

1. MỞ ĐẦU:

1.1. Lý do chọn đề tài:

- Thực hiện chủ trương, đường lối của Đảng, chính sách pháp luật của Nhà nước. Căn cứ vào phương hướng, nhiệm vụ và kế hoạch chuyên môn của trường THPT Thạch Thành 2 năm học 2015-2016.

- Năm học 2015-2016, tôi được phân công trực tiếp giảng dạy các lớp 10. Đa số học sinh nhận thức còn chậm, giáo viên cần có phương pháp cụ thể cho từng dạng toán để học sinh nắm được bài tốt hơn.

- Trong chương trình toán THPT, mà cụ thể là phân môn Đại số 10, các em học sinh đã được tiếp cận với phương trình chứa ẩn dưới dấu căn và được tiếp cận với một vài cách giải thông thường đối với những bài toán cơ bản đơn giản. Tuy nhiên trong thực tế các bài toán giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn rất phong phú và đa dạng và đặc biệt là trong các đề thi THPT quốc gia mấy năm gần đây, các em sẽ gặp một lớp các bài toán về phương trình vô tỉ (câu này là câu lấy điểm 8 đôi khi là điểm 9 trong cấu trúc đề thi) mà chỉ có số ít các em biết phương pháp giải nhưng trình bày còn lúng túng chưa được gọn gàng, sáng sủa thậm chí còn mắc một số sai lầm không đáng có trong khi trình bày. Tại sao lại như vậy?

- Lý do chính ở đây là: Trong chương trình SGK Đại số lớp 10 hiện hành được trình bày ở phần đầu chương III (giữa học kỳ I) rất là ít và hạn hẹp chỉ có một tiết lý thuyết sách giáo khoa, giới thiệu sơ lược 1 ví dụ và đưa ra cách giải khá rườm rà khó hiểu và dễ mắc sai lầm, phần bài tập đưa ra sau bài học cũng rất hạn chế. Mặt khác do số tiết phân phối chương trình cho phần này quá ít nên trong quá trình giảng dạy, các giáo viên không thể đưa ra được nhiều bài tập cho nhiều dạng để hình thành kỹ năng giải cho học sinh. Nhưng trong thực tế, để biến đổi và giải chính xác phương trình chứa ẩn dưới dấu căn đòi hỏi học sinh phải nắm vững nhiều kiến thức, phải có tư duy ở mức độ cao và phải có năng lực biến đổi toán học nhanh nhẹn thuần thục.

1.2. Mục đích nghiên cứu:

- Từ lý do chọn đề tài, từ cơ sở thực tiễn giảng dạy khối lớp 10 ở trường THPT, cùng với kinh nghiệm trong thời gian giảng dạy. Tôi đã tổng hợp, khai thác và hệ thống hoá lại các kiến thức thành: **“Một số phương pháp giải phương trình vô tỉ trong cấu trúc đề thi THPT quốc gia”**.

- Qua nội dung của đề tài này tôi mong muốn sẽ cung cấp cho học sinh một số phương pháp tổng quát và một số kỹ năng cơ bản và phát hiện được đâu là điều kiện cần và đủ. Học sinh thông hiểu và trình bày bài toán đúng trình tự, đúng logic, không mắc sai lầm khi biến đổi. Hy vọng đề tài nhỏ này ra đời sẽ giúp các bạn đồng nghiệp cùng các em học sinh có một cái nhìn toàn diện cũng như phương pháp giải một số các bài toán về giải phương trình vô tỉ.

1.3. Đối tượng nghiên cứu:

Đề tài này nhằm giúp học sinh vận dụng và tìm ra các phương pháp giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

Phương pháp:

- Nghiên cứu lý luận chung.
- Khảo sát điều tra từ thực tế dạy và học .
- Tổng hợp so sánh , đúc rút kinh nghiệm.

Cách thực hiện:

- Trao đổi với đồng nghiệp, tham khảo ý kiến giáo viên cùng bộ môn
- Liên hệ thực tế trong nhà trường, áp dụng đúc rút kinh nghiệm qua quá trình giảng dạy.
- Thông qua việc giảng dạy trực tiếp ở các lớp khối 10 trong năm học từ 2008 đến 2016.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM:

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm:

- Nhiệm vụ trung tâm trong trường học THPT là hoạt động dạy của thầy và hoạt động học của trò, xuất phát từ mục tiêu đào tạo. Giúp học sinh củng cố những kiến thức phổ thông đặc biệt là bộ môn toán học rất cần thiết không thể thiếu trong đời sống của con người. Môn Toán là một môn học tự nhiên quan trọng và khó với kiến thức rộng, đa phần các em ngại học môn này.

