x + y > z$; $y + z > x$; $z + x > y$.

Bằng cách khai triển, vế trái thu được bằng :

VT = $\frac{a+b}{3a+c}+\frac{a+c}{3a+b}+\frac{2a}{2a+b+c}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$. Đến đây có hai cách :

Cách 1 : Sử dụng phương pháp làm trội.

Cách 2 : $x+y>z \Rightarrow z(x+y+z)<2z(x+y) \Rightarrow \frac{z}{x+y}<\frac{2z}{x+y+z}$.

Tương tự : $\frac{x}{y+z}<\frac{2x}{x+y+z};\frac{y}{z+x}<\frac{2y}{x+y+z}$. Cộng theo từng vế các BĐT trên, ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 35. Cho x, y thuộc (0 ; 1). Tìm min A = $\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{1-y}+\frac{1}{x+y}+x+y$.

Lời giải :

Ta có :

$$A = \left(\frac{x^2}{1-x} + 1 + x\right) + \left(\frac{y^2}{1-y} + 1 + y\right) + \frac{1}{x+y} - 2 = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2$$

Vì : $\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}\right)(1-x+1-y+x+y) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2}$

$\Rightarrow A \geq \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$.

Min A = 5/2 khi và chỉ khi x; y thỏa mãn các điều kiện:

$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y}$ và $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x+y}$ $\Rightarrow x = y = \frac{1}{3}$.

Bài toán 36. Cho 3 số x, y, z > 1 thỏa mãn điều kiện x + y + z = xyz. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{z-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}$.

Lời giải:

Từ giả thiết, ta suy ra $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Ta biến đổi biểu thức P như sau:

$$P = \frac{(x-1)+(y-1)}{x^2} + \frac{(y-1)+(z-1)}{y^2} + \frac{(x-1)+(z-1)}{z^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$= (x-1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right) + (y-1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + (z-1)\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\geq \frac{2(x-1)}{xz} + \frac{2(y-1)}{xy} + \frac{2(z-1)}{yz} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 2$$

Mặt khác $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = 3 \Rightarrow P \geq \sqrt{3} - 2$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$x = y = z = \sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là min $P = \sqrt{3} - 2$.

Bài toán 37. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2y(4 - x - y)$ trong đó x, y là các số không âm thay đổi và luôn thỏa mãn $x + y \leq 6$.

Lời giải:

** Tìm giá trị lớn nhất:*

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của A khi $4 - x - y \geq 0$. Khi đó áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$A = \frac{1}{4}.x.x.2y.(8-2x-2y) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{x+x+2y+8-2x-2y}{4}\right)^4 = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 2, y = 1.

* *Tìm giá trị nhỏ nhất:*

Ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của A khi $4 - x - y \le 0$. Khi đó vì $x + y \le 6$ nên

$B = -A = x^2y(4 - x - y) \le 2x^2y$. Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$2x^2y = x.x.2y \le \left(\frac{x+x+2y}{3}\right)^3 \le 4^3 = 64 \Rightarrow B \le 64 \Rightarrow A \ge -64.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 4, y = 2.

Bài toán 38. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3(2 - x)^5$ khi x thay đổi trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải:

Ta viết lại f(x) dưới dạng $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{5}{3}x\right)^3(2-x)^5$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho năm số $(2 - x)$ và ba số $\frac{5x}{3}$, ta có:

$$5(2-x) + 3.\frac{5x}{3} = (2-x) + (2-x) + (2-x) + (2-x) + (2-x) + \frac{5x}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{5x}{3}$$

$$\ge 8\sqrt[8]{(2-x)^5\left(\frac{5x}{3}\right)^3}, \text{ hay } 10 \ge 8\sqrt[8]{(2-x)^5\left(\frac{5x}{3}\right)^3} \text{ tức là } \frac{5^8}{4^8} \ge \frac{5^3}{3^3}.f(x) \text{ suy ra}$$

$f(x) \le \frac{5^3.3^3}{4^8} = \frac{84357}{65536}$ dấu bằng khi và chỉ khi $x = \frac{3}{4}$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số là $\max f(x) = \frac{84357}{65536}$.

Bài toán 39. Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ của biểu thức :

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

Lời giải :

Bằng cách khai triển, ta được

$$P = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right) \qquad (\text{Với } x, y, z > 0)$$

Mà ta luôn có BĐT $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2$. Mặt khác, áp dụng BDDT Cauchy cho 3 số thực không âm, ta có : $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \ge \frac{9}{x+y+z}$.

Suy ra P

$$\ge \frac{1}{6}(x+y+z)^2+\frac{9}{x+y+z}=\frac{1}{6}(x+y+z)^2+\frac{9}{2(x+y+z)}+\frac{9}{2(x+y+z)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{6}.\frac{9}{2}.\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$$

Min P = $\frac{9}{2}$ khi và chỉ khi x = y = z = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là min P = $\frac{9}{2}$.

Bài toán 40. Cho x, y, z là các số dương thay đổi và luôn thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

(Đề thi tuyển sinh ĐH – CĐ khối A – 2007)

Lời giải :

Vì $xyz=1$ suy ra $x^2(y+z)\ge 2x^2\sqrt{yz}=2x\sqrt{x}$

Tương tự $y^2(z+x)\ge 2y\sqrt{y}$ và $z^2(x+y)\ge 2z\sqrt{z}$

Suy ra $P\ge \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

Đặt $x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}=a; y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}=b; z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}=c$

$$\Rightarrow x\sqrt{x}=\frac{4c+a-2b}{9}; y\sqrt{y}=\frac{4a+b-2c}{9}; z\sqrt{z}=\frac{4b+c-2a}{9}$$

$$\Rightarrow P\ge \frac{2}{9}\left(\frac{4c+a-2b}{b}+\frac{4a+b-2c}{c}+\frac{4b+c-2a}{a}\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left[4\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-6\right]\ge \frac{2}{9}(4.3+3-6)=2$$

Min P = 2 khi và chỉ khi a = b = c khi và chỉ khi x = y = z = 1.

BÀI GIẢNG7

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Dự đoán được điều kiện đẳng thức xảy ra

Ví dụ 1: Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng: B = $a^5+b^5\geq 2$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Do vậy ta đặt: $a=1+x$. Từ giả thiết suy ra: $b=1-x$, ($x\in$ R).

