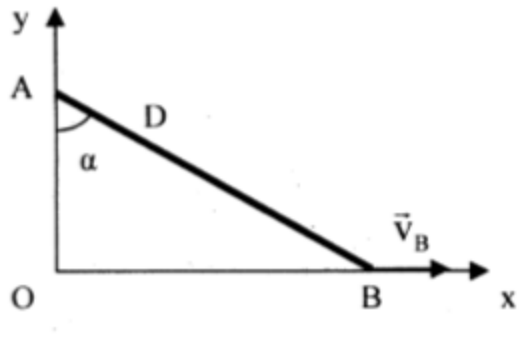
2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

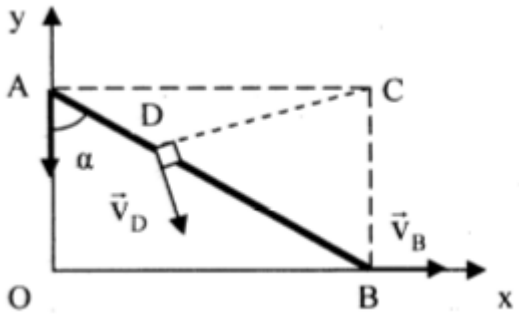
Chuyên đề 4: CHUYỂN ĐỘNG TRÒN BIẾN ĐỔI ĐỀU

32. Thanh AB dài $l = 2m$ chuyển động sao cho hai đầu A, B của nó luôn tựa trên hai giá vuông góc Ox và Oy (hình vẽ). Hãy xác định vận tốc của các điểm A và D của thanh tại thời điểm mà thanh hợp với giá góc $\widehat{OAB} = \alpha = 60^0$. Cho biết $AD = 0,5m$, vận tốc đầu B của thanh tại thời điểm đó là $v_B = 2m/s$ và có chiều như hình vẽ.



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2004)

Bài giải



- Khi đầu B trượt theo hướng Ox thì đầu A trượt theo hướng Oy và thanh quay xung quanh tâm tức thời C với $CA \perp \vec{v}_A; CB \perp \vec{v}_B$.
- Theo đề, $\vec{v}_B$ có hướng Ox nên thanh quay quanh C theo chiều ngược với chiều quay kim đồng hồ.

  Gọi $\omega_{AB} = \omega$ là vận tốc tức thời của thanh tại thời điểm ta xét. Ta có: $\omega = \dfrac{v_B}{CB}$ với $v_B = 2m/s, CB = l\cos\alpha = 2.\cos 60^0 = 1m \Rightarrow \omega = \dfrac{2}{1} = 2\ rad/s$.
- Vận tốc của điểm A: $v_A = \omega.CA$; với $CA = l\sin\alpha = 2.\sin 60^0 = \sqrt{3}m \Rightarrow v_A = 2\sqrt{3} = 3,46\ m/s$.
- Vận tốc của điểm D: $v_D = \omega.CD$; với

$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD.AC.\cos 30^0} \Rightarrow CD = \sqrt{0,5^2 + \sqrt{3}^2 - 2.0,5.\sqrt{3}\cos 30^0} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32m$$

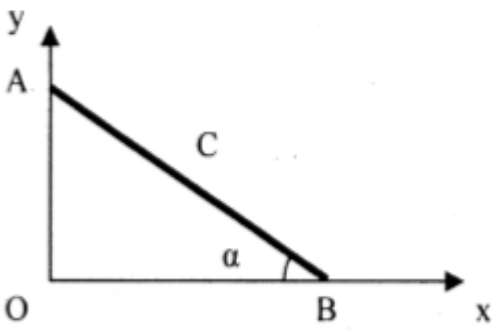
$$\Rightarrow v_D = 2.1,32 = 2,64\ m/s.$$

- Góc hợp bởi $\vec{v}_D$ và Oy là β, với

$$\cos\beta = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2.AC.CD} = \frac{\sqrt{3}^2 + 1,32^2 - 0,5^2}{2.\sqrt{3}.1,32} = 0,983 \Rightarrow \beta = 3^0 18'.$$

Vậy: vận tốc của các điểm A và D của thanh tại thời điểm mà thanh hợp với giá Oy góc 60^0 là $v_A = 3,46\ m/s$ và $v_D = 2,64\ m/s$.

