

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT THIỆU HÓA

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI TÍNH
NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ
HỮU TỈ VÀ VÔ TỈ**

Người thực hiện: Phạm Thị Hằng
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

	Trang
MỤC LỤC	1
1. MỞ ĐẦU	2
1.1. Lí do chọn đề tài	2
1.2. Mục đích nghiên cứu	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu	2
1.4. Phương pháp nghiên cứu	2
2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	2
2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm	2
2.2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm ...	3
2.3. Một số sai lầm thường gặp khi tính nguyên hàm, tích phân của các hàm số hữu tỉ và vô tỉ	3
2.3.1. Sai lầm khi không nắm vững định nghĩa tích phân	3
2.3.2. Sai lầm khi sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp	4
2.3.3. Sai lầm khi biến đổi hàm số dưới dấu nguyên hàm	5
2.3.4. Sai lầm khi biến đổi hàm số dưới dấu tích phân	9
2.3.5. Sai lầm khi vận dụng phương pháp đổi biến số	11
2.3.6. Sai lầm khi vận dụng phương pháp tích phân từng phần	14
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm	17
3. KẾT KUẬN, KIẾN NGHỊ	17
Tài liệu tham khảo	19

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài:

Toán học là nền tảng của mọi ngành khoa học, là chiếc chìa khóa vạn năng để khai phá và thúc đẩy sự phát triển cho các ngành khoa học kỹ thuật, kinh tế, quân sự và trong cuộc sống.

Giải tích toán học nghiên cứu về các khái niệm: Giới hạn, đạo hàm, nguyên hàm, tích phân,... Phép toán cơ bản của giải tích là “Phép lấy giới hạn”, các yếu tố được nghiên cứu trong giải tích thường trừu tượng hơn trong đại số. Chính vì vậy mà phần lớn học sinh THPT rất lúng túng và gặp khó khăn khi học giải tích nói chung và nguyên hàm, tích phân nói riêng. Bên cạnh đó trong đề thi THPT Quốc Gia, bài toán nguyên hàm, tích phân là không thể thiếu.

Trong thực tế, đa số học sinh tính nguyên hàm, tích phân đặc biệt là nguyên hàm, tích phân của các hàm số hữu tỉ và vô tỉ một cách hết sức máy móc đó là: Tìm nguyên hàm của hàm số cần tính tích phân rồi dùng định nghĩa của tích phân hoặc phương pháp đổi biến số, phương pháp tính tích phân từng phần mà rất ít học sinh để ý đến hàm số đó có xác định trên miền lấy nguyên hàm, tích phân hay không? Phép biến đổi hàm số dưới dấu nguyên hàm, tích phân có tương đương không? Phép đặt biến mới trong phương pháp đổi biến số có nghĩa không? Sử dụng phương pháp tích phân từng phần có hợp lí không? Vì thế trong quá trình tính nguyên hàm, tích phân học sinh mắc phải rất nhiều sai lầm mà chưa có tài liệu nào giúp các em tránh được những sai lầm đó. Với hy vọng giúp học sinh khắc phục được những nhược điểm nói trên và đạt được kết quả cao trong kì thi THPT Quốc Gia, tôi mạnh dạn đề xuất sáng kiến kinh nghiệm: ***“Một số sai lầm thường gặp khi tính nguyên hàm, tích phân của các hàm số hữu tỉ và vô tỉ”***.

1.2. Mục đích nghiên cứu:

- Giúp bản thân tự học hỏi, tự nâng cao kiến thức về phần này.
- Vận dụng vào quá trình giảng dạy, đặc biệt là ôn cho học sinh thi THPT Quốc gia.
- Giúp học sinh nắm vững kiến thức, đạt kết quả cao trong quá trình học tập.

1.3. Đối tượng nghiên cứu:

Một số sai lầm thường gặp khi tính nguyên hàm, tích phân của các hàm số hữu tỉ và vô tỉ.