Ta có: B = $a^5+b^5=(1+x)^5+(1-x)^5=10x^4+20x^2+2\geq 2$

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = 0, hay a = b = 1. Vậy B ≥ 2.

Ví dụ 2: Cho $a+b=3$, $a\leq 1$. Chứng minh rằng: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b\geq 0$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = 1; b = 2.

Do vậy ta đặt $a=1-x$, với $x\geq 0$. Từ giả thiết suy ra $b=2+x$.

Ta có: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b$ =

$(2+x)^3-(1-x)^3-6(2+x)^2-(1-x)^2+9(2+x)$

= x^3-2x^2+x = $x(x-1)^2\geq 0$ (vì $x\geq 0$).

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = 0 hoặc x = 1 tức a = 1, b = 2 hoặc a = 0, b = 3. Vậy C ≥ 0.

Ví dụ 3: Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geq 6$.

• *Nhận xét*: Dự đoán rằng đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Do vậy ta đặt: $a=1+x$, $b=1+y$, ($x, y\in$ R). Từ giả thiết suy ra: $c=1-x-y$.

Ta có: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=(1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2+(1+x)(1+y)+(1+y)(1-x-y)+(1-x-y)(1+x)$

$= x^2+xy+y^2+6 = \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+6\geq 6$

Đẳng thức xảy ra ⇔ $y=0$ và $x+\frac{1}{2}y=0$ ⇔ $x=y=0$ hay a = b = c =1. Vậy A ≥ 6.

Ví dụ 4: Cho $a+b=c+d$. Chứng minh rằng: $D = a^2+b^2+ab \ge 3cd$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = c = d.

Do vậy đặt: $a=c+x$, với $x \in R$. Từ giả thiết suy ra $b=d-x$.

Ta có: $D = (c+x)^2+(d-x)^2+(c+x)(d-x) = c^2+d^2+x^2+cd+cx-dx$

$$= \left(c^2+d^2+\frac{1}{4}x^2-2cd+cx-dx\right)+3cd+\frac{3}{4}x^2$$

$$= \left(c-d+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2+3cd \ge 3cd.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$ và $c-d+\frac{1}{2}x=0 \Leftrightarrow x=0$ và c = d hay a = b = c = d.

Vậy $D \ge 3cd$.

Ví dụ 5: Cho $a+b\ge 2$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3 \le a^4+b^4$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Do vậy đặt $a=1+x,\ b=1+y$. Từ giả thiết suy ra $x+y\ge 0$.

Ta có: $a^3+b^3\le a^4+b^4 \Leftrightarrow (1+x)^3+(1+y)^3 \le (1+x)^4+(1+y)^4$

$\Leftrightarrow (1+x)^4+(1+y)^4-(1+x)^3-(1+y)^3\ge 0 \Leftrightarrow x(1+x)^3+y(1+y)^3\ge 0$

$\Leftrightarrow x+y+3(x+y)(x^2-xy+y^2)+3(x^2+y^2)+x^4+y^4\ge 0$ (Đúng vì $x+y\ge 0$)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0$ hay a = b = 1. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho $a \le 4$. Chứng minh rằng: $E = a^2(2-a)+32\ge 0$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = 4.

Do vậy đặt $a=4-x$. Từ giả thiết suy ra $x \ge 0$.

Ta có: $E = (4-x)^2(2-4+x)=x^3-10x^2+32x=x\left[(x-5)^2+7\right]\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $x = 0$ hay a = 4. Vậy $E \ge 0$.

Ví dụ 7: Cho $ab \ge 1$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2\ge a+b$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Do vậy đặt $a=1+x;\ b=1+y$.

Ta có: $ab \ge 1 \Leftrightarrow (1+x)(1+y)\ge 1 \Leftrightarrow x+y+xy\ge 0$

Mặt khác:

$a^2+b^2\ge a+b \Leftrightarrow (1+x)^2+(1+y)^2\ge (1+x)+(1+y) \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y\ge 0$

Lại có: $x^2+y^2\ge 2xy$, với mọi x, y nên ta có:

$$x^2+y^2+x+y\ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x+y\ge 0 \text{ (Đúng vì } xy+x+y\ge 0)$$

Đẳng thức xảy ra ⇔ $x = y = 0$ hay $a = b = 1$. Vậy BĐT được chứng minh.

2. Dạng cho biết điều kiện của tổng các biến nhưng không (hoặc khó) dự đoán điều kiện của biến để đẳng thức xảy ra.

Đối với loại này ta cũng có thể đổi biến như trên.

Ví dụ 8: Cho $a \le 1$; $a + b \ge 3$. Chứng minh rằng: $F = 3a^2 + b^2 + 3ab - \frac{27}{4} \ge 0$

• Đặt $a = 1 - x$ và $a + b = 3 + y$. Từ giả thiết suy ra $x, y \ge 0$ nên ta có: $b = 2 + x + y$.

Từ đó : $F = 3(1-x)^2 + (2+x+y)^2 + 3(1-x)(2+x+y) - \frac{27}{4} = x^2 + y^2 - 5x + 7y - xy + \frac{25}{4}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{2}y \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra ⇔ $x = \frac{5}{2}$ và $y = 0$ hay $a = -\frac{3}{2}$ và $b = \frac{9}{2}$.

Vậy bất đẳng thức $F \ge 0$ được chứng minh.

Ví dụ 9: Cho a, b, c $\in [1; 3]$ và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \le 14$ b) $a^3 + b^3 + c^3 \le 36$

• Đặt $a = x + 1$; $b = y + 1$; $c = z + 1$. Khi đó $x, y, z \in [0; 2]$ và $x + y + z = 3$

Giả sử $x = \max\{x; y; z\}$ suy ra: $x + y + z = 3 \le 3x \Rightarrow 1 \le x \le 2 \Rightarrow (x-1)(x-2) \le 0$

nên: $x^2 + y^2 + z^2 \le x^2 + (y+z)^2 = x^2 + (3-x)^2 = 5 + 2(x-1)(x-2) \le 5$

Tức là: $x^2 + y^2 + z^2 \le 5$ (*). Tương tự ta chứng minh được $x^3 + y^3 + z^3 \le 9$ (**)

a) Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3 \quad (1)$$

Thay (*) vào (1) ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \le 14$ là điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x+y+z) + 9 \quad (2)$$

Thay (*) và (**) vào (2) ta có: $a^3 + b^3 + c^3 \le 36$ là điều phải chứng minh.