33. Thanh AB dài l, có thể trượt dọc theo hai trục Ox và Oy vuông góc với nhau. Chọn đầu B của thanh trượt đều với vận tốc $\vec{v}_0$. Tìm độ lớn và hướng gia tốc của trung điểm C của thanh tại thời điểm thanh hợp với trục Ox một góc α.

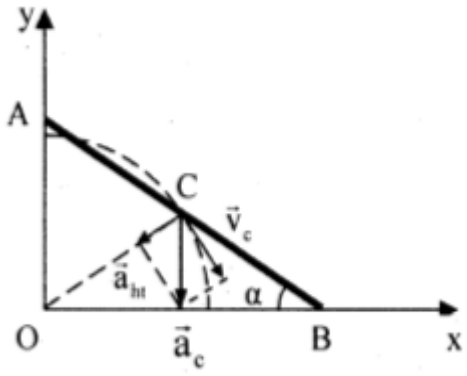


Bài giải

- Vì C là trung điểm cạnh huyền AB của tam giác vuông OAB nên $OC = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$. Do đó, khi đầu B của thanh chuyển động đều với vận tốc v thì trung điểm C của thanh chuyển động theo đường tròn tâm O, bán kính $R = OC = \frac{1}{2}$.
- Vì thanh cứng nên thành phần vận tốc tức thời của mọi điểm trên thanh dọc theo thanh tại mọi thời điểm là như nhau nên:

$$v_0 \cos\alpha = v_c \cos\beta = v_c \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = v_c \sin 2\alpha; \beta = (\vec{v}_c, \vec{AB})$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{v_0}{2\sin\alpha} \quad (1)$$



- Thành phần gia tốc hướng tâm của điểm C là:

$$a_{ht} = \frac{v_c^2}{R} = \frac{v_c^2}{\frac{1}{2}} = \frac{v_0^2}{2l\sin^2\alpha} \quad (2).$$

- Mặt khác: $v_{cx} = v_c \cos(\alpha - \beta) = v_c \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_c \sin\alpha \quad (3)$.
- Thay (1) vào (3) ta được $v_{cx} = \frac{v_0 \sin\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{v_0}{2} = const \Rightarrow a_{cx} = 0$.
- Vì: $\vec{a}_c = \vec{a}_{cx} + \vec{a}_{cy}$ mà a_{cx} nên $\vec{a}_c = \vec{a}_{cy}$.

  Suy ra: $\vec{a}_c$ có hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn bằng:

$$a_c = a_{cy} = \frac{a_{ht}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{a_{ht}}{\sin\alpha} = \frac{v^2}{2l\sin^3\alpha}.$$

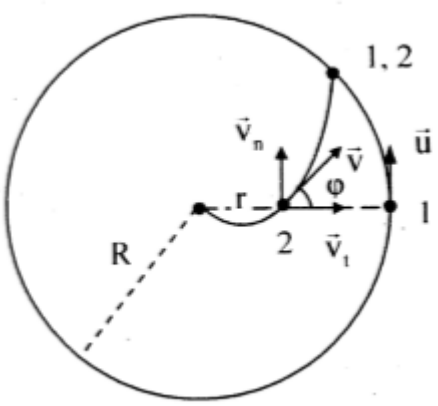
Vậy: Tại thời điểm thanh hợp với trục Ox một góc α thì $\vec{a}_c$ hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn $a_c = \frac{v^2}{2l\sin^3\alpha}$.

34. Một học sinh chạy trên đường tròn bán kính $R = 30m$ với tốc độ không đổi $u = 3{,}14 m/s$. Học sinh thứ hai xuất phát từ tâm đường tròn, đuổi theo học sinh thứ nhất, với tốc độ không đổi $v = 2u$. Trong suốt thời

gian đuổi bắt, vị trí của 2 học sinh luôn nằm trên một bán kính của đường tròn. Tìm thời gian đuổi bắt. Lấy $\pi = 3,14$.

Bài giải

Gọi $\omega = \frac{u}{R}$ là tốc độ góc của học sinh 1 (học sinh chạy trên đường tròn); r là khoảng cách từ học sinh 2 tới tâm O tại thời điểm t; φ là góc giữa phương vận tốc v của học sinh 2 và bán kính.