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp điều tra khảo sát thực tế, thu thập thông tin, lựa chọn các ví dụ cụ thể, phân tích tỉ mỉ những sai lầm của học sinh để từ đó đưa ra lời giải đúng của bài toán.
- Thực nghiệm sư phạm.
- Kết hợp linh hoạt các phương pháp dạy học.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm:

Dạy học là một quá trình luôn luôn vận động và phát triển không ngừng. Sự vận động và phát triển mang tính quy luật thống nhất giữa hoạt động dạy của thầy và hoạt động học của trò.

Người giáo viên, với vai trò chủ thể tác động sư phạm phải biết thiết kế và tổ chức quy trình dạy học như: xác định mục tiêu, nhiệm vụ dạy học, lựa chọn nội dung, vận dụng các phương pháp, phương tiện và hình thức tổ chức dạy học.

Trong quá trình dạy học, người thầy phải biết chọn lọc những kiến thức cơ bản quan trọng để truyền thụ cho học sinh. Đồng thời phải dẫn dắt học sinh biết tìm tòi, phát hiện tri thức mới và từng bước giải quyết các vấn đề đó thông qua các phương pháp dạy học phong phú, linh hoạt, phù hợp với từng đối tượng học sinh.

Trong quá trình dạy học, học sinh không ngừng phát huy tính tích cực nhận thức, tự mình rèn luyện các thao tác trí tuệ. Vì vậy giáo viên phải giúp học sinh tự mình khám phá trên cơ sở tự giác và được tự do suy nghĩ, tranh luận, đề xuất các vấn đề cần được giải quyết. Khi học sinh phát hiện được một bài toán hay, điều đó sẽ giúp các em học toán có hiệu quả hơn và được hưởng trọn niềm vui khi tự mình giải được bài toán.

Vậy khi dạy học toán là phải biết phát huy tính sáng tạo và khả năng tư duy toán học sẵn có của học sinh, tạo cho các em niềm tin vào môn học này. Đặc trưng của toán học là tính trừu tượng cao độ, tính lôgic và tính thực nghiệm. Vì thế, người giáo viên phải chú ý đến tất cả các phương diện đó mới có thể hướng dẫn học sinh học toán, mới khai thác được đầy đủ tiềm năng môn toán để thực hiện mục tiêu giáo dục toàn diện.

2.2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm:

Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng là nội dung của chương III sách giáo khoa giải tích 12. Đây là một nội dung khó, đối với học sinh bởi trong các chương trước, học sinh đang làm quen với đạo hàm, còn chương này tính nguyên hàm, tích phân giống như “bài toán ngược” của tính đạo hàm. Bởi vậy học sinh rất lúng túng khi làm các bài toán tính nguyên hàm, tích phân của các hàm số phức tạp như hàm số hữu tỉ, hàm số vô tỉ và thường gặp phải những khó khăn sau:

- Không nắm vững định nghĩa nguyên hàm, tích phân.
- Không nắm vững phương pháp đổi biến số.
- Không nắm vững phương pháp tính tích phân từng phần.

2.3. Một số sai lầm thường gặp khi tính nguyên hàm, tích phân của các hàm số hữu tỉ và vô tỉ.

2.3.1. Sai lầm khi không nắm vững định nghĩa tích phân:

Ví dụ 1. Tính tích phân: $I = \int_1^4 \frac{3x+1}{x^2-5x+6} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

Ta có: $\frac{3x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow 3x+1 = A(x-2) + B(x-3)$

Sử dụng phép đồng nhất thức, ta có:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=10 \\ B=-7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 \left(\frac{10}{x-3} - \frac{7}{x-2} \right) dx = (10 \ln|x-3| - 7 \ln|x-2|) \Big|_1^4 = -17 \ln 2$$

- Phân tích sai lầm: Học sinh không xét tính liên tục của hàm số $y = \frac{3x+1}{x^2-5x+6}$ trên đoạn $[1; 4]$ và đa số học sinh cho rằng đề bài yêu cầu tính tích phân thì mặc định tồn tại của phép tính tích phân đó.

