

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN 8 NĂM HỌC 2013-2014

(Thời gian: 150 phút)

Bài 1. (3 điểm)

Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{1}{a^2 + 7a + 12} + \frac{1}{a^2 + 9a + 20}$$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x - 2008)^4 + (x - 2010)^4 = 2$

b) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$

Bài 3. (3 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$$

Bài 4. (3 điểm) Giải bất phương trình:

$$(a + 1)x + \frac{ax - 1}{a} > \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

Bài 5. (7 điểm)

Cho tam giác ABC (cân tại A) vẽ đường cao AH, đường cao BK

- Tìm các cặp tam giác vuông đồng dạng? Giải thích tại sao?
- Cho $AH = 10\text{cm}$, $BK = 12\text{cm}$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC
- Gọi I là giao điểm của AH và BK, hãy tìm điều kiện của tam giác ABC để tam giác BCI là tam giác đều?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Điều kiện: $a \neq 0; a \neq -1; a \neq -2; a \neq -3; a \neq -4; a \neq -5$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{1}{a^2+7a+12} + \frac{1}{a^2+9a+20} \\ &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+4} - \frac{1}{a+5} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+5} = \frac{a+4}{a(a+5)} \end{aligned}$$

Bài 2.

a) $(x-2008)^4 + (x-2010)^4 = 2$ (I)

Đặt $y = x - 2009$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(y^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x - 2009 = 0 \Leftrightarrow x = 2009$$

b) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$ (II)

+Nếu $x < 1$ ta có (II) $\Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (ktm)

+Nếu $1 \leq x < 2$ ta có: (II) $\Leftrightarrow 0.x + 4 = 4$, Phương trình nghiệm đúng với $1 \leq x < 2$

+Nếu $2 \leq x < 3$ ta có: (II) $\Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

+Nếu $3 \leq x$ ta có: (II) $\Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình (II) là $x = 5$ hoặc $1 \leq x \leq 2$

Bài 3.

$$B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

Ta có:

$$3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Mà

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$

Bài 4. $(a+1)x + \frac{ax-1}{a} > \frac{1}{a} \quad (a \neq 0) \quad (III)$

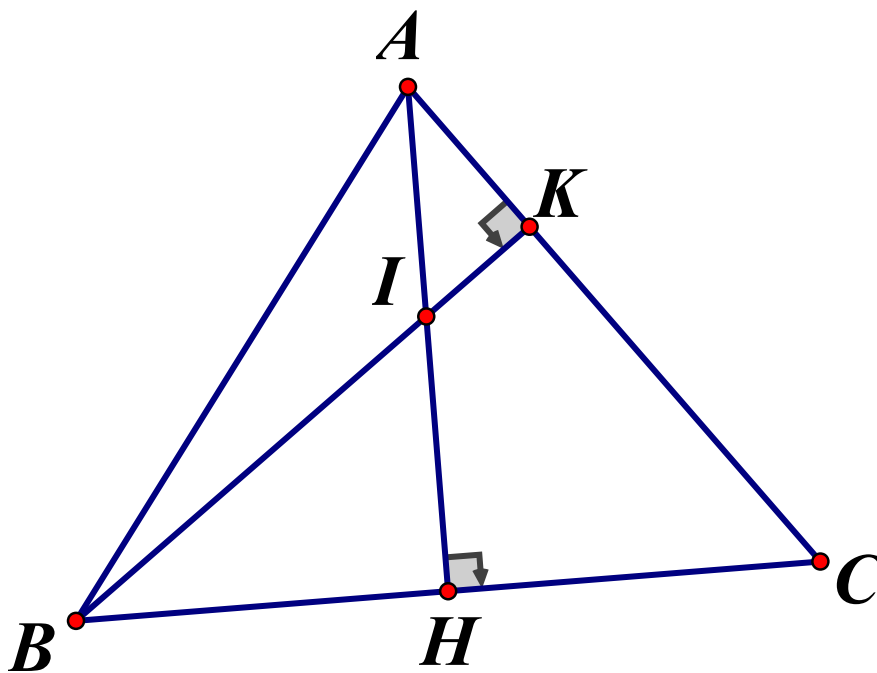
Với $a \neq 0$ ta có $(III) \Leftrightarrow (a+2)x > \frac{2}{a} (*)$

$(*) \Leftrightarrow x > \frac{2}{a(a+2)}$ nếu $a > -2$ và $a \neq 0$

$(*) \Leftrightarrow 0x > \frac{2}{-2}$ đúng với mọi x nếu $a = -2$

$(*) \Leftrightarrow x < \frac{2}{a(a+2)}$ nếu $a < -2$

Bài 5.



a) Các cặp tam giác vuông đồng dạng là :

$\triangle ABH \sim \triangle ACH$ (vì có $\sphericalangle BAH = \sphericalangle CAH$)

$\triangle ABH \sim \triangle BCK$ (vì có $\sphericalangle ABH = \sphericalangle BCK$)

$\triangle ACH \sim \triangle BCK$ (vì cùng đồng dạng với $\triangle ABH$)

$$\text{b) Từ } \Delta ABH \sim \Delta BCK \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{BK} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2BH} = \frac{5}{6} \Rightarrow BH = \frac{3}{5} AB \quad (\text{H là chân đường cao, trung tuyến})$$

Ta lại có: $AB^2 - BH^2 = AH^2$ (Định lý Pytago)

$$\Rightarrow AB^2 - \left(\frac{3}{5}AB\right)^2 = 10^2 \Rightarrow AB = 12,5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow AC = AB = 12,5 \text{ cm} \quad ; BC = 15 \text{ cm}$$

c) Chỉ ra được ΔBIC cân tại I

ΔBIC cân tại I trở thành tam giác đều khi $\angle BIC = 60^\circ$

$$\text{Mà } \angle BIC = \angle HAB \Rightarrow \angle HAB = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = 120^\circ.$$

Vậy để ΔBIC là tam giác đều thì ΔABC phải cân tại A và $\angle A = 120^\circ$