- Muốn học tốt môn toán các em phải nắm vững những tri thức khoa học ở môn toán một cách có hệ thống, biết vận dụng lý thuyết linh hoạt vào từng dạng bài tập. Điều đó thể hiện ở việc học đi đôi với hành, đòi hỏi học sinh phải có tư duy logic và cách biến đổi. Giáo viên cần định hướng cho học sinh học và nghiên cứu môn toán học một cách có hệ thống trong chương trình học phổ thông, vận dụng lý thuyết vào làm bài tập, phân dạng các bài tập rồi tổng hợp các cách giải.

- Do vậy, tôi mạnh dạn đưa ra sáng kiến kinh nghiệm này với mục đích giúp cho học sinh THPT vận dụng và tìm ra phương pháp giải khi gặp các bài toán giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

Trong sách giáo khoa Đại số 10 chỉ nêu phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ và trình bày phương pháp giải bằng cách biến đổi hệ quả, trước khi giải chỉ đặt điều kiện $f(x) \geq 0$. Nhưng chúng ta nên để ý rằng đây chỉ là điều kiện đủ để thực hiện được phép biến đổi cho nên trong quá trình giải học sinh dễ mắc sai lầm khi lấy nghiệm và loại bỏ nghiệm ngoại lai vì nhầm tưởng điều kiện $f(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ của phương trình.

Tuy nhiên khi gặp bài toán giải phương trình vô tỉ, có nhiều bài toán đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng kết hợp nhiều kiến thức kỹ năng phân tích biến đổi để đưa phương trình từ dạng phức tạp về dạng đơn giản

Trong giới hạn của SKKN tôi chỉ hướng dẫn học sinh hai dạng phương trình thường gặp và một số bài toán vận dụng biến đổi cơ bản và một số dạng bài toán thường gặp trong kì thi THPT quốc gia.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm:

Học sinh trường THPT Thạch Thành 2 nói riêng và một số học sinh của các trường miền núi nói chung, đa số là học sinh ở vùng nông thôn, khu vực đặc biệt khó khăn, còn thiếu thốn về mọi mặt nên kiến thức THCS còn non yếu, tiếp thu bài còn chậm, chưa tự hệ thống được kiến thức. Khi gặp các bài toán về phương trình vô tỉ chưa phân loại và định hình được cách giải, lúng túng khi đặt điều kiện và biến đổi, trong khi đó phương trình loại này có rất nhiều dạng. Nhưng bên cạnh đó chương trình Đại số 10 không nêu cách giải tổng quát cho từng dạng, thời lượng dành cho phần này là quá ít. Trong khi đó mấy năm lại gần đây trong cấu trúc đề thi THPT quốc gia thì câu giải phương trình là câu lấy điểm 8 đôi khi là điểm 9 đòi hỏi mức độ tư duy cao của học sinh.

Qua việc khảo sát kiểm tra định kỳ và việc học tập, làm bài tập hàng ngày nhận thấy học sinh thường bỏ qua hoặc không giải được hoặc trình bày cách giải đặt điều kiện và lấy nghiệm sai ở phần này.

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề:

Một số dạng và phương pháp giải:

Qua nghiên cứu trao đổi và đúc rút kinh nghiệm từ thực tế và ý kiến của đồng nghiệp tôi mạnh dạn đưa ra hướng giải quyết các vấn đề trên của học sinh với một số dạng và phương pháp giải cụ thể từng dạng:

* **Dạng 1:** phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad (1)$

Điều kiện $g(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ của phương trình (1), sau khi giải phương trình $f(x) = g^2(x)$ chỉ cần $g(x) \geq 0$ để kết luận nghiệm mà không cần phải thay vào phương trình ban đầu để thử để lấy nghiệm.

* **Dạng 2:** phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad (2)$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Điều kiện $f(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ của phương trình (2). Chú ý ở đây không nhất thiết phải đặt điều kiện đồng thời cả $f(x)$ và $g(x)$ không âm vì $f(x)=g(x)$

Hai dạng trên là hai dạng cơ bản mà hầu hết các em học sinh có thể nắm vững được sau khi được giáo viên hướng dẫn.

* **Dạng 3: Sử dụng lượng liên hợp để đưa phương trình về phương trình tích**

a) Biểu thức liên hợp xuất hiện ngay trong phương trình

Lưu ý: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a \pm b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} \quad (a, b > 0, a \neq b)$; $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \frac{a \pm b}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x-4} + \sqrt{2x-2}$

Phân tích: $10x-1-(9x+4)=3x-5-(2x-2)$ nên ta có lời giải sau

Lời giải: Điều kiện: $x \geq \frac{5}{3}$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow (\sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4}) + (\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x-4}} + \frac{x-3}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy pt có nghiệm là $x=3$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $9(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2})=x+3$ (đề thi thử THPT quốc gia thạch thành 2-2015)

Lời giải: Đk: $x \geq \frac{2}{3}$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 9\left(\frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}\right)=x+3 \Leftrightarrow 9=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}, \text{ bình phương 2 vế}$$

ta có nghiệm $x=6$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x+4}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}+2\sqrt{2-x}$

Phân tích: Quan sát phương trình ta thấy $2x+4-4(2-x)=6x-4$. Đây là cơ sở tốt để ta nhóm.