- Lời giải đúng: Hàm số $y = \frac{3x+1}{x^2-5x+6}$ không xác định tại $x=2$ và $x=3$ thuộc đoạn $[1; 4]$ suy ra hàm số không liên tục trên đoạn $[1; 4]$, do đó tích phân trên không xác định.

- Như vậy, cần lưu ý: Khi tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ cần xét xem hàm số $y=f(x)$ có liên tục trên đoạn $[a; b]$ không. Nếu có thì sử dụng các phương pháp đã học để tính tiếp, còn nếu không thì kết luận ngay tích phân đó không tồn tại.

2.3.2. Sai lầm khi sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp:

Ví dụ 2. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$I = \int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1+x^3)^n d(1+x^3) = \frac{(x^3+1)^{n+1}}{3(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

- Phân tích sai lầm: Học sinh không xét trường hợp $n=-1$

- Lời giải đúng:

+) Trường hợp 1: Với $n=-1$, ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(1+x^3)}{1+x^3} = \frac{1}{3} (\ln|1+x^3|) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$

+) Trường hợp 2: Với $n \neq -1$, ta có:

$$I = \int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1+x^3)^n d(1+x^3) = \frac{(x^3+1)^{n+1}}{3(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Với các bài toán chứa tham số, chúng ta cần hết sức thận trọng bởi công thức $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ chỉ đúng khi $\alpha \neq -1$. Còn khi $\alpha = -1$ thì $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$.

Ví dụ 3. Tính nguyên hàm: $I = \int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}} &= t \\ \Rightarrow \left(\frac{n+2}{2} \cdot x^{\frac{n}{2}} + \frac{(n+2)x^{n+1}}{2\sqrt{1+x^{n+2}}} \right) dx &= dt \\ \Leftrightarrow \frac{n+2}{2} x^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^{n+2}} + x^{\frac{n+2}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx &= dt \\ \Leftrightarrow \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}} &= \frac{dt}{t} \cdot \frac{2}{n+2} \\ \Rightarrow I &= \frac{2}{n+2} \int \frac{dt}{t} = \frac{2}{n+2} \cdot \ln|t| + C \\ &= \frac{2}{n+2} \cdot \ln \left| x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}} \right| + C \end{aligned}$$

- Phân tích sai lầm: Học sinh không xét trường hợp $n = -2$

- Lời giải đúng:

+) Trường hợp 1: Với $n = -2$, ta có: $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x| + C$

+) Trường hợp 2: Với $n \neq -2$, đặt $x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}} = t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{n+2}{2} \cdot x^{\frac{n}{2}} + \frac{(n+2)x^{n+1}}{2\sqrt{1+x^{n+2}}} \right) dx &= dt \\ \Leftrightarrow \frac{n+2}{2} x^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^{n+2}} + x^{\frac{n+2}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx &= dt \\ \Leftrightarrow \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}} &= \frac{dt}{t} \cdot \frac{2}{n+2} \\ \Rightarrow I &= \frac{2}{n+2} \int \frac{dt}{t} = \frac{2}{n+2} \cdot \ln|t| + C \\ &= \frac{2}{n+2} \cdot \ln \left| x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}} \right| + C \end{aligned}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi tính nguyên hàm của hàm số chứa tham số,

chúng ta cần lưu ý xét các trường hợp riêng của tham số rồi mới được sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

2.3.3. Sai lầm khi biến đổi hàm số dưới dấu nguyên hàm:

Ví dụ 4. Tính nguyên hàm: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

- Học sinh đã giải như sau:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = t \Rightarrow \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{2dt}{t}$$

$$\Rightarrow I = 2 \int \frac{dt}{t} = 2 \ln|t| + C = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C$$

- Phân tích sai lầm: Phép biến đổi $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}}$ là không tương đương. Do đó, bài giải của học sinh chỉ đúng trong trường hợp $x > 0$.