- Vì thành phần vận tốc $\vec{v}_n$ của học sinh 2 trên phương vuông góc bán kính luôn bằng ωr (vị trí 1 và 2 luôn nằm trên cùng một bán kính nên cùng tốc độ góc), do đó: $v = 2u = 2\omega R; \sin\varphi = \frac{v_n}{v} = \frac{\omega r}{2\omega R} = \frac{r}{2R}$ (1).
- Trong quá trình đuổi bắt góc φ thay đổi từ giá trị đầu 0 đến φ_1, khi $r = R$ với $\varphi_t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
- Trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ Δt, góc φ biến đổi một lượng rất nhỏ $\Delta\varphi$, học sinh 2 đi ra xa tâm đường tròn một đoạn Δr.

  $r = 2R\sin\varphi \Rightarrow \Delta r = 2R\Delta(\sin\varphi)$

  Từ (1): $\Leftrightarrow \Delta r = 2R\left[\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi\right] = 2R.2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$
- Vì $\Delta\varphi \ll \varphi$ nên $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$ và $\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \approx \cos\varphi$, do đó: $\Delta r = 2R.2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.\cos\varphi = 2R\cos\varphi.\Delta\varphi$ (2).
- Ta có: $v_t = v\cos\varphi = 2\omega R\cos\varphi$ mà $v_t = \frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta r}{v_t} = \frac{2R\cos\varphi\Delta\varphi}{2\omega R\cos\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \Rightarrow \Delta t \sim \Delta\varphi$.

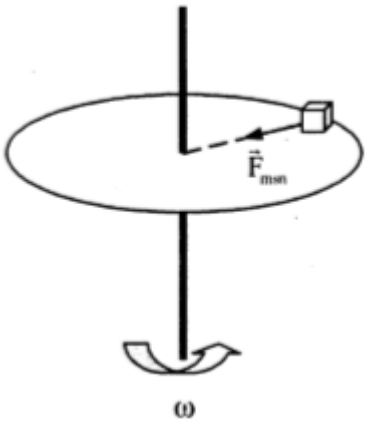
  Và $t = \Sigma\Delta t = \frac{\Sigma\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\varphi_t}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{u}{R}} = \frac{3,14.30}{6.3,14} = 5s$.

Vậy: Thời gian đuổi bắt là $t = 5s$.

35. Ở mép đĩa nằm ngang bán kính R có đặt một vật nhỏ. Đĩa quay quanh trục thẳng đứng qua tâm đĩa với tốc độ góc phụ thuộc vào thời gian theo quy luật $\omega = \gamma t$ (γ không đổi). Hệ số ma sát trượt giữa vật nhỏ và

đĩa là μ. Sau thời gian bao lâu, kể từ lúc $t=0$ vật văng ra khỏi đĩa? Tìm điều kiện của hệ số ma sát trượt để bài toán có nghiệm?

Bài giải



- Tại thời điểm t, ta có:

  + Gia tốc pháp tuyến của vật: $a_n = R\omega^2 = R\gamma^2 t^2$.

  + Gia tốc tiếp tuyến của vật: $a_t = R\gamma$.

  + Gia tốc toàn phần của vật: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\gamma^4 t^4 + R^2\gamma^2}$.

- Lực làm vật chuyển động tròn là lực ma sát nghỉ nên: $F_{msn} = ma = m\sqrt{R^2\gamma^4 t^4 + R^2\gamma^2}$.

- Vật bắt đầu văng ra khỏi đĩa khi:

$$F_{msn} = \mu N = \mu mg \Leftrightarrow m\sqrt{R^2\gamma^4 t^4 + R^2\gamma^2} = \mu mg \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(\frac{\mu^2 g^2}{R^2\gamma^2} - 1\right)}}.$$

- Để bài toán có nghiệm thì: $t > 0 \Leftrightarrow \frac{\mu^2 g^2}{R^2\gamma^2} - 1 > 0 \Rightarrow \mu > \frac{R\gamma}{g}$.

Vậy: Sau thời gian $t = \sqrt{\frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(\frac{\mu^2 g^2}{R^2\gamma^2} - 1\right)}}$ vật sẽ văng ra khỏi đĩa, với $\mu > \frac{R\gamma}{g}$.