Lời giải: Đk $-2 \leq x \leq 2$,

$$\text{pt} \Leftrightarrow \sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ và } \sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2+4} (*) . \text{ Bình phương hai vế của } (*)$$

ta có nghiệm $x=2$

Vậy pt có 2 nghiệm là $x=3/2$ và $x=2$

Ví dụ 4: Giải phương trình sau: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

Phân tích: Khi ghép các biểu thức trong căn ta thấy:

$[(3x-2)-(x+1)]=2x-3$ và phân tích biểu thức còn lại $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$ xuất hiện nhân tử chung.

Lời giải: Đk $x \geq \frac{2}{3}$. Pt

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=(2x-3)(x+1) \Leftrightarrow (2x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}-(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

hoặc $\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=(x+1)$ (vô nghiệm vì VT<1, VP>1).

b) Tìm được một nghiệm, thêm, bớt để làm xuất hiện biểu thức liên hợp

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0(1) \text{ (ĐHKB_2010)}$$

Phân tích: ta nhằm nghiệm hoặc dùng chức năng CALC của máy tính bỏ túi ta tìm được nghiệm $x=5$ hoặc ta tìm một số $x \left(-\frac{1}{3} \leq x \leq 6\right)$ sao cho $3x+1$ và $6-x$ là một số chính phương thỏa mãn phương trình trên. Để thấy $x=5$ thỏa mãn (1). Vì vậy ta đưa pt về dạng $(x-5)f(x)=0$, ta cần làm xuất hiện nhân tử chung $x-5$ từ vế trái của phương trình bằng phương pháp liên hợp.

Lời giải: Đk: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$.

Pt (1)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-5}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x-1) = 0 (*) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=5$ và pt (*) vô nghiệm với đk.

Vậy $x=5$ là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$ (Hsg k12 HN-2012).

Phân tích: Tương tự ta thấy $x=1$ là nghiệm, ngoài cách làm như trên ta còn có thể làm nhanh như sau: Thay $x=1$ vào $\sqrt{5x-1}$ ta được 2, vào $\sqrt[3]{9-x}$ ta được 2 vì thế ta tách như sau.

Lời giải: Đk $x \geq \frac{1}{5}$. Biến đổi phương trình

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-1} - 2) + (\sqrt[3]{9-x} - 2) = 2x^2 + 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{1-x}{\sqrt[3]{(9-x)^2} + 2\sqrt[3]{9-x} + 4} = (x-1)(2x+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2} + 2\sqrt[3]{9-x} + 4} + (2x+5) (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì VT < 5/2 mà VP ≥ 5 .

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

c) Tìm được nhiều hơn một nghiệm:

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - x + 3} - \sqrt{21x - 7} + x^2 - x - 4 = 0$

Phân tích: Dùng máy tính ta thấy phương trình có 2 nghiệm $x=1$ và $x=2$. Suy ra phương trình sẽ có nhân tử chung là $x^2 - 3x + 2$. Ta thấy ngay không thể nhân và chia lượng liên hợp với hai căn đó ngay. Vậy thì làm thế nào để tách nhóm tạo ra $x^2 - 3x + 2$? Ta thực hiện nhóm giả định sau

$$\sqrt{2x^2 - x + 3} - (mx + n); (px + q) - \sqrt{21x - 17} \text{ sau đó thay } x=1, x=2$$

$$\text{vào hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{2x^2 - x + 3} - (mx + n) = 0 \\ (px + q) - \sqrt{21x - 17} = 0 \end{cases}$$

Ta được $(m;n)=(1;1); (p;q)=(3;-1)$.

Từ đó ta có lời giải sau:

Lời giải: Đk : $x \geq \frac{17}{21}$

$$Pt \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 - x - 3} - x - 1) + (3x - 1 - \sqrt{21x - 17}) + x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 - x - 3} + x + 1} + \frac{9}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1; x = 2.$$

Vậy pt có hai nghiệm là : $x=1$ và $x=2$.

Ví dụ 8 : Giải phương trình : $2x^2 - 4x - 9 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} = 0$.

Phân tích : Nhằm nghiệm thấy phương trình có hai nghiệm $x=-1$ và $x=2$ nên ta làm xuất hiện biểu thức $x^2 - x - 2$ làm nhân tử chung.