- Lời giải đúng:

$$\text{Điều kiện tồn tại của hàm số } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \text{ là: } x(1+x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp:

- +) Trường hợp 1: Với $x > 0$, ta có:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = t \Rightarrow \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{2dt}{t}$$

$$\Rightarrow I = 2 \int \frac{dt}{t} = 2 \ln|t| + C = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C$$

- +) Trường hợp 2: Với $x < 0$, ta có:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-1-x}}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{-x} + \sqrt{-1-x} = t \Rightarrow \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{2\sqrt{-1-x}} \right) dx = dt$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{-x} + \sqrt{-1-x}}{2\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-1-x}} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-1-x}} = -\frac{2dt}{t}$$

$$\Rightarrow I = -2 \int \frac{dt}{t} = -2 \ln|t| + C = -2 \ln(\sqrt{-x} + \sqrt{-1-x}) + C$$

- Như vậy, cần lưu ý: Trước khi biến đổi hàm số $f(x)$ dưới dấu nguyên hàm cần tìm điều kiện tồn tại của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 5. Tính nguyên hàm: $I = \int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + 1}} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + 1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = t \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}\right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}\right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} + x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx = \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x} \right| + C$$

- Phân tích sai lầm: Khi đưa x^2 ra khỏi căn bậc hai học sinh không chú ý đến dấu của x .

- Lời giải đúng:

+) Trường hợp 1: Với $x > 0$, ta có:

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + 1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = t \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}\right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}\right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} + x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx = \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x} \right| + C$$

+) Trường hợp 2: Với $x < 0$, ta có:

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + 1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{-x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = - \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx \\
&\text{Đặt } x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = t \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} \right) dx = dt \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \left(1 + \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} \right) dx = dt \\
&\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} + x - \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx = dt \\
&\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} dx = \frac{dt}{t} \\
&\Rightarrow I = - \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = - \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} \right| + C \\
&= - \ln \left| \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x} \right| + C
\end{aligned}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi biến đổi hàm số dưới dấu nguyên hàm, đặc biệt là hàm số chứa căn bậc hai thì $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

2.3.4. Sai lầm khi biến đổi hàm số dưới dấu tích phân:

Ví dụ 6. Tính tích phân: $I = \int_0^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$I = \int_0^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx = \int_0^6 \sqrt{(x-4)^2} dx = \int_0^6 (x-4) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_0^6 = 18 - 24 = -6$$

- Phân tích sai lầm: Phép biến đổi $\sqrt{(x-4)^2} = x-4$ với $x \in [0, 6]$ là không tương đương.

- Lời giải đúng:

$$I = \int_0^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx = \int_0^6 \sqrt{(x-4)^2} dx = \int_0^6 |x-4| dx$$

$$= \int_0^4 (4-x) dx + \int_4^6 (x-4) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_4^6$$

$$= (16 - 8) + (18 - 24) - (8 - 16) = 10$$

- Như vậy, cần lưu ý: $\sqrt[n]{f^{2n}(x)} = |f(x)|$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Do đó, khi tính

$$I = \int_a^b \sqrt[n]{f^{2n}(x)} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

ta phải xét dấu hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ rồi sử

dụng tính chất của tích phân tách I thành tổng của các tích phân không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 7. Tính tích phân: $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx$$

$$\text{Đặt: } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$$

Đổi cận: Với $x = -1$ thì $t = -2$

Với $x = 1$ thì $t = 2$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^2 \frac{dt}{t^2 - 2} = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{t + \sqrt{2}} - \frac{1}{t - \sqrt{2}} \right) dt$$

$$= \left(\ln \left| \frac{t + \sqrt{2}}{t - \sqrt{2}} \right| \right) \Big|_{-2}^2 = 2 \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

- Phân tích sai lầm: Phép biến đổi: $\frac{x^2 - 1}{1 + x^4} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2}$ không tương đương vì trong đoạn $[-1; 1]$ chứa $x=0$. Nên không thể chia cả tử và mẫu cho x^2 được.

