

Bài 21. Hàm số - Mũ - Logarit

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN**Câu 1.** Tìm m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.**Lời giải**

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vậy $-2 < m < 2$ thỏa mãn đề bài.**Câu 2.** Tìm m để hàm số $y = \log_{0,5}(mx^2 - mx + 1)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.**Lời giải**

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 - mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$.Trường hợp 1: $m = 0$.(*) trở thành $1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng) nên $m = 0$ thỏa mãn.Trường hợp 2: $m \neq 0$.

$$(*) \text{ tương đương với } \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vậy $0 < m < 4$ thỏa mãn đề bài.**Câu 3.** Dân số thế giới được tính theo công thức $S = A \cdot e^{nr}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2005 Việt Nam có khoảng 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$ một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì tối thiểu đến năm bao nhiêu dân của Việt Nam có khoảng 93713000 người?**Lời giải**

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = A \cdot e^{nr} \Leftrightarrow e^{nr} = \frac{S}{A} \Leftrightarrow nr = \ln \frac{S}{A} \Leftrightarrow n = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A}$$

$$\text{với } S = 93713700 \text{ người; } A = 80902400 \text{ người; } r = \frac{1,47}{100} = 0,0147 / \text{ năm.}$$

$$n = \frac{1}{0,0147} \ln \frac{93713000}{80902400} \approx 10$$

Suy ra
Vậy tối thiểu đến năm 2015 thì dân số của Việt Nam có khoảng 93713000 người.**Câu 4.** Người ta phân tích nồng độ H^+ của hai loại dung dịch A và B thì biết rằng dung dịch A có nồng độ H^+ lớn hơn nồng độ H^+ của dung dịch B . Hỏi độ pH của dung dịch nào lớn hơn?**Lời giải**

Lời giải

Độ pH của dung dịch A là:

$$pH_A = -\log [H^+]_A = \log ([H^+]_A)^{-1} = \log \frac{1}{[H^+]_A}.$$

Độ pH của dung dịch B là:

$$pH_B = -\log [H^+]_B = \log ([H^+]_B)^{-1} = \log \frac{1}{[H^+]_B}.$$

Xét hàm số $y = \log x$ có cơ số $10 > 1$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác

$$[H^+]_A > [H^+]_B > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{[H^+]_A} < \frac{1}{[H^+]_B}.$$

Vì vậy

$$\log \frac{1}{[H^+]_A} < \log \frac{1}{[H^+]_B}.$$

Vậy độ pH của dung dịch B lớn hơn độ pH của dung dịch A .

Câu 5. Tìm tất cả giá trị m để: Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 > m, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $m < 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 6. Tìm tất cả giá trị m để: Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + \log_3 \sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Lời giải

Hàm số xác định trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2m+1-x > 0 \\ x-m > 0 \end{cases}, \forall x \in (2;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2m+1 \\ x > m \end{cases}, \forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 2m+1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$

Câu 7. Trong vật lí, sự phân rã các chất phóng xạ được cho bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ Trong đó, m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kỳ bán rã.

Hạt nhân Poloni (^{210}Po) là chất phóng xạ α có chu kỳ bán rã 138 ngày. Giả sử lúc đầu có 100 Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến phần nghìn).

Lời giải

Lời giải

Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là:

$m(100) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{100}{138}} \approx 60,515(g).$

Câu 8. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức:

$M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), 0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %)

Đến tháng thứ mấy thì nhóm học sinh đó nhớ được khoảng một nửa danh sách các loài động vật đã xem?

Lời giải

Lời giải

Theo giả thiết, học sinh nhớ được một nửa danh sách các loài vật, tức là

$$M(t) = 50(\%)$$

Ta có:

$$50 = 75 - 20 \ln(t+1) \Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow t+1 = e^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow t \approx 2,49 \text{ (tháng)}.$$

Vậy qua tháng thứ 3 khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh là 50 (%).

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số: $y = (9 - x^2)^{\frac{1}{3}} + \log_2(x - 1)$

Lời giải

Lời giải

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi } \begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Vậy $D = (1; 3)$

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số: $y = 2019^{\sqrt{4-x^2}} + \log_2(2x^2 - 5x + 2)$

Lời giải

Lời giải

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi } \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{1}{2}$$

Hàm số đã cho xác định khi

$$D = \left[-2; \frac{1}{2}\right)$$

Vậy

Câu 11. Trong một phòng thí nghiệm, người ta nuôi một loại vi khuẩn. Lúc đầu có 300 vi khuẩn. Sau một giờ, số vi khuẩn là 705 con. Giả sử số vi khuẩn tăng lên theo công thức tăng trưởng mũ, số vi khuẩn sau x giờ là $f(x) = C \cdot e^{kx}$

Hỏi số vi khuẩn có được sau 5 giờ?

Lời giải

Lời giải

Lúc đầu có 300 vi khuẩn. Sau một giờ, số vi khuẩn là 705 con.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 300 = C \cdot e^{k \cdot 0} = C \\ f(1) = 705 = C \cdot e^{k \cdot 1} = C \cdot e^k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 300 \\ e^k = \frac{705}{300} = 2,35 \end{cases} \quad \text{Vậy } f(x) = 300 \cdot (2,35)^x$$

Số vi khuẩn có được sau 5 giờ là $f(5) = 300 \cdot (2,35)^5 \approx 21501$ con.

Câu 12. Nếu D_0 là chênh lệch nhiệt độ ban đầu giữa một vật M và các vật xung quanh, và nếu các vật xung quanh có nhiệt độ T_s , thì nhiệt độ của vật M tại thời điểm t được mô hình hóa bởi hàm số: $T(t) = T_s + D_0 \cdot e^{-kt}$ (trong đó k là hằng số dương phụ thuộc vào vật M).

Một con gà tây nướng được lấy từ lò nướng khi nhiệt độ của nó đã đạt đến $195^\circ F$ và được đặt trên một bàn trong một căn phòng có nhiệt độ là $65^\circ F$.

Nếu nhiệt độ của gà tây là $150^\circ F$ sau nửa giờ, nhiệt độ của nó sau 60 phút là bao nhiêu?

Lời giải

Lời giải

Ta có $T_s = 65$ và độ chênh lệch nhiệt độ là $D_0 = 195 - 65 = 130$

Sau nửa giờ ($t = 0,5$) thì nhiệt độ của gà là $T = 150$.

Áp dụng công thức (1):
$$150 = 65 + 130 \cdot e^{-k(0,5)} \Leftrightarrow e^{-k} = \left(\frac{17}{26}\right)^2$$

Vậy
$$T(t) = 65 + 130 \cdot \left(\frac{17}{26}\right)^{2t}$$

Suy ra nhiệt độ của gà sau 60 phút ($t = 1$ giờ) là $65 + 130 \cdot \left(\frac{17}{26}\right)^{2 \cdot 1} \approx 121^\circ F$.
----HẾT----