Lời giải : Đk $x \geq -\frac{6}{5}$.

$$Pt \Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) = (x+2 - \sqrt{5x+6}) + (x+3 - \sqrt{7x+11})$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) = \frac{x^2 - x - 2}{x+2 + \sqrt{5x+6}} + \frac{x^2 - x - 2}{x+3 + \sqrt{7x+11}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \frac{1}{x+2 + \sqrt{5x+6}} + \frac{1}{x+3 + \sqrt{7x+11}} = 2(*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1; x = 2 \text{ và phương trình } (*) \text{ vô nghiệm do } VT < 2 \text{ với } \forall x \geq -\frac{6}{5}$$

Vậy phương trình trên có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

***Dạng 4: Dùng phương pháp đặt ẩn phụ**

1. Sử dụng ẩn phụ để đưa về phương trình bậc hai

a. Dạng Phương trình:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = \sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2} \quad (a_1a_2 \neq 0) \text{ và } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Đối với phương trình dạng này ta đặt: $t = \sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2}$. Chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai: $At^2 + Bt + C = 0$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x^2 + 13} = 29$ (ĐH Cảnh sát nhân dân – 2000)

Giải:

Phương trình đã cho tương đương với: $(x^2 + 13) + \sqrt{x^2 + 13} - 42 = 0$

Đặt: $t = \sqrt{x^2 + 13} > 0$, ta được phương trình:

$$t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t = 6$$

$$\text{Khi đó: } x^2 + 13 = 36 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{23}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^2 - 2x + 12 = 6\sqrt{2x^2 - 4x + 4}$

Giải: Đk: $2x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt:

$$t = \sqrt{2x^2 - 4x + 4} > 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 12 = \frac{1}{2}t^2 + 10.$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{1}{2}t^2 + 10 = 6t \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 10 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$$

$$\text{Với } t = 10 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = -6; x = 8$$

Vậy phương trình trên có các nghiệm là : $x=8$; $x=2$ và $x=-6$

Đôi khi có những bài toán không phải là dạng trên, nhưng vẫn có thể đưa về phương trình bậc hai được. Điều này phụ thuộc vào sự linh hoạt trong giải toán của từng học sinh. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - 2\sqrt{2x^2 - 5x - 6} = 1$ (Đề dự bị KB-2013)

Giải: Đk: $2x^2 - 5x - 6 \geq 0$

Đặt: $t = \sqrt{2x^2 - 5x - 6} \geq 0$ khi đó: $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = \sqrt{t^2 + 8}$

Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2 + 8} = 1 + 2t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ 3t^2 + 4t - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 5x - 6} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ cả hai nghiệm}$$

này đều thỏa mãn Đk

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x=-1$; $x=7/2$

Hoàn toàn tương tự các bạn có thể giải các bài tập sau đây:

1. $\sqrt{x^2 + 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3$ (ĐH Thương mại – 1998)

2. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} = 4$ (ĐH Khối D – 2005)

3. $15x - 2x^2 - 5 = \sqrt{2x^2 - 15x + 11}$

b. Dạng Phương trình:

$$aP(x) + bQ(x) + c\sqrt{P(x).Q(x)} = 0 \quad (abc \neq 0)$$

Cách giải:

- Xét $Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = 0$

- Xét $Q(x) \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $Q(x)$ và đặt:

$$t = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}, \text{ chuyển phương trình đã cho về dạng: } at^2 + ct + b = 0$$

Lưu ý: Từ cách đặt

$$t = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \Rightarrow f(x, t) = 0 \quad (x \text{ là ẩn}) \text{ từ đó suy ra điều kiện của } t$$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1} \quad (1)$$

Giải:

$$\text{ĐK: } x \geq 1$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \quad (2)$$

Vì $x = 1$ không phải là nghiệm của (2) nên chia hai vế của (2) cho $x - 1$ ta được:

$$2 \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} + 3 = 7\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} \quad (3)$$

Đặt:

$$t = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} \geq 0 \Rightarrow x^2 + (1 - t)x + 1 + t^2 = 0 \text{ có: } \Delta_x = t^4 - 6t^2 - 3.$$

Nên có điều kiện của t là:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \Delta_x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \quad (4)$$

Khi đó (3) trở thành:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện của } t \text{ ta có: } t = 3$$

Với $t = 3$ ta có: $x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$ thỏa mãn điều kiện của x .

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 4 \pm \sqrt{6}$

Chú ý:

- Hoàn toàn bình đẳng, ta có thể thực hiện phép chia cho $P(x)$ hoặc $\sqrt{P(x) \cdot Q(x)}$
- Ta có thể giải bài toán trên bằng cách đặt: $\sqrt{P(x)} = t\sqrt{Q(x)}$ hoặc ngược lại

Phân tích:

- Chúng ta có thể không cần tìm điều kiện của t như ở (4) nhưng khi đó các phép biến đổi chỉ là phép biến đổi hệ quả và nhất thiết phải thay các giá trị của t vừa tìm được để tìm x . Còn nếu tìm điều kiện của t như bài trên ta không cần phải thay giá trị: $t = 1/2$ ngược trở lại.