- Lời giải đúng:

$$\text{Xét hàm số: } F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right|$$

$$\frac{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(2x - \sqrt{2}) - (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(2x + \sqrt{2})}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$\text{Ta có: } F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)^2}{\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2} = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right| \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi tính tích phân cần chia cả tử và mẫu cho x cần để ý rằng trong đoạn lấy tích phân phải không chứa điểm $x=0$.

2.3.5. Sai lầm khi vận dụng phương pháp đổi biến số:

Ví dụ 8. Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$\text{Đặt: } x = \cos 2t \Rightarrow dx = -2 \sin 2t dt$$

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}} dx = -2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\cos 2t}}{\sqrt{1+\cos 2t}} \cdot \frac{\sin 2t dt}{(1+\cos 2t)^2}$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{\tan t \cdot 2 \sin t \cos t dt}{4 \cos^4 t} = - \int_0^1 \frac{\tan^2 t dt}{\cos^2 t} = - \int_0^1 \tan^2 t d(\tan^2 t)$$

$$= - \frac{\tan^3 t}{3} \Big|_0^1 = - \frac{\tan^3 1}{3}.$$

- Phân tích sai lầm: Đổi biến nhưng không đổi cận.

- Lời giải đúng:

$$\text{Đặt: } x = \cos 2t \Rightarrow dx = -2 \sin 2t dt$$

$$\text{Đổi cận: Với } x=0 \text{ thì } t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Với } x=1 \text{ thì } t=0$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}} dx = -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sqrt{1-\cos 2t}}{\sqrt{1+\cos 2t}} \cdot \frac{\sin 2t dt}{(1+\cos 2t)^2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t \cdot 2 \sin t \cos t dt}{4 \cos^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t d(\tan^2 t) \\ &= \frac{\tan^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi đổi biến cần phải đổi cận.

Ví dụ 9. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$

- Học sinh đã giải như sau:

$$\text{Đặt: } 3x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{3}$$

$$\text{Đổi cận: Với } x=0 \text{ thì } t=1$$

$$\text{Với } x=\frac{7}{3} \text{ thì } t=8$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}} = \int_1^8 \frac{\frac{t-1}{3} + 1}{\sqrt[3]{t}} dt = \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{t+2}{\sqrt[3]{t}} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left(t^{\frac{2}{3}} + 2t^{-\frac{1}{3}} \right) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 2 \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} \right) \Big|_1^8 = \frac{46}{5} \end{aligned}$$

- Phân tích sai lầm: Khi đổi biến $3x+1=t$, học sinh không lấy vi phân $3dx=dt$.

- Lời giải đúng:

$$\text{Đặt: } 3x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{3} \Rightarrow 3dx = dt$$

$$\text{Đổi cận: Với } x=0 \text{ thì } t=1$$

$$\text{Với } x=\frac{7}{3} \text{ thì } t=8$$

$$I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}} = \int_1^8 \frac{\frac{t-1}{3} + 1}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{9} \int_1^8 \frac{t+2}{\sqrt[3]{t}} dt$$

$$= \frac{1}{9} \int_1^8 \left(t^{\frac{2}{3}} + 2t^{-\frac{1}{3}} \right) dt = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 2 \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} \right) \Big|_1^8 = \frac{46}{15}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi đổi biến phải lấy vi phân hai vế.

Ví dụ 10. Tính tích phân: $I = \int_2^4 \frac{x dx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}}$

- Học sinh đã giải như sau:

$$\text{Đặt: } x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$$

$$\text{Đổi cận: Với } x=2 \text{ thì } \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Với } x=4 \text{ thì } \cos t = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \arccos \frac{1}{4}$$

$$I = \int_2^4 \frac{x dx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos \frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{2}{\cos^2 t} - 1 + 3 \tan t}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos \frac{1}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t) \tan t}{2 \tan^2 t + 3 \tan t + 1} dt$$

Đến đây học sinh thường rất lúng túng vì cận tích phân lẻ, do đó các em khó tìm ra được đáp số.

