

Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

| Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - 4y \leq 6 & (1) \\ x + y > 2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên? $(3; 1), (1; -2), (5; -3)$.

Giải

- Thay $x=3, y=1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:

2. $3 - 4 \cdot 1 \leq 6$ là mệnh đề đúng; $3 + 1 > 2$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(3; 1)$ là nghiệm chung của (1) và (2) nên $(3; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x=1, y=-2$ vào bất phương trình (1) của hệ, ta có:

$2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \leq 6$ là mệnh đề sai.

Vậy $(1; -2)$ không là nghiệm của (1) nên $(1; -2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x=5, y=-3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$5 + (-3) > 2$ là mệnh đề sai.

Vậy $(5; -3)$ không là nghiệm của (2) nên $(5; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

II. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

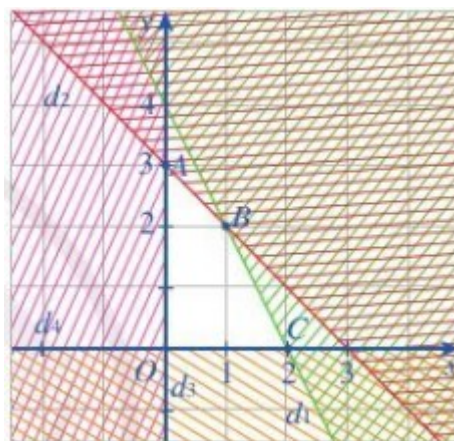
- Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải



Vẽ các đường thẳng: $d_1: 2x + y = 4; d_2: x + y = 3; d_3: x = 0$ là trục tung; $d_4: y = 0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tức giác $OABC$) với $O(0;0), A(0;3), B(1;2), C(2;0)$

III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Bài toán 1. Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.



Sảnh “Trống đồng” ở trụ sở của VTV tại Hà Nội

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 ; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 - 17h00 . Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 - 17h00 . Gọi x,y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 - 17h00 . Tìm x và y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

Giải

Gọi x,y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 - 17h00 . Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \geq 10, 0 \leq y \leq 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

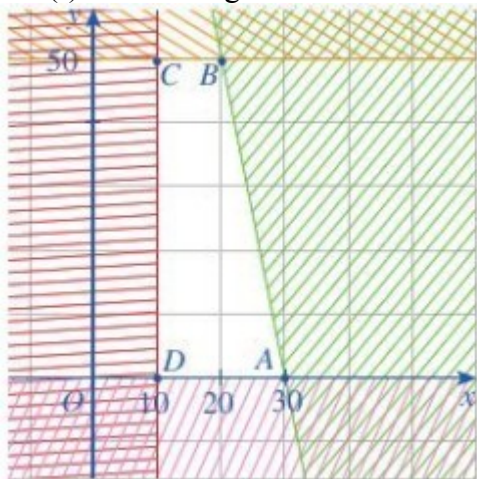
Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \leq 900$ hay $5x + y \leq 150$.

$$\begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad (I)$$

Ta có hệ bất phương trình:

Bài toán đưa về tìm x,y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất. Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30;0), B(20;50), C(10;50), D(10;0)$



Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20, y = 50$ ứng với tọa độ đỉnh B .

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 - 17h00 lần lượt là 20 và 50 lần.

Bài toán 2. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140kg chất A và 9kg chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20kg chất A và $0,6\text{kg}$ chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10kg chất A và $1,5\text{kg}$ chất B . Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

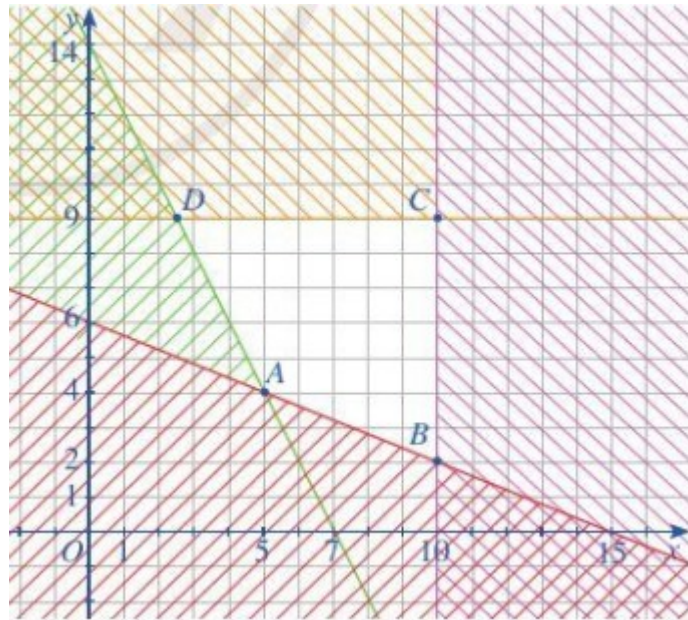
Khi đó, ta chiết xuất được $20x + 10y(\text{kg})$ chất A và $0,6x + 1,5y(\text{kg})$ chất B .

Theo giả thiết, x và y phải thỏa mãn các điều kiện:

$$0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9$$

$$20x + 10y \geq 140 \quad \text{hay} \quad 2x + y \geq 14;$$

$$0,6x + 1,5y \geq 9 \quad \text{hay} \quad 2x + 5y \geq 30.$$



Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$.

Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \quad (\text{II})$$

sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5; 4), B(10; 2), C(10; 9), D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$.

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x + 3y$ tại cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x = 5, y = 4$ ứng với tọa độ đỉnh A .

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

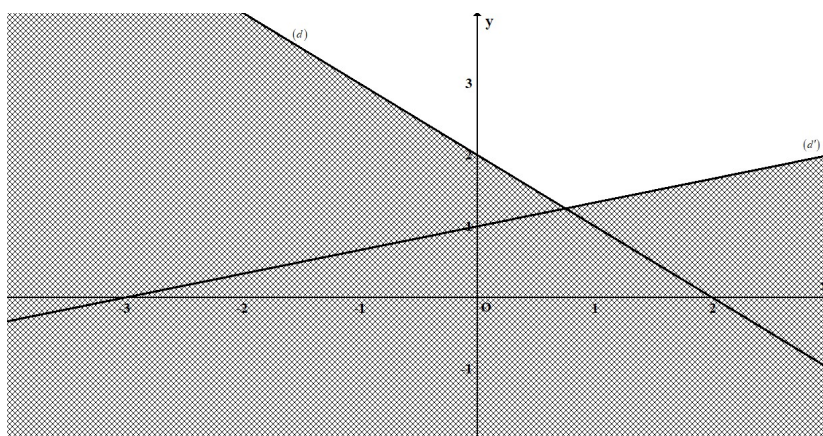
Câu 1. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y > 0 \\ -2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$ và $d': x - 3y + 3 = 0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ và $x - 3y + 3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ cả hai đường thẳng d và d' .