Ví dụ 10: Cho các số thực a, b với $a + b \ne 0$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + \left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 \ge 2$.

• Đặt $c=-\frac{1+ab}{a+b}$. Ta có: $ab+bc+ca=-1$ và lúc này BĐT cần chứng minh trở thành:

$a^2+b^2+c^2\ge 2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge -2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

3. Dạng bất đẳng thức với điều kiện cho ba số có tích bằng 1

$\boxed{\text{Cách1}}$: Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$, với $x, y, z\ne 0$.

Sau đây là một số ví dụ làm sáng tỏ điều này.

Ví dụ 11: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{2}$$

• *Nhận xét*: a, b, c là các số thực dương và $abc=1$ nên ta đặt:

$$a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}, \text{ với } x, y, z \text{ là các số thực dương.}$$

Ta có:
$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}+1\right)}+\frac{1}{\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}+1\right)}+\frac{1}{\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}+1\right)}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{xy+zx}+\frac{zx}{yz+xy}+\frac{xy}{zx+yz}\ge\frac{3}{2}$$

Đây chính là BĐT Néb–sít cho ba số dương xy, yz, zx, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 12: (Ôlimpic quốc tế 2000) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$

• *Nhận xét*: a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$, nên ta đặt:

$$a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}, \text{ với } x, y, z \text{ là các số thực dương.}$$

Ta có: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz} \le 1$$

$$\Leftrightarrow (x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz \qquad (*)$$

Đặt $x = m+n;\ y = n+p;\ z = p+m$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow$ $(m+n)(n+p)(p+m) \ge 8mnp$ (**)

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương ta có:

$$m+n \ge 2\sqrt{mn};\ n+p \ge 2\sqrt{np};\ p+m \ge 2\sqrt{pm}$$

Ba bất đẳng thức trên có hai vế đều dương nên nhân vế theo vế ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý: Ta có thể chứng minh (*) theo cách sau đây:

Do vai trò x, y, z có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát nên giả sử : $x \ge y \ge z > 0$. Như vậy $x - y + z > 0$ và $y - z + x > 0$.

+ Nếu $z - x + y \le 0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

+ Nếu $z - x + y > 0$, áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương ta có:

$$\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \le x; \qquad \sqrt{(y-z+x)(z-x+y)} \le y;$$

$$\sqrt{(z-x+y)(x-y+z)} \le z$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, suy ra (*).

Vậy (*) đúng cho mọi x, y, z là các số thực dương, suy ra bài toán được chứng minh.

***Phát hiện:* Việc đổi biến và vận dụng (**) một cách khéo léo giúp ta giải được bài toán ở Ví dụ 13 sau đây:**

Ví dụ 13: (Ôlimpic quốc tế 2001) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1.$$

• Đặt $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}};\ y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}};\ z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$.

Ta thấy x, y, z đều dương và BĐT cần chứng minh trở thành $S = x+y+z \ge 1$.

Do $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+8bc} \Rightarrow \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{8bc}{a^2}$.

Tương tự ta có: $\frac{1}{y^2} - 1 = \frac{8ca}{b^2};\ \frac{1}{z^2} - 1 = \frac{8ab}{c^2}$.

Suy ra: $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=8^3$ (1)

Mặt khác nếu $S = x + y + z < 1$

thì: $T=\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) > \left(\frac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{z^2}-1\right)$

– Ta thấy $(S - x)(S - y)(S - z) = (x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ (theo (**) ở ví dụ 12) (2)

– Với ba số dương $x + y$, $y + z$, $z + x$, ta lại có $(S+x)(S+y)(S+z)\geq 64xyz$ (3)

– Nhân (2) và (3) vế với vế, ta được: $(S^2-x^2)(S^2-y^2)(S^2-z^2)\geq 8^3x^2y^2z^2$

hay: $\left(\frac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{z^2}-1\right)\geq 8^3$

Từ đây suy ra: $T > 8^3$ mâu thuẩn với (1).

Vậy $S = x + y + z \geq 1$, tức bài toán được chứng minh.

Ngược lại, đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các biểu thức (hoặc biến đổi của nó) có chứa các biểu thức có dạng: $\frac{x}{y};\frac{y}{z};\frac{z}{x}$, với $x, y, z \neq 0$. Lúc này việc đặt $a=\frac{x}{y}; b=\frac{y}{z}; c=\frac{z}{x}$, với $abc = 1$ là một phương pháp hữu hiệu, sau đây là các ví dụ minh chứng điều này:

Ví dụ 14: Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

1) $\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\leq 1$ 2) $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1.$

1) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\leq 1.$

Đặt $x=\frac{a}{b}; y=\frac{b}{c}; z=\frac{c}{a}$. Ta có x, y, z là các số thực dương có tích $xyz = 1$.

Suy ra: $\frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\leq 1$

$\Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) + (y + 2)(z + 2) + (z + 2)(x + 2) \leq (x + 2)(y + 2)(z + 2)$

$\Leftrightarrow (xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 12 \leq xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8$

$\Leftrightarrow 4 \le xyz + xy + yz + zx \Leftrightarrow 3 \le xy + yz + zx$.

Đây là bất đẳng thức đúng vì áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho ba số dương ta có:

$xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$. Suy ra điều phải chứng minh.

2) *Cách 1*: Chứng minh tương tự câu 1).

Cách 2: Ta có: $2\left(\frac{b}{a+2b} + \frac{c}{b+2c} + \frac{a}{c+2a}\right) + \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}\right) = 3$

Áp dụng kết quả bài toán 1), ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2: Ngoài cách đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$ như trên ta còn có cách đổi biến khác. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 15: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn *abc* = 1.Chứng minh:

$$\frac{a}{(a+1)^2} + \frac{b}{(b+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} - \frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)} \le \frac{1}{4} \qquad (*)$$

• Đặt: $x = \frac{1-a}{1+a}; y = \frac{1-b}{1+b}; z = \frac{1-c}{1+c} \Rightarrow -1 < x, y, z < 1$ và

$a = \frac{1-x}{1+x}; b = \frac{1-y}{1+y}; c = \frac{1-z}{1+z}$.