- Phân tích sai lầm: Khi gặp tích phân của hàm số có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - 1}$ thông thường ta đặt $x = \frac{1}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{1}{\sin t}$. Nhưng đối với ví dụ 10, nếu làm theo cách này sẽ gặp khó khăn khi đổi cận. Cụ thể khi $x=4$ ta không thể tìm chính xác được t .

- Lời giải đúng:

$$\text{Đặt: } \sqrt{x^2 - 1} = t \Rightarrow x^2 = t^2 + 1 \Rightarrow x dx = t dt$$

$$\text{Đổi cận: Với } x=2 \text{ thì } t = \sqrt{3}$$

$$\text{Với } x=4 \text{ thì } t = \sqrt{15}$$

$$I = \int_2^4 \frac{x dx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{t dt}{2(t^2 + 1) - 1 + 3t}$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{t dt}{2t^2 + 3t + 1} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \left(-\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \ln |2t+1| + \ln |t+1| \right) \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \ln(2\sqrt{15} + 1) + \ln(\sqrt{15} + 1) - \left(-\frac{1}{2} \ln(2\sqrt{3} + 1) + \ln(\sqrt{3} + 1) \right) \\
&= \ln \frac{\sqrt{15} + 1}{\sqrt{3} + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{2\sqrt{15} + 1}{2\sqrt{3} + 1}
\end{aligned}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi gặp tích phân của hàm số có chứa biểu thức $\sqrt{1-x^2}$ nếu cận của tích phân là giá trị lượng giác của góc đặc biệt thì ta mới tính tích phân bằng cách đặt $x = \frac{1}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{1}{\sin t}$ còn nếu không thì phải tìm phương pháp khác.

2.3.6. Sai lầm khi vận dụng phương pháp tích phân từng phần:

Ví dụ 11. Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \frac{1}{x^2} \\ dv = \ln x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{2}{x^3} dx \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left. \frac{1}{x^3} \right|_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx = \left(\frac{1}{8} - 1 \right) - \frac{2}{3} \cdot \left. \frac{1}{x^3} \right|_1^2 \\
&= -\frac{7}{8} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} - 1 \right) = -\frac{7}{24}
\end{aligned}$$

- Phân tích sai lầm: Học sinh nhầm giữa phép lấy vi phân và phép lấy đạo hàm.

- Lời giải đúng:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = -\left. \frac{1}{x} \ln x \right|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - \left. \frac{1}{x} \right|_1^2 \\
&= -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2} (1 - \ln 2)
\end{aligned}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân của hàm số có chứa $\ln x$ thì phải nghĩ ngay đến đặt $u = \ln x$. Vì nếu đặt $dv = \ln x dx$ thì không xác định được v . Đặc biệt không nhầm lẫn giữa tính vi phân và tính đạo hàm. Tuy nhiên, cũng có một số bài tính tích phân hàm số chứa $\ln x$ mà đặt $u = \ln x$ thì tính tích phân ban đầu trở nên rất phức tạp. Cụ thể:

Ví dụ 12. Tính tích phân: $I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3 \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

- Học sinh đã giải như sau:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \left[(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1 \right] d(\sqrt{x^2 + 1}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3} - \sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2 - 2}{3} \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3 \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{x^2 - 2}{3} \sqrt{x^2 + 1} \ln x \Big|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} - \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1}}{3x} dx$$

Cần tính tích phân:

$$I' = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1}}{3x} dx = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2)(x^2 + 1)}{x^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Đặt: } \sqrt{x^2 + 1} = t \Rightarrow \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}} = dt$$

Đổi cận thu được tích phân cơ bản:

$$I' = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{(t^2 - 3)t^2}{t^2 - 1} dt \dots$$

- Nhận xét: Cách giải này trải qua hai bước là lấy tích phân từng phần và sau đó đổi biến số. Như vậy, cách làm này không đẹp về hình thức, quá dài dòng nên đôi khi dẫn đến sự nhầm lẫn trong tính toán. Đặc biệt khi lấy tích phân từng phần $dv = x^2 \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ rất ít học sinh tìm được v .