- Bằng cách phân tích như ở trên chúng ta có thể xây dựng nên các phương trình này một cách đơn giản:

$$2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = \sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \text{ ta được phương trình:}$$

$x^2 - 3x + 1 = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. Chú ý các đẳng thức sau để có thể sáng tạo ra các bài toán dạng này:

$$\bullet \quad x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

- $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$
- $4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$ (1)

Giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ 5x^2 + 14x + 9 = x^2 - x - 20 + 25(x+1) + 10\sqrt{(x^2 - x - 20)(x+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 & (2) \\ 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} & (3) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow 3(x+4) + 2(x^2 - 4x - 5) = 5\sqrt{(x+4)(x^2 - 4x - 5)}$ (4)

Để thấy $x = -4$ không phải là nghiệm của (4)

Đặt $\sqrt{x+4} = t\sqrt{x^2 - 4x - 5}$ ($t > 0$), Khi đó (3) trở thành:

$$(x^2 - 4x - 5)(3t^2 - 5t + 2) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có:

$$x + 4 = x^2 - 4x - 5 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$$

Kết hợp với (2) và (3) ta có: $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$

Với $t = 2/3$ ta có: $x + 4 = \frac{4}{9}(x^2 - 4x - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{7}{4} \end{cases}$

Kết hợp với (2) và (3) ta có: $x = 8$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$ và $x = 8$

Chú ý: Nếu phương trình:

$$aP(x) + bQ(x) + c\sqrt{P(x)Q(x)} = 0 \quad (abc \neq 0)$$

thỏa mãn: $P(x)Q(x) = k$ thì bài toán trở nên đơn giản đi rất nhiều.

Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt[8]{\frac{1+x}{2-x}} + \sqrt[8]{\frac{2-x}{1+x}} = 2$

Giải: Đk: $-1 \leq x \leq 2$ (*):

Đặt: $\sqrt[8]{\frac{1+x}{2-x}} = t > 0$ khi đó: $\sqrt[8]{\frac{2-x}{1+x}} = \frac{1}{t}$. Phương trình trở thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t=1 \Rightarrow 1+x=2-x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

thỏa mãn (*).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1/2$

Bài tập áp dụng:

1. Giải các phương trình:

a. $2(x^2+1)=5\sqrt[3]{x^3+1}$

b. $4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$

c. $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

c. Dạng Phương trình:

$$a[P(x)+Q(x)]+b[\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}]\pm 2a\sqrt{P(x)Q(x)}+c=0 \quad (a^2+b^2>0)$$

Cách giải: Đặt $\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}=t \Rightarrow t^2=P(x)+Q(x)\pm 2\sqrt{P(x)Q(x)}$

Chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc 2 ẩn t

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$ (1)

Giải: Đk : $x \geq 2$ (*)

Đặt: $t=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}>0 \Rightarrow t^2=2x-2\sqrt{x^2-4}$

Khi đó (1) trở thành: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$

Hay: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=\frac{17}{4}$ (thỏa mãn (*))

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{17}{4}$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

Giải:

ĐK: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt: $t=x+\sqrt{1-x^2}; |t| \leq \sqrt{2}$ (theo Bunhiacopxki) $\Rightarrow t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow t^3=x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}+3t\frac{t^2-1}{2}$$

Phương trình đã cho trở thành: $t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}+1)(t+\sqrt{2}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{2} \\ t=1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Với $t=\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ (2x^2-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Với $t=1-\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^4-x^2+3-2\sqrt{2}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{8\sqrt{2}-11})}}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể giải các bài tập sau đây:

$$1. \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$$

$$2. x + \frac{x}{\sqrt{x^2-11}} = \frac{35}{12}$$

$$3. 4\sqrt{1+x} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$$

$$4. 2 + 2\sqrt{x-x^2} = 3(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})$$

$$5. \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + \sqrt{2x^2+5x+3} - 16$$

d. Dạng phương trình:

$$(a_1x + b_1)^n = c\sqrt[n]{(a_2x + b_2)} + dx + e$$

(x là ẩn số, $a_1, b_1, a_2, b_2, c, d, e$ là các hằng số và $ca_1a_2 \neq 0$, $n = 2, 3$)

Thông thường để có các phương trình dạng này người ta thường đi từ các hệ phương trình đối xứng hai ẩn hoặc hệ phương trình đối xứng gần hai ẩn (hệ có nghiệm $x = y$). Và phương pháp giải là đặt ẩn phụ để đưa về giải hệ phương trình.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $4x^2 + 5 - 13x + \sqrt{3x+1} = 0$

Phân tích : Nếu chúng ta nhóm như những phương trình trước:

$$\left(2x - \frac{13}{4}\right)^2 = \sqrt{3x+1} - \frac{33}{4}$$

Đặt $2y - \frac{13}{4} = \sqrt{3x+1}$ thì chúng ta không thu được hệ phương trình mà

chúng ta có thể giải được. Vì thế chúng ta đặt: $\alpha y + \beta = \sqrt{3x+1}$, chọn α, β sao cho hệ chúng ta có thể giải được.