Từ $abc = 1 \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z) \Rightarrow x + y + z + xyz = 0$.

Mặt khác: $\frac{4a}{(a+1)^2} = 1 - x^2; \frac{2}{a+1} = 1 + x$

Tương tự: $\frac{4b}{(b+1)^2} = 1 - y^2; \frac{2}{b+1} = 1 + y$

và $\frac{4c}{(c+1)^2} = 1 - z^2; \frac{2}{c+1} = 1 + z$

nên: $(*) \Leftrightarrow \frac{4a}{(a+1)^2} + \frac{4b}{(b+1)^2} + \frac{4c}{(c+1)^2} \le 1 + 2.\frac{2}{(a+1)}.\frac{2}{(b+1)}.\frac{2}{(c+1)}$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 + 1 - y^2 + 1 - z^2 \le 1 + 2(1+x)(1+y)(1+z)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z + xyz) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \ge 0$.

Đây là bất đẳng thức luôn đúng nên bài toán được chứng minh.

Phát hiện: Việc đổi biến bằng cách đặt $a=\frac{x}{y}; b=\frac{y}{z}; c=\frac{z}{x}$ ở đây còn áp dụng được rất hay ở bài toán chứng minh đẳng thức, ví dụ 16; 17 sau đây cho thấy điều này. (Việc đưa ra hai ví dụ sau nhằm nhấn mạnh thêm tính đa dạng và hữu hiệu của phương pháp đổi biến trong giải toán nói chung).

Ví dụ 16: Cho *a, b,* c là ba số thực thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$$

• *Nhận xét*: Vì $abc=1$ nên ta có thể đặt $a=\frac{x}{y}; b=\frac{y}{z}; c=\frac{z}{x}$, với *x, y, z* $\neq 0$.

Khi đó vế trái của đẳng thức trên được biến đổi thành:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}}+\frac{1}{1+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=\frac{yz}{xy+yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz+zx}+\frac{xy}{xy+yz+zx}$$

= 1 (đpcm).

Ví dụ 17: Cho *a, b,* c là ba số thực thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(b+1-\frac{1}{c}\right)\left(c+1-\frac{1}{a}\right) \quad (*)$$

• *Nhận xét*: Tương tự trên ta đặt $a=\frac{x}{y}; b=\frac{y}{z}; c=\frac{z}{x}$, với *x, y, z* $\neq 0$.

Khi đó vế trái của đẳng thức (*) được biến đổi thành:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)=\frac{x-y+z}{y}.\frac{y-z+x}{z}.\frac{z-x+y}{x}$$

$$=\frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz} \quad (1)$$

Tương tự ta cũng biến đổi được vế phải của (*) về biểu thức (1), suy ra đpcm.

4. Đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c không âm có vai trò như nhau ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến như sau:

Đặt $x=a+b+c$; $\quad y=ab+bc+ca$; $\quad z=abc$.

Ta có các đẳng thức sau:

$xy - z = (a+b)(b+c)(c+a)$ (1)

$x^2 + y = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)$ (2)

$x^2 - 2y = a^2 + b^2 + c^2$ (3)

$x^3 - 3xy + 3z = a^3 + b^3 + c^3$ (4)

Cùng với việc áp dụng các bất đẳng thức sau:

$x^2 \geq 3y$ (5)

$x^3 \geq 27z$ (6)

$y^2 \geq 3xz$ (7)

$xy \geq 9z$ (8)

$x^3 - 4xy + 9z \geq 0$ (9)

(Bạn đọc tự chứng minh các bất đẳng thức trên).

Sau đây là một số ví dụ để làm sáng tỏ vấn đề này:

Ví dụ 18: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c)$$

• Đặt $x = a+b+c$; $y = ab+bc+ca$; $z = abc$.

Theo (1) thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$xy - z \geq 2(1+x) \Leftrightarrow xy - 1 \geq 2(1+x) \Leftrightarrow x(y-2) \geq 3.$$

Do $z = abc = 1$ nên theo (6) và (7) suy ra: $x \geq 3$; $y \geq 3$ suy ra: $x(y-2) \geq 3$ là BĐT đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 3$ hay a = b = c =1. Suy ra bài toán được chứng minh.

Ví dụ 19: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c = 3$. Chứng minh:

$$abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \geq 5$$

• Đặt $x = a+b+c$; $y = ab+bc+ca$; $z = abc$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$z + \frac{12}{y} \geq 5 \quad (*)$$

Theo (9) kết hợp với $x = a+b+c = 3$ ta có: $27 - 12y + 9z \geq 0$.

Suy ra: $$z \geq \frac{4y-9}{3} \Rightarrow z + \frac{12}{y} \geq \frac{4y-9}{3} + \frac{12}{y} \quad (**)$$

Mặt khác: $\frac{4y-9}{3}+\frac{12}{y}\ge 5 \Leftrightarrow 4y^2-9y+36\ge 15y \Leftrightarrow (y-3)^2\ge 0$ (đúng với mọi y).

Từ (*) và (**) suy ra bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c =1.

Ví dụ 20: Cho ba số không âm a, b, c, thoả mãn: $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh:

$$3(a^2+b^2+c^2)+abc\ge 10 \quad (*)$$

• Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Do $y+z=ab+bc+ca+abc=4$, nên theo (3) bất đẳng thức (*) trở thành:

$$3(x^2-2y)+z\ge 10 \Leftrightarrow 3x^2-6\ge 7y.$$

Mặt khác, theo (9) suy ra:

$$x^3-4xy+9(y+z)\ge 9y \Rightarrow x^3+36\ge 9y+4xy \Rightarrow y\le \frac{x^3+36}{4x+9}$$

Vậy để hoàn thành bài toán ta cần chứng minh: $3x^2-6\le 7.\frac{x^3+36}{4x+9}$.

Thật vậy, từ (5) và (6) suy ra:

$$4=y+z\le \frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27} \Rightarrow x^3+9x^2-108\ge 0 \Rightarrow (x-3)(x^2+12x+36)\ge 0 \Rightarrow x\ge 3.$$

Từ đó ta có: $3x^2-6\le 7.\frac{x^3+36}{4x+9} \Leftrightarrow 12x^3-24x+27x^2-54\ge 7x^3+252$

$$\Leftrightarrow \quad (x-3)(5x^2+42x+102)\ge 0$$

Đây là bất đẳng thức đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c = 1.

