Sở Giáo Dục & Đào Tạo TP. HỒ CHÍ MINH

Trường THPT *Chuyên*
Lê Hồng Phong

TECHCOMBANK

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN XV – NĂM 2009

Môn thi : **Toán** - Khối : **11**
Ngày thi : **04/04/2009**

Thời gian làm bài : **180 phút**

Ghi chú : Thí sinh làm mỗi câu trên 1 hay nhiều tờ giấy riêng và ghi rõ câu số ……. ở trang 1 của mỗi tờ giấy làm bài. Đề này có …01… trang

Câu 1 (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Câu 2: (4 điểm)

Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau .

Câu 3 (4 điểm)

Xét dãy số thực (x_n), $n \in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 2009 \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

Câu 4: (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số f(x;y) thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \quad \forall x,y,z \in R \\ f(x^2+y-f(0;x);0)=x+f^2(y;0)-f(0;y^2-f(0;y)) \quad \forall x,y \in R \end{cases}$$

Câu 5: (4 điểm)

Giả sử hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa : $(f(m)+f(n)) \mid (m+n)^{2009}$ $\forall m, n \in N^*$.
Chứng minh f(1), f(2), f(3), …. là cấp số cộng có công sai dương.

Hết.

Sở Giáo Dục & Đào Tạo TP. HỒ CHÍ MINH

Trường THPT *Chuyên*
Lê Hồng Phong

TECHCOMBANK

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN XV – NĂM 2009

Môn thi : **Toán** - Khối : **11**
Ngày thi : **04/04/2009**

Thời gian làm bài : **180 phút**

Ghi chú : Thí sinh làm mỗi câu trên 1 hay nhiều tờ giấy riêng và ghi rõ câu số .... ở trang 1 của mỗi tờ giấy làm bài. Đề này có ...01... trang

Câu 1 (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Câu 2: (4 điểm)

Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau .

Câu 3 (4 điểm)

Xét dãy số thực (x_n), $n \in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 2009 \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

Câu 4: (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số f(x;y) thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \quad \forall x,y,z \in R \\ f(x^2+y-f(0;x);0)=x+f^2(y;0)-f(0;y^2-f(0;y)) \quad \forall x,y \in R \end{cases}$$

Câu 5: (4 điểm)

Giả sử hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa : $(f(m)+f(n)) \mid (m+n)^{2009}$ $\quad \forall m, n \in N^*$.
Chứng minh f(1), f(2), f(3), ... là cấp số cộng có công sai dương.

Hết.