Ta có hệ :

$$\begin{cases} (\alpha y + \beta)^2 = 3x + 1 \\ 4x^2 - 13x + 5 = -\alpha y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y - 3x + \beta^2 - 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 13x + \alpha y + 5 + \beta = 0 & (2) \end{cases} (*)$$

Để giải hệ trên thì ta lấy (1) nhân với k cộng với (2): và mong muốn của chúng ta là có nghiệm $x=y$

Nên ta phải có:

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{2\alpha\beta - 3}{\alpha - 13} = \frac{\beta^2 - 1}{5 + \beta}$$

ta chọn được ngay $\alpha = -2; \beta = 3$

Ta có lời giải như sau

Lời giải: Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$

Đặt

$$\sqrt{3x+1} = -(2y-3), (y \leq \frac{3}{2})$$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 2y+x+1 \\ (2y-3)^2 = 3x+1 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(2x+2y-5)=0$$

Với $x=y \Rightarrow x = \frac{15-\sqrt{97}}{8}$

Với $2x+2y-5=0 \Rightarrow x = \frac{11+\sqrt{73}}{8}$

Kết luận: tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{ \frac{15-\sqrt{97}}{8}; \frac{11+\sqrt{73}}{8} \right\}$$

-Khi đã làm quen, chúng ta có thể tìm ngay $\alpha; \beta$ bằng cách viết lại phương trình.

Ta viết lại phương trình như sau: $(2x-3)^2 = -\sqrt{3x+1} + x + 4$

Khi đó đặt $\sqrt{3x+1} = -2y+3$, nếu đặt $2y-3 = \sqrt{3x+1}$ thì chúng ta không thu được hệ như mong muốn, ta thấy dấu của α cùng dấu với dấu trước căn.

Một cách tổng quát ta có cách đặt ẩn phụ sau đây:

- Đặt $\sqrt[n]{a'x+b'} = ay+b$ nếu $pa' > 0$
- Đặt $\sqrt[n]{a'x+b'} = -(ay+b)$ nếu $pa' < 0$

Một số phương trình được xây dựng từ hệ.

Giải các phương trình sau

1) $4x^2 - 13x + 5 + \sqrt{3x+1} = 0$

2) $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$

3) $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$

e. Phương trình dạng:

$$A(\sqrt{a.x+b} + \sqrt{b'-a.x}) + B\sqrt{(a.x+b)(b'-a.x)} = C$$

Trong đó A,B,C là các hệ số có thể có chứa tham số m khi đó thường có các câu hỏi sau :

(1) Giải phương trình khi $m=k$ (với k là hằng số)

Phương pháp : Đặt $t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{b'-ax}$, với đk $t_0 \leq t \leq \sqrt{2(b+b')}$

$$t_0 = t \left(\frac{-b}{a} \right) \text{ hoặc } t_0 = t \left(\frac{b'}{a} \right) \text{ và } t \leq \sqrt{2(b+b')}$$

(do áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki)

Ví dụ 1:

a. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} = \sqrt{2}$ (1)

Lời giải:

a). Đk $1 \leq x \leq 3$ Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ đk $\sqrt{2} \leq t \leq 2$ (2)

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(3-x)} = \frac{t^2 - 2}{2}$$

Khi đó phương trình (1) trở thành $t^2 + t - 2 - \sqrt{2} = 0$ (3)

Giải phương trình (3) rồi so sánh với đk (2) ta có $t = \sqrt{2}$

trở về ẩn x ta có $\sqrt{(x-1)(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ thỏa mãn đk

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=1$ và $x=3$.

f. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Từ những phương trình tích

$$(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}-x+2)=0 \quad (\sqrt{2x+3}-x)(\sqrt{2x+3}-x+2)=0$$

Khai triển và rút gọn ta sẽ được những phương trình vô tỉ tương đối khó, độ khó của phương trình dạng này phụ thuộc vào phương trình tích mà ta xuất phát.

Từ đó chúng ta mới đi tìm cách giải phương trình dạng này. Phương pháp giải được thể hiện qua các ví dụ sau.

Bài 1. Giải phương trình :

$$x^2 + (3 - \sqrt{x^2 + 2})x = 1 + 2\sqrt{x^2 + 2}$$

Giải:

$t = \sqrt{x^2 + 2}$, ta có :

$$t^2 - (2+x)t - 3 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=x-1 \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình :

$$(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1$$

Giải:

Đặt :

$$t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}, \quad t \geq \sqrt{2}$$

Khi đó phương trình trở thành :

$$(x+1)t = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - (x+1)t = 0$$

Bây giờ ta thêm bớt, để được phương trình bậc 2 theo t có Δ chẵn:

$$x^2 - 2x + 3 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=x-1 \end{cases}$$

Từ một phương trình đơn giản :

$$(\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} - 2 + \sqrt{1+x}) = 0$$

Khai triển ra ta sẽ được phương trình sau

$$\textbf{Bài 3.} \text{ Giải phương trình sau : } 4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$$

Giải:

Nhận xét : đặt $t = \sqrt{1-x}$,

pttt:

$$4\sqrt{1+x} = 3x + 2t + t\sqrt{1+x} \quad (1)$$

Ta rút $x = 1 - t^2$ thay vào thì được pt:
 $3t^2 - (2 + \sqrt{1+x})t + 4(\sqrt{1+x} - 1) = 0$

Nhưng

$$\Delta = (2 + \sqrt{1+x})^2 - 48(\sqrt{1+x} - 1)$$

Không có dạng bình phương.