Ví dụ 21: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 3. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge \frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c}$$

• Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca=3$; $z=abc$.

Ta có: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge \frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge \frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c} \quad (*)$$

Theo (1) và (2) thì (*) trở thành:

$$\frac{x^2+y}{xy-z}\ge \frac{x}{6}+\frac{3}{x} \Leftrightarrow (x^2+3)6x-(x^2+18)(3x-z)\ge 0$$

$\Leftrightarrow \quad 6x^3 + 18x - 3x^3 - 54x + x^2z + 18z \ge 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 36x + x^2z + 18z \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad 3(x^3 - 12x + 9z) + x^2z - 9z \ge 0 \quad \Leftrightarrow 3(x^3 - 4xy + 9z) + z(x^2 - 9) \ge 0$

Do y = 3 nên từ (5) suy ra $x^2 \ge 9$, kết hợp (9) ta có bất đẳng thức trên đúng, suy ra bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra ⇔ a = b = c = 1.

Ví dụ 22: Cho ba số a, b, c thuộc (0; 1) thoả mãn $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$.

Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + 5abc \ge 1$

• Ta có: $abc = (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc$.

Do vậy, nếu đặt $x = a+b+c;\ y = ab+bc+ca = 3;\ z = abc$ thì ta có:

$2z = 1 - x + y$.

Theo (9) thì ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x^3 - 3xy + 3z + 5z \ge 1 \Leftrightarrow x^3 - 3xy + 8z \ge 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 \ge y(3x-4)$$

Chú ý rằng: $1 - x + y = 2z \ge 0$ và $x^2 \ge 3y$ suy ra: $x - 1 < y < \frac{x^2}{3}$.

Ta xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $x \le 1$ thì $x^3 - 4x + 3 = (1-x)(3-x-x^2) \ge 0 > y(3x-4)$.

Trường hợp 2: Nếu $1 < x < \frac{4}{3}$ thì: $3x - 4 < 0$ và $0 < x - 1 < y$, suy ra:

$$(x^3 - 4x + 3) - y(3x-4) > (x^3 - 4x + 3) - (x-1)(3x-4) = (x-1)^3 > 0$$

Trường hợp 3: Nếu $x \ge \frac{4}{3}$ thì:

$$(x^3 - 4x + 3) - y(3x-4) > (x^3 - 4x + 3) - \frac{x^2}{3}(3x-4) = \frac{(2x-3)^2}{2} \ge 0$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $x^3 - 4x + 3 \ge y(3x-4)$ luôn đúng, suy ra bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = \frac{1}{2}$.

II. Các bài tập áp dụng :

Bài 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho a, b > 0 thoả mãn a + b = 1. Chứng minh: $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \ge 14$.

b) Cho a + b + c + d = 1. Chứng minh: $(a+c)(b+d) + 2(ac+bd) \le \frac{1}{2}$.

c) Cho $a + b + c \geq 3$. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

d) Cho $a + b > 8$ và $b \geq 3$. Chứng minh: $27a^2 + 10b^3 > 945$.

Bài 2: Cho a, b, c là các số dương và $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 2$. Chứng minh: $8abc \leq 1$

Bài 3: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 5(a + b + c) - 7$$

Bài 4: Cho các số dương a, b, c sao cho $abc = 1$.

Chứng minh: $\dfrac{a+3}{(a+1)^2} + \dfrac{b+3}{(b+1)^2} + \dfrac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3$

Bài 5: Cho các số dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq \dfrac{3}{2}(a + b + c - 1)$

Bài 6: Cho ba số a, b, c không âm thoả mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$0 \leq 27(ab + bc + ca) - 54abc \leq 7$$

Bài 7: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh:

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq (1+a)(1+b)(1+c) - 2(1+abc)$$

BÀI GIẢNG 8

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG CÁCH SỬ DỤNG VAI TRÒ NHƯ NHAU CỦA CÁC BIẾN

I. Ví dụ:

Ví dụ 1: Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0 \qquad (*)$$

Lời giải

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

+ Nếu có hai trong ba số *a, b, c* bằng nhau thì BĐT hiển nhiên đúng.

+ Nếu $a>b>c$, chia hai vế của (*) cho $(a-b)(b-c)(a-c)$ ta được BĐT tương đương:

$$\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b}\ge 0 \quad (1)$$

(1) luôn đúng do $\begin{cases} a>b>0 \\ 0<b-c<a-c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c}$ và $\frac{c}{a-b}>0$.

Ví dụ 2: Cho các số thực *a, b, c* đôi một khác nhau thuộc đoạn [0; 2]. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge \frac{9}{4} \qquad (*)$$

Lời giải

• Sử dụng BĐT Cô-si với $x>0$, $y>0$, ta có: $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x+y)^2\ge 2.\frac{1}{xy}.4xy=8$.

Suy ra: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge \frac{8}{(x+y)^2}$ (1). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a>b>c$. Áp dụng BĐT (1) cho cặp số dương $a-b$ và $b-c$, ta có: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\ge \frac{8}{(a-b+b-c)^2}=\frac{8}{(a-c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a-b=b-c$.

Suy ra: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge \frac{8}{(a-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\frac{9}{(a-c)^2}$.

Mặt khác, do $a, c\in[0;2]$ và $a>c$ nên $0<a-c\le 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=2$ và $c=0$.

Do đó: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge \frac{9}{(a-c)^2}\ge \frac{9}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi *(a; b; c)* = (2; 1; 0) và các hoán vị.

Ví dụ 3: Cho ba số dương *a, b, c* thoả mãn: $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\ge ab+bc+ca$$

Lời giải

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

Từ giả thiết ta có: $3c+c^3\le 4=a+b+c+abc\le 3a+a^3 \Rightarrow a\ge 1$ và $c\le 1$.

