

Bài 1: Rút gọn biểu thức

a. $(x - 3)(x + 5) - (x - 2)(x + 2)$ c. $\left(\frac{1}{4}x - y\right)(x^2 + 4xy + 16y^2) + 4\left(4y^3 - \frac{1}{16}x^3 + 1\right)$
 $(x - 2)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 1)(x + 1)$
b. d. $(x - 2)^2 + (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2)$

Bài 2: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

a. $(x - 1)^2 - 2(x - 3)(x - 1) + (x - 3)^2$ b. $(x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3x^2 - 3x$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử

a. $7x^2 - 7xy - 4x + 4y$ d. $2x - 2y - x^2 + y^2$ g. $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$
b. $x^2 + 6x - y^2 + 9$ e. $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$ h. $x^2 + x - 6$
c. $x^3 - x^2 - 4x^2 + 8x - 4$ f. $x^3 + 10x^2 + 25x - xy^2$ i. $2x^2 + 4x - 30$

Bài 4: Tìm x, y biết

a. $x^3 - 64x = 0$ d. $6x(x - 5) = x - 5$ g. $x^3 - 7x - 6 = 0$
b. $x^3 - 4x^2 = -4x$ e. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ h. $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 18 = 0$
c. $x^2 - 16 - (x - 4) = 0$ f. $(2x + 1)^2 = (3 + x)^2$

Bài 5:

a. Làm tính chia: $(15x^5y^2 + 25x^4y^3 - 30x^3y^2) : 5x^3y^2$; $(x^3 - 2x^2 + 5x - 10) : (x - 2)$
b. Tìm số a để đa thức $x^3 + 3x^2 + 5x + a$ chia hết cho đa thức $x + 3$.
c. Tìm đa thức f(x), biết rằng f(x) chia cho $(x - 3)$ thì dư 2, f(x) chia cho $(x + 4)$ thì dư 9, f(x) chia cho $(x^2 + x - 12)$ thì được thương là $(x^2 + 3)$ và còn dư.

Bài 6*:

a. Cho $x + y = 6$ và $x \cdot y = -4$. Tính giá trị của các biểu thức $C = x^2 + y^2$, $D = x^3 + y^3$,

$$E = x^3 - y^3.$$

b. Chứng minh: $A = x(x - 6) + 10$ luôn dương với mọi x ; $B = x^2 - 2x + 9y^2 - 6y + 3$ luôn dương với mọi x, y .

c. Tìm GTLN và GTNN của các biểu thức

$$A = x^2 - 4x + 1$$

$$B = 4x^4 + 4x + 11$$

$$C = 5 - 8x - x^2$$

$$D = 5x - x^2$$

$$E = (x - 1)(x + 3)(x + 2)(x + 6)$$

$$F = \frac{1}{x^2 + 5x + 14} \quad G = \frac{2x^2 + 4x + 10}{x^2 + 2x + 3}$$

d. Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ biết $x^2 - x + 8 = y^2$

e. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 97$ là số chính phương, tìm số tự nhiên n để $n^2 + 7n + 97$ là số chính phương

f. Chứng minh rằng $n^3 + 5n \vdots 6$.

$$A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

Bài 7: Cho biểu thức

a. Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b. Tính giá trị của A tại $x = -2$

c. Tìm x để $A = 5, A = 0$.

d. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$

$$B = \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{1-x^2}$$

Bài 8: Cho biểu thức

a. Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b. Tính giá trị của B khi $x^2 - x = 0$

c. Tìm x để $B = -3$

d. Với giá trị nào của x thì $B < 0$.

$$C = \frac{5x+1}{x^3-1} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{2}{1-x}$$

Bài 9: Cho biểu thức

a. Rút gọn C

b. Tính giá trị của C khi $|x| = 4$

c. Tìm x để $C > 0$.

d. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $C \in \mathbb{Z}$

$$M = \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{4-x^2} + \frac{1}{2+x} \right) \cdot \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$$

Bài 10: Cho biểu thức

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M tại x thỏa mãn $x^2 - 5x + 6 = 0$

- c) Tìm x để $M = \frac{1}{2}$
 d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$

$$A = \left(\frac{x+2}{x-3} + \frac{6}{x-2} \right) : \frac{5}{x^2 - 5x + 6}$$

Bài 11: Cho biểu thức

- a) Rút gọn A.
 b) Tìm giá trị của A biết $|x+1|=3$
 c) Tìm x để biểu thức A đạt GTNN. Tìm GTNN đó.

Bài 12: Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm M và điểm I thứ tự là trung điểm của cạnh đáy BC và cạnh bên AC. Gọi K là điểm đối xứng với điểm M qua điểm I

- a) Chứng minh $AK \parallel BC$
 b) Chứng minh tứ giác ABMK là hình bình hành
 c) Tìm thêm điều kiện của tam giác cân ABC để tứ giác AMCK là hình vuông
 d) Chứng minh rằng nếu AM cố định, B và C di động trên đường thẳng vuông góc với AM tại M sao cho tam giác ABC cân tại A thì điểm I sẽ di động trên một đường thẳng cố định.

Bài 13: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của P qua M và N.

- a) Tính AP và diện tích tam giác ABC biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$
 b) Chứng minh tứ giác AMPN là hình chữ nhật
 c) Chứng minh tứ giác APCE là hình thoi
 d) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để tứ giác APCE là hình vuông?
 e) Chứng minh AP, BE, CD đồng quy.

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh AC, vẽ điểm D đối xứng với điểm B qua M.

- a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành
 b) Gọi H là trung điểm BC, K là trung điểm AD. Tứ giác AHCK là hình gì? Vì sao?
 c) Chứng minh H, M, K thẳng hàng
 d) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác AHCK là hình vuông.

Bài 15: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ AN và CM cùng vuông góc với BD

- a) Chứng minh $DN = BM$
 b) Chứng minh tứ giác ANCM là hình bình hành
 c) Gọi K là điểm đối xứng với điểm A qua điểm N. Tứ giác DKCB là hình gì? Vì sao?

- d) Tia AM cắt tia KC tại điểm P. Chứng minh rằng các đường thẳng PN, AC, KM đồng quy.

Bài 16: Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

- Chứng minh tứ giác AMCN là hình bình hành. Hỏi tứ giác AMND là hình gì?
- Gọi I là giao điểm của AN và DM, K là giao điểm của BN và CM. Tứ giác MINK là hình gì?
- Chứng minh $IK \parallel CD$
- Hình bình hành ABCD cần thêm điều kiện gì thì tứ giác MINK là hình vuông? Khi đó, tính diện tích của tứ giác MINK, biết $AD = 4\text{cm}$.

Bài 17: Cho hình bình hành ABCD có $BC = 2AB$, $\angle A = 60^\circ$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm BC, AD.

- Chứng minh $AE \perp BF$.
- Tứ giác ECDF là hình gì? Vì sao?
- Tứ giác ABED là hình gì? Vì sao?
- Gọi M là điểm đối xứng của A qua B. Chứng minh tứ giác BMCD là hình chữ nhật.
- Chứng minh M, E, D thẳng hàng.

Bài 18: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, D là trung điểm BC. Kẻ $DE \perp AC, DF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$).

- Chứng minh rằng $EF = AD$
- Lấy điểm G đối xứng với D qua F. Chứng minh tứ giác ADBG là hình thoi
- Gọi K là giao điểm của AG và ED. Chứng minh GC, BK, AD đồng quy
- Cho điểm D di động trên cạnh BC. Tìm vị trí của D để EF có độ dài nhỏ nhất.