Muốn đạt được mục đích trên thì ta phải tách $3x$ theo

$$(\sqrt{1-x})^2, (\sqrt{1+x})^2$$

Cụ thể như sau :

$$3x = -(1-x) + 2(1+x)$$

thay vào pt (1) ta được:

Bài 4. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$

Giải :

Bình phương 2 vế phương trình:

$$4(2x+4) + 16\sqrt{2(4-x^2)} + 16(2-x) = 9x^2 + 16$$

Ta đặt :

$$t = \sqrt{2(4-x^2)} \geq 0$$

Ta được: $9x^2 - 16t - 32 + 8x = 0$

Ta phải tách

$$9x^2 = \alpha 2(4-x^2) + (9+2\alpha)x^2 - 8\alpha$$

làm sao cho Δ_t có dạng chình phương

h. Đặt ẩn phụ đưa về hệ cơ bản

Đặt

$$u = \alpha(x), v = \beta(x)$$

và tìm mối quan hệ giữa

$$\alpha(x) \text{ và } \beta(x)$$

từ đó tìm được hệ theo u,v

Bài 1. Giải phương trình:

$$x\sqrt[3]{25-x^3} \left(x + \sqrt[3]{25-x^3} \right) = 30$$

Đặt

$$y = \sqrt[3]{35-x^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 35$$

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình sau

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

giải hệ này ta tìm được

$$(x; y) = (2; 3) = (3; 2)$$

Tức là nghiệm của phương trình là

$$x \in \{2; 3\}$$

Bài 2. Giải phương trình sau:

$$x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$$

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt

$a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{5 + \sqrt{x-1}}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) thì ta đưa về hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a^2 + b = 5 \\ b^2 - a = 5 \end{cases} \rightarrow (a+b)(a-b+1) = 0 \Rightarrow a-b+1=0 \Rightarrow a=b-1$$

Vậy

$$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 5 - x \Rightarrow x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$$

Dạng 5: Phương pháp đánh giá:

1. Dùng hằng đẳng thức :

Từ những đánh giá bình phương : $A^2 + B^2 \geq 0$, ta xây dựng phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0$

Từ phương trình

$$(\sqrt{5x-1} - 2x)^2 + (\sqrt{9-5x} - 2)^2 + \sqrt{x-1} = 0$$

ta khai triển ra có phương trình :

$$4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x})$$

2. Dùng bất đẳng thức:

Một số phương trình được tạo ra từ dấu bằng của bất đẳng thức:

$$\begin{cases} A \geq m \\ B \leq m \end{cases}$$

nếu dấu bằng ở (1) và (2) cùng đạt được tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $A = B$

Ta có : $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2$ Dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$ và

$$\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq 2$$

dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$. Vậy ta có phương trình:

$$\sqrt{1-2008x} + \sqrt{1+2008x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{1+x}$$

Đôi khi một số phương trình được tạo ra từ ý tưởng :

$$\begin{cases} A \geq f(x) \\ B \leq f(x) \end{cases}$$

khi đó :

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A=f(x) \\ B=f(x) \end{cases}$$

* Nếu ta đoán trước được nghiệm thì việc dùng bất đẳng thức dễ dàng hơn, nhưng có nhiều bài nghiệm là vô tỉ việc đoán nghiệm không được, ta vẫn dùng bất đẳng thức để đánh giá được

Bài 1. Giải phương trình ():

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$$

Giải: Đk $x \geq 0$

Ta có :

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \right)^2 \leq \left[(2\sqrt{2})^2 + \sqrt{(x+1)^2} \right] \left[\frac{1}{x+1} + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)^2 \right] = x+9$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}.$$

Vậy nghiệm của pt trên là: $x=1/7$

Bài 2. Giải phương trình :

$$9\sqrt{x^2+x^4} + 13\sqrt{x^2-x^4} = 16$$

Giải: Đk: $-1 \leq x \leq 1$

Biến đổi pt ta có :

$$x^2(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2})^2 = 256$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\left(\sqrt{13} \cdot \sqrt{1-x^2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+x^2} \right)^2 \leq (13+27)(13-13x^2+3+3x^2) = 40(16-10x^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$10x^2(16-10x^2) \leq \left(\frac{16}{2} \right)^2 = 64$$

Dấu bằng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16-10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Vậy phương trình trên có nghiệm là $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} = \sqrt{\frac{x}{6}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+1=4x$.