+ Nếu $a\ge b\ge 1\ge c$ thì $4\ge a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\le 4$. Do đó:

$$(a+b-2)^2\ge 4(a-1)(b-1)\ge ab(a-1)(b-1)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-ab)(ab+1)\ge (4-a-b)(a+b-1)\ \Leftrightarrow a+b-ab\ge \frac{4-a-b}{ab+1}(a+b-1)\quad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $c=\dfrac{4-a-b}{ab+1}$. Kết hợp với (1) ta có:

$$a+b-ab\ge c(a+b-1)\Leftrightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca\quad \text{(đpcm).}$$

+ Nếu $a\ge 1\ge b\ge c$ thì ta có $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0 \Rightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca+1-abc$ (2)

Mặt khác, áp dụng BĐT Cô-si cho các số dương, ta có:

$$4=a+b+c+abc\ge 4\sqrt[4]{abcabc}\Rightarrow abc\le 1.$$

Kết hợp với (2) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 4: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le \frac{3}{2}$$

Lời giải

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

Vì $abc=1$ nên $bc\le 1$ và $a\ge 1$. Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)=2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}\right)$$

$$\le\quad 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+bc)^2}\right)=\frac{4}{1+bc}=\frac{4a}{1+a}$$

Suy ra: $$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le 2\sqrt{\frac{a}{1+a}}\qquad (1)$$

Mặt khác ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \le \dfrac{\sqrt{2}}{1+a}$ (2)

Ta sẽ chứng minh: $2\sqrt{\dfrac{a}{1+a}} + \dfrac{\sqrt{2}}{1+a} \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (3)

Thật vậy, (3) $\Leftrightarrow 1+3a-2\sqrt{2a(1+a)} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a}\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+abc \ge 4$$

Lời giải

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$. Suy ra $c \le 1$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2+abc = 9-2(ab+bc+ca)+abc = 9+ab(c-2)-2c(3-c)$.

Lại có: $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2$ và $c-2<0$ nên

$$a^2+b^2+c^2 \ge 9+(c-2)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2-2c(3-c) \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh: $9+(c-2)\left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2-2c(3-c) \ge 4$ (2)

Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow (c-1)^2(c+2) \ge 0$ (luôn đúng).

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 6: Cho *a, b, c* là các số thực không âm thoả mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca \le 2+abc$$

Lời giải

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a = max\{a, b, c\}$. Xét hai khả năng:

+ Với $a \ge b \ge c \ge 0$. Khi đó:

$a(b-a)(b-c) \le 0 \Leftrightarrow a^2b+abc \ge ab^2+ca^2 \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le a^2b+bc^2+abc$

(1)

Mà $a^2b+bc^2-2 = b(3-b^2)-2 = -(b-1)^2(b+2) \le 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

+ Với $a \ge c \ge b \ge 0$. Khi đó:

$$b(c-a)(c-b)\le 0 \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le ca^2+cb^2+abc \qquad (3)$$

Lại có: $ca^2+cb^2-2=c(3-c^2)-2=-(c-1)^2(c+2)\le 0 \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a;b;c)=(1;1;1),\ \left(\sqrt{2};0;1\right),\ \left(0;1;\sqrt{2}\right),\ \left(1;\sqrt{2};0\right)$.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho *a, b, c* là các số thực không âm, thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca-3abc\ge \frac{1}{4}.$$

Bài 2: Cho *a, b, c* là các số thực không âm, thoả mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$abc+2\ge ab+bc+ca\ge abc.$$

Bài 3: Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn [–1; 1]. Chứng minh rằng:

$$|(a-b)(b-c)|+|(b-c)(c-a)|+|(c-a)(a-b)|\ge \frac{5}{2}|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Bài 4: Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn [1; 2]. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10.$$

Bài 5: Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn [0; 1]. Chứng minh rằng:

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1.$$

Bài giảng 6 : MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

Bài 2. Giả sử x, y là hai số dương thỏa mãn điều kiện $x+y=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$.

Bài 3. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $x+y\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau : $A=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Bài 4. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$$

Bài 5. Cho x, y, z > 0 và x + y + z = 1. Chứng minh rằng : $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\ge 36$.

Bài 6. Cho x , y , z là các số dương thỏa mãn x + y + z = 0. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$

Bài 7. Cho x, y thỏa mãn điều kiện x + y = 1 và x > 0. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B = x^2y^3.

Bài 8. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

Bài 9. Cho x, y, z là 3 số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x\ge y, x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

P = $\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$.

Bài 10. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn x(x + y + z) = 3yz thì :

$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(z+y)\le 5(y+z)^3$

Bài 11. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : A = $3(x^4 + y^4 + x^2y^2) – 2(x^2 + y^2) + 1$.

Bài 12. Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$.

Bài 13. Cho x, y là các số thực thay đổi . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

A = $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$.

Bài 14. Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

P = $\frac{a}{2b+9c+1945d}+\frac{b}{2c+9d+1945a}+\frac{c}{2d+9a+1945b}+\frac{d}{2a+9b+1945c}$.

Bài 15. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức M = $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$.

Bài 16. Cho các số x, y, z, t > 0 thỏa mãn : xy + 4zt + 2yz + 2xt = 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: S = $\sqrt{xy} + 2\sqrt{zt}$.

Bài 17. Cho $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{6}$. Chứng minh rằng : $x + y \geq 10$.

Bài 18. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} = \frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x + y + z ?

Bài 19. Cho các số thực a, b, c ≥ 1. CMR: $abc + 6029 \geq 2010\left(\sqrt[2010]{a} + \sqrt[2010]{b} + \sqrt[2010]{c}\right)$.

Bài 20. cho x, y, z là các số dương thỏa mãn x + y + z ≥12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

H = $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}$.

Bài 21. Cho a ; b ; c là ba số dương khác nhau đôi một. Tìm min :

F = $\frac{(a-x)(a-y)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{(b-y)(b-x)}{b(b-a)(b-c)} + \frac{(c-x)(c-y)}{c(c-a)(c-b)}$ trong đó x ; y là hai số dương có tổng bằng 1

Bài 22. Cho $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$. Tìm cực trị của biểu thức: A = $a^2_1 + a^2_2 + \ldots + a^2_n$

Bài 23. Cho x; y; z ≥0 thỏa mãn điều kiện: x + y+ z = a.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q = $(1+\frac{a}{x})(1+\frac{a}{y})(1+\frac{a}{z})$.