- Lời giải khác:

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Đổi cận: Với $x = \sqrt{3}$ thì $t = 2$

Với $x = 2\sqrt{2}$ thì $t = 3$

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3 \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} x^2 \ln x \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \int_2^3 (t^2 - 1) \ln \sqrt{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int_2^3 (t^2 - 1) \ln(t^2 - 1) dt$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \frac{1}{2} \ln(t^2 - 1) \\ dv = (t^2 - 1)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{tdt}{t^2 - 1} \\ v = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \ln(t^2 - 1) \Big|_2^3 - \int_2^3 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \frac{tdt}{t^2 - 1} \\ &= 9 \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} \int_2^3 \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= 9 \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} \left(\frac{t^3}{3} - 2t + \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) \Big|_2^3 \\ &= 9 \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{3} + \ln 2 - \ln 3 \right) = -\frac{13}{9} + \frac{26}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

- Như vậy, cần lưu ý: Khi gặp tích phân có chứa $\ln x$, không nhất thiết phải sử dụng luôn phương pháp tích phân từng phần mà chúng ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến trước để hình thức bài giải được đẹp hơn.

- Thông qua hai ví dụ trên, rút ra: Khi sử dụng tích phân từng phần để tính tích phân, ta cần phải tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định dễ dàng.
2. Tích phân $\int_a^b v du$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với tích phân ban đầu.

Các bài tập tương tự:

Tính các nguyên hàm và tích phân sau:

1. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx$
4. $\int_{-2}^0 \frac{3x+1}{(x+1)^3} dx$
5. $\int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$
6. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$7. \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$$

$$9. \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

$$10. \int_2^{2\sqrt[3]{3}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

$$11. \int \frac{xdx}{\sqrt[n]{x+1}}$$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.

2.4.1. Đối với học sinh:

- Năm học 2015- 2016 tôi được phân công giảng dạy lớp 12H và 12I. Ban đầu học sinh gặp nhiều khó khăn trong việc giải những dạng nguyên hàm, tích phân như đã nêu. Bởi vậy, tôi đã đưa đề tài nghiên cứu này vào trải nghiệm thực tế. Tôi đã hướng dẫn học sinh tỉ mỉ cách phân tích một bài toán tích phân từ hàm số dưới dấu tích phân, cận của tích phân để lựa chọn phương pháp phù hợp trên cơ sở tôi đã đưa ra những sai lầm mà học sinh thường mắc phải trong quá trình suy luận, trong các bước tính tích phân này rồi từ đó hướng các em đi đến lời giải đúng.

- Sau khi hướng dẫn học sinh như trên và yêu cầu học sinh giải một số bài tập trong sách giáo khoa Giải tích lớp 12 và một số bài tập trong các đề thi thử THPT Quốc Gia thì thấy các em đã thận trọng trong khi trình bày lời giải và đã giải tốt một lượng lớn bài tập đó.

- Và đây là kết quả bài kiểm tra của hai lớp 12H, 12I trường THPT Thiệu Hóa:

+) Trước khi áp dụng đề tài:

TT	Lớp	Số số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu, kém	
			SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
1	12H	41	0	0	10	24,4	11	26,8	20	48,8
2	12I	46	0	0	12	26,1	13	28,3	21	45,6

+) Sau khi áp dụng đề tài:

TT	Lớp	Số số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu, kém	
			SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
1	12H	41	8	19,5	18	43,9	13	31,7	2	4,9
2	12I	46	10	21,7	21	45,7	12	26,1	3	6,5

2.4.2. Đối với giáo viên:

- Giáo viên hệ thống được một số sai lầm trong các dạng toán nguyên hàm, tích phân từ đó hướng dẫn học sinh học phần nguyên hàm, tích phân một cách hứng thú, phát huy sáng tạo.