Giải: Đk $x \geq 0$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có :

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \left(\frac{x^2+1}{24} + \frac{x^2+1}{24} + \frac{x}{6}\right) = \frac{2x^2+4x+2}{8}$$

$$= \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}} \leq \frac{x+1}{2}.$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} = \sqrt{\frac{x}{6}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+1=4x \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn Đk).}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$2) \sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Bài tập

1. Giải phương trình

$$a. \sqrt{3x-2} = 1-2x$$

$$b. \sqrt{5-2x} = \sqrt{x-1}$$

$$c. \sqrt{3x^2-9x+1} + x - 2 = 0$$

HD: Biến đổi theo dạng 1 và dạng 2

$$2. \text{Giải phương trình: } x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$$

$$\text{HD: Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 5} \quad (t \geq 0)$$

$$\text{ĐS: } x = -1 \text{ và } x = 4$$

$$3. \text{Giải phương trình: } \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{5x-1}$$

HD: Đặt đk sau đó bình phương hai vế

$$\text{ĐS: } x = 2$$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường:

Đề tài của tôi đã được kiểm nghiệm trong các năm học giảng dạy lớp 10, được học sinh đồng tình và đạt được kết quả, nâng cao khả năng giải phương trình vô tỉ. Các em hứng thú học tập hơn, ở những lớp có hướng dẫn kỹ các em học sinh với mức học trung bình cũng trở lên đã có kỹ năng giải các bài tập. Học sinh biết áp dụng tăng rõ rệt. Cụ thể ở các lớp khối 10 sau khi áp dụng sáng kiến này vào giảng dạy thì số HS hiểu và có kỹ năng giải được cơ bản các dạng toán nói trên, kết quả qua các bài kiểm tra thử như sau: năm học 2015-2016, lớp thực hiện dạy áp dụng theo sáng kiến kinh nghiệm là lớp 10C2, lớp học tương đương không áp dụng sáng kiến kinh nghiệm là lớp 10C6, sau khi làm bài kiểm tra thu được kết quả như sau :

Năm học	Lớp	Tổng số	Điểm 8 trở lên		Điểm từ 5 đến 8		Điểm dưới 5	
			Số lượng	Tỷ lệ	Số lượng	Tỷ lệ	Số lượng	Tỷ lệ
2015-2016	10C6	42	2	4 %	15	36%	25	60%
	10C2	44	20	45%	20	45%	4	10%

Như vậy, tôi thấy các phương pháp cơ bản có hiệu quả cao. Theo tôi khi dạy phần toán giải phương trình vô tỉ giáo viên cần chỉ rõ các dạng toán và cách giải tương ứng để học sinh nắm được bài tốt hơn.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ:

3.1. Kết luận:

Trên đây là những giải pháp mà tôi đúc rút được trong suốt quá trình giảng dạy tại trường THPT Thạch Thành 2. Phương trình vô tỉ là một nội dung quan trọng trong chương trình môn Toán lớp 10 nói riêng và bậc THPT nói chung. Nhưng đối với học sinh lại là một mảng tương đối khó, đây cũng là phần nhiều thầy cô giáo quan tâm. Qua thực tế giảng dạy, tôi thấy rằng các phương pháp giải nêu trên có thể áp dụng tốt vào việc dạy và học trong nhà trường hiện nay.

Mặc dù cố gắng tìm tòi, nghiên cứu song chắc chắn còn có nhiều thiếu sót và hạn chế. Tôi rất mong được sự quan tâm của tất cả các đồng nghiệp bổ sung và góp ý cho tôi. Tôi xin chân thành cảm ơn.

3.2. Kiến nghị:

- Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa tài liệu, sách tham khảo đổi mới và phòng thư viện để nghiên cứu, học tập nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ .

- Nhà trường cần tổ chức các buổi trao đổi phương pháp giảng dạy. Có tủ sách lưu lại các tài liệu chuyên đề bồi dưỡng ôn tập của giáo viên hàng năm để làm cơ sở nghiên cứu phát triển chuyên đề.

**XÁC NHẬN CỦA
THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Thanh Hóa, ngày 21 tháng 5 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.

Trương Thị Tuyền

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Sách giáo khoa Đại số 10 (NXB Giáo dục);
- Sách hướng dẫn giảng dạy;
- Tài liệu tập huấn sách giáo khoa (NXB Giáo dục);
- Các bài giảng luyện thi môn toán (NXB Giáo dục - Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất);
- Toán nâng cao Đại số 10 (Phan Huy Khải);
- Báo Toán học tuổi trẻ (NXB Giáo dục);
- Các đề thi đại học các năm trước;
- Các đề thi THPT quốc gia các năm trước và đề thi thử THPT quốc gia của các trường THPT, đh;
- Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán đại số 10 (Lê Hồng Đức-nhóm cựu môn; NXB giáo dục Việt Nam; 1994);
- Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực (Nguyễn Đức Tấn-Phan Ngọc Thảo; NXB giáo dục Việt Nam; 1996).