Bài 24. Cho các số thực a , b ,c ≥ 1 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} + \sqrt{d-1}$.

Bài 25. Cho a + b = 16. Tìm min của biểu thức: N = $5ab^2 + \sqrt{a(b+16)}$ +2(a - 1) + 3(b + 1).

Bài 26. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{(a+b)^2} + \frac{b^3}{(b+c)^2} + \frac{c^3}{(c+a)^2} \geq \frac{a+b+c}{4}$

b) $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$

c) $\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+3bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+3ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{5}$.

Bài 27. Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c + abc = 4. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

Bài 28. Cho các số thực a, b, c $\in [0;1]$. Chứng minh rằng: $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \leq 1$

Bài 29. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\ge 3.$$

Bài 30. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\ge \frac{1}{9}+\frac{2}{27}\left(xy+yz+xz\right)$$

BÀI GIẢNG 9
MỘT HƯỚNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Cơ sở lí thuyết

Xuất phát từ bất đẳng thức $(a-b)^2 \geq 0, \forall a,b$ *(*)*
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

1. Từ (*) ta suy ra: $a^2+b^2 \geq 2ab, \ \forall a,b$ (1a)

Hay $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab, \forall a,b$ (1b)

$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2, \ \forall a,b$ (1c)

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2, \ \forall a,b$ (1d)

2. Với *a, b* > 0. Chia 2 vế của (1a) cho *ab* ta được:

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$ (2)

3. Cộng 2 vế của (1a) với 2*ab* ta được $(a+b)^2 \geq 4ab$ Hay $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$

(3)

Với *a, b* $\geq$0. Khai phương 2 vế ta được: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (BĐT Cô–si với 2 số không âm)

4. Với *a, b* > 0, chia 2 vế của (3) cho *ab(a+b)*, ta được:

$\dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b}$ (4)

Hay $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$, $\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{4b} \geq \dfrac{1}{a+b}$

5. Với *a, b* > 0, nhân hai vế của (2) với *a* ta được:

$\dfrac{a^2}{b}+b \geq 2a$ (5a)

Hoặc nhân hai vế với *b*, ta được:

$a+\dfrac{b^2}{a} \geq 2b$ (5b)

6. Với *a, b* > 0. Lấy nghịch đảo 2 vế của (1a) ta được:

$$\frac{1}{2ab} \geq \frac{1}{a^2+b^2} \qquad (6a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} \qquad \text{(nhân 2 vế với } a+b \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} \qquad (6b)$$

7. Với $a, b > 0$, từ (1) $\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (7)

8. Từ $(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (8a)

Hay $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ (8b)

B. Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác (p là nửa chu vi). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

• Áp dụng (4), với $a, b > 0$ ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Từ đó:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{2p-a-b} = \frac{4}{c} \qquad (a)$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{2p-b-c} = \frac{4}{a} \qquad (b)$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{2p-a-c} = \frac{4}{b} \qquad (c)$$

Cộng (a), (b), (c), vế theo vế, ta được:

$$2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b} \geq a+b+c$$

Lời giải

Từ công thức (5) ta có: $\frac{a^2}{c}+c\geq 2a;\ \frac{b^2}{a}+a\geq 2b;\ \frac{c^2}{b}+b\geq 2c$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq a+b+c \qquad (1)$$

Tương tự : $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c \quad (2)$

Cộng (1) với (2) ta được: $\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\geq a+b+c$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải

• Từ công thức (5) ta có:

$\frac{(2a)^2}{b+c}+(b+c)\geq 2.2a=4a;\quad \frac{(2b)^2}{a+c}+(a+c)\geq 2.2b=4b;\quad \frac{(2c)^2}{b+c}+(a+b)\geq 2.2c=4c$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được: $\frac{4a^2}{b+c}+\frac{4b^2}{a+c}+\frac{4c^2}{a+b}\geq 2(a+b+c)$

Chia 2 vế cho 4 ta được đpcm.

Bài 4. Cho $x > 0$. Chứng minh rằng: $(1+x)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)\geq 16$

Lời giải

• Từ (3) ta có: $(1+x)^2\geq 4x>0 \qquad (a)$

và $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\geq 4\frac{1}{x}>0 \qquad (b)$

Nhân (a), (b), vế theo vế, suy ra đpcm.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

Lời giải

• Từ (3) ta có $(a+b)^2\ge 4ab$. Chia 2 vế cho $ab(a+b)^2>0$, ta được: $\frac{1}{ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}$

Tương tự: $\frac{1}{ac}\ge\frac{4}{(a+c)^2}$; $\frac{1}{bc}\ge\frac{4}{(b+c)^2}$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge 4\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\right)$$

$\Rightarrow$ $$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\ge 4.3\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]$$

$$\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

(theo (8))

Bài 6. Chứng minh rằng: $2(a^3+b^3+c^3)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$

• Từ (7) ta có: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$; $b^3+c^3\ge bc(b+c)$; $c^3+a^3\ge ac(a+c)$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$2(a^3+b^3+c^3)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+(a+c)\quad \text{(đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Bài 7. Cho $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} ax-by=0\\ x+y=1\end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=xy$.

Lời giải

• Trước hết ta tính x, y.

Từ $ax=by$ $\Rightarrow ax+ay=ay+by\Rightarrow a(x+y)=(a+b)y\Rightarrow y=\frac{a}{a+b}\Rightarrow x=\frac{b}{a+b}$

Khi đó: $$xy=\frac{ab}{(a+b)^2}\le\frac{1}{4}$$

Suy ra: $\text{Max}\, xy = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+a+c} + \frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}$$

Lời giải

• Từ (4) ta có: $\dfrac{4}{a+b} \le \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{4a+4b} \le \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{16b}$

Suy ra $\dfrac{1}{2a+(b+c)} \le \dfrac{1}{8a} + \dfrac{1}{4(b+c)} = \dfrac{1}{8a} + \dfrac{1}{4b+4c} \le \dfrac{1}{8a} + \dfrac{1}{16b} + \dfrac{1}{16c}$

Tương tự : $\dfrac{1}{2b+(a+c)} \le \dfrac{1}{8b} + \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{16c}$; $\quad \dfrac{1}{2c+(a+b)} \le \dfrac{1}{8c} + \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{16b}$

Cộng vế với vế 3 bđt trên, rồi rút gọn ta có đpcm.