- Trên cơ sở này giáo viên tìm ra những phương pháp giảng dạy nguyên hàm, tích phân một cách hiệu quả, thú vị.

3. KẾT KUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận.

Nghiên cứu phân tích một số sai lầm của học sinh khi tính nguyên hàm, tích phân của các hàm số hữu tỉ và vô tỉ có ý nghĩa rất lớn trong quá trình dạy học vì khi áp dụng sáng kiến này sẽ giúp học sinh nhìn thấy được những điểm yếu và những hiểu biết chưa thật thấu đáo của mình về vấn đề này từ đó phát huy ở học sinh tư duy độc lập, năng lực suy nghĩ tích cực chủ động củng cố trau dồi thêm kiến thức, đạt được kết quả cao trong quá trình học tập và kì thi THPT Quốc Gia.

Những biện pháp và việc làm của tôi như đã trình bày ở trên, bước đầu đạt được kết quả chưa thật mỹ mãn đối với tâm ý của bản thân. Tuy nhiên, nếu thực hiện tốt tôi nghĩ nó cũng góp phần đổi mới phương pháp dạy học mà ngành đang quan tâm và chỉ đạo. Mặt khác, với cách trình bày như trên (nếu thành công). Tôi thiết nghĩ, chúng ta có thể áp dụng cho một số phần khác như: Sai lầm khi tính đạo hàm, sai lầm khi giải một số phương trình mũ, logarit

Tôi tin rằng kinh nghiệm của tôi cũng chỉ là một trong những biện pháp nhỏ bé trong vô vàn kinh nghiệm được đúc kết qua sách vở, cũng như của thầy giáo, cô giáo cùng các bạn đồng nghiệp. Vì vậy, bản thân tôi rất mong được sự góp ý, xây dựng của quý thầy giáo, cô giáo, cùng các bạn đồng nghiệp, nhằm giúp tôi từng bước hoàn thiện phương pháp giảng dạy của mình. Từ đó, bản thân tôi có điều kiện cống hiến nhiều hơn nữa cho sự nghiệp giáo dục mà toàn Đảng, toàn dân ta hằng quan tâm.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

3.2. Kiến nghị.

3.2.1. Đối với nhà trường:

Hiện nay nhà trường đã có một số sách tham khảo tuy nhiên chưa có một cuốn sách nào viết về sai lầm của học sinh khi giải toán. Vì vậy nhà trường cần quan tâm hơn nữa về việc trang bị thêm sách tham khảo loại này để học sinh tìm tòi về những sai lầm thường mắc để các em có thể tránh được những sai lầm đó trong khi giải bài tập.

3.2.2. Đối với Sở GD&ĐT:

Những sáng kiến có chất lượng cần được giới thiệu phổ biến đến các trường THPT để cùng nhau trao đổi và áp dụng thực tế.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh hóa, ngày 10 tháng 4 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Tác giả Phạm Thị Hằng
--	--

Tài liệu tham khảo

1. Giải tích 12 nâng cao- Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên)- NXB Giáo dục.
2. Phương pháp giải toán tích phân- Lê Hồng Đức (Chủ biên)- NXB ĐHSP.
3. Giải toán Giải tích 12 tập 2- Lê Hồng Đức (Chủ biên)- NXB Hà Nội.
4. Phương pháp giải toán tích phân và giải tích tổ hợp- Nguyễn Cam- NXB Trẻ.
5. Bài tập trọng tâm theo 19 chủ đề ôn thi đại học môn Toán- Nguyễn Thế Chinh- NXB Giáo dục.