Bài 4 VMO-2010

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình$x^2+15y^2=4^n$ có ít nhất n nghiệm tự nhiên $(x,\ y)$.

<u>Lời giải:</u>

-Với $n=1$ hiển nhiên $(x;\ y)=(2;\ 0)$ là nghiệm.

-Giả sử với $n=m\in\mathbb{Z}^+$ thì $(x_k;\ y_k);\ k=\overline{1;\ n}$ là các nghiệm phân biệt của $x^2+15y^2=4^m$.

Thế thì rõ ràng là $(2x_k;\ 2y_k)$ với $k=\overline{1;\ n}$ là n nghiệm tự nhiên phân biệt của $x^2+15y^2=4^{m+1}$.

Xét $x_n=\zeta^n+\overline{\zeta^n}$ và $y_n=\dfrac{\zeta^n-\overline{\zeta^n}}{i\sqrt{15}}$ với $\zeta=\dfrac{1+i\sqrt{15}}{2}$.

Ta có $x_{n+2}=x_{n+1}-4x_n;\ y_{n+2}=y_{n+1}-4y_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ đồng thời $x_0=2;\ x_1=y_1=1$ còn $y_0=0$, thế nên các dãy x_n và y_n là các dãy số nguyên hơn thế vì $x_{n+2}\equiv x_{n+1};\ y_{n+2}\equiv y_{n+1}\bmod 2\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Vậy nên $x_{m+1}\equiv x_1;\ y_{m+1}\equiv y_1\bmod 2\forall\ m\in\mathbb{Z}^+$ tức $x_{m+1};\ y_{m+1}$ đều lẻ.

Sự kiện này dẫn đến $(x_{m+1};\ y_{m+1})\notin\left\{(2x_k;\ 2y_k):k=\overline{1;\ m}\right\}$.

Lại thấy: $x_{m+1}+i\sqrt{15}y_{m+1}=2.\zeta^m\Leftrightarrow x_{m+1}^2+15y_{m+1}^2=4.4^m=4^{m+1}$

Vậy phương trình $x^2+15y^2=4^{m+1}$ có n cặp nghiệm tự nhiên phân biệt là các phần tử của tập $\left\{(2x_k;\ 2y_k):k=\overline{1;\ m}\right\}\cup\left\{(x_{m+1};\ y_{m+1})\right\}$.

Sa mạc hạn ..

Anh: con lạc đà lầm lụi cõng Niềm Riêng.