Bài 9. Cho *a, b, c* > 0 thoả mãn $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c-b} \ge 4$

Lời giải

Từ giả thiết $\dfrac{2}{b} = \dfrac{a+c}{ac} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{2ac}{a+c}$

Suy ra: $\dfrac{a+b}{2a-b} = \dfrac{a + \dfrac{2ac}{a+c}}{2a - \dfrac{2ac}{a+c}} = \dfrac{a^2 + 3ac}{2a^2} = \dfrac{a+3c}{2a}$

Tương tự : $\dfrac{c+b}{2c-b} = \dfrac{c+3b}{2c}$

Do đó: $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c-b} = \dfrac{a+3c}{2a} + \dfrac{c+3a}{2c} = \dfrac{ac+3c^2+ca+3a^2}{2ac}$

$$= \frac{3(a^2+c^2)+2ac}{2ac} \ge \frac{3.2ac+2ac}{2ac} = \frac{8ac}{2ac} = 4 \qquad \text{(đpcm)}.$$

Bài 10. Cho *a, b, c* > 0 thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$a+b+2c \ge 4(1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải

• Từ $a+b+c=1 \Rightarrow b+c=1-a$ và $0 \le c \le 1 \Rightarrow c^2 \le 1 \Rightarrow 1 \ge 1-c^2 \ge 0$

Suy ra: $4(1-a)(1-b)(1-c) \le \left[(b+c)+(1-b)\right]^2(1-c) = (1+c)^2(1-c) =$ $(1-c^2)(1+c)$

$$\le 1+c = a+b+2c \qquad \text{(đpcm).}$$

Bài 11. Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3 \qquad (*)$$

Lời giải

• Đặt $x = b+c-a;\ y = c+a-b;\ z = a+b-c \Rightarrow x+y+z = a+b+c$

Suy ra: $a = \frac{y+z}{2};\quad b = \frac{z+x}{2};\quad c = \frac{x+y}{2}$

Ta có:

$$VT(*) = \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}\right) \ge \frac{1}{2}(2+2+2) = 3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ hay ΔABC đều.

Bài 12. Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

Lời giải

• Tương tự bài 11 ta có: $x+y \ge 2\sqrt{xy},\quad y+z \ge 2\sqrt{yz},\qquad z+x \ge 2\sqrt{zx}$

Suy ra: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = xyz \le \frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2} = abc$

Bài 13. Cho *a, b, c* >0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge a+b+c$$

• Theo (1c) ta có: $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a+b} \ge \frac{a+b}{2}$.

Tương tự: $\frac{b^2+c^2}{b+c} \ge \frac{b+c}{2},\qquad \frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \frac{c+a}{2}$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 14. Cho *a*, *b*, *c* > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải

• Theo (6) ta có : $\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Tương tự: $\frac{b+c}{b^2+c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 15. Cho *a*, *b* > 0 thoả mãn $a+b=1$. Chứng minh rằng: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$ (*)

Lời giải

• Từ (1d) ta có: $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Suy ra:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\ge\frac{5^2}{2}$$

Bài 16. Cho *a*, *b*, *c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\le\frac{a+b+c}{2}$

Lời giải

• Từ (4) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\frac{1}{4}(a+b)$.

Tương tự: $\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\le\frac{1}{4}(b+c)$, $\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\le\frac{1}{4}(c+a)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 17. Cho *a*, *b*, *c* > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{15}{2}$$

Lời giải

Theo (2) ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

$$M=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\ge 2+2+2=6$$

$$N=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)\left(\frac{b}{c+a}+1\right)\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right]-3\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

Suy ra: $M+N\ge 6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 18. Cho 2 số dương *a, b* thoả $a+b=1$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\ge 6$ b) $\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}\ge 14$

Lời giải

• a) Từ (3) ta có $4ab\le(a+b)^2\Rightarrow 4ab\le 1\Rightarrow\frac{1}{ab}\ge 4$ (vì $a, b>0$)

Từ (4) ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Suy ra: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{1}{2}.4+\frac{4}{(a+b)^2}=6$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

b) Tương tự như trên ta có

$$\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}=\frac{4}{2ab}+\frac{3}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+3\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{1}{2}.4+3.\frac{4}{(a+b)^2}=2+12=14$$

Bài 19. Cho *a, b, c, d* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\ge 4$

Lời giải

• Sử dụng công thức (4) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

Suy ra: $$\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)\geq(a+c)\frac{4}{a+b+c+d}$$

Tương tự: $$\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\geq(b+d)\frac{4}{a+b+c+d}$$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 20. Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4\geq 2$.

Lời giải

• Từ (1c) ta có: $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2=4 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2$.

và $2(a^4+b^4)\geq(a^2+b^2)^2\geq 2^2=4$

Suy ra: $a^4+b^4\geq 2$ (đpcm)

Bài 21. Cho $|a|\leq 1, |b|\leq 1, |a+b|=\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A=\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}$ (Đề thi vào lớp 10 THPT Hải Dương)

Lời giải

• Ta có : $A=\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\geq 0$

Xét $A^2=1-a^2+1-b^2+2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leq 2-(a^2+b^2)+1-a^2+1-b^2$

$=4-2(a^2+b^2\leq 4-(a+b)^2=1$

$\Rightarrow |A|\leq 1 \Rightarrow -1\leq A\leq 1$

$A = 1$ khi $a=b \Leftrightarrow |2a|=\sqrt{3}\Leftrightarrow 4a^2=3\Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\max A = 1$ khi $a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $a=b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 22. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2}{1+x^2}=y & (a)\\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=z & (b)\\ \dfrac{2z^2}{1+z^2}=x & (c)\end{cases}$$

Lời giải

• Từ hệ phương trình ta suy ra được: $x, y, z \geq 0$.

Ta có: $1+x^2 \geq 2x \Rightarrow \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow y = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \leq x$

Tương tự: $z = \dfrac{2y^2}{1+y^2} \leq y$, $\quad x = \dfrac{2z^2}{1+z^2} \leq z$.

Như vậy: $\quad x \leq z \leq y \leq x \Rightarrow x = y = z$.

Do đó (a) $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm: (0; 0; 0) hoặc (1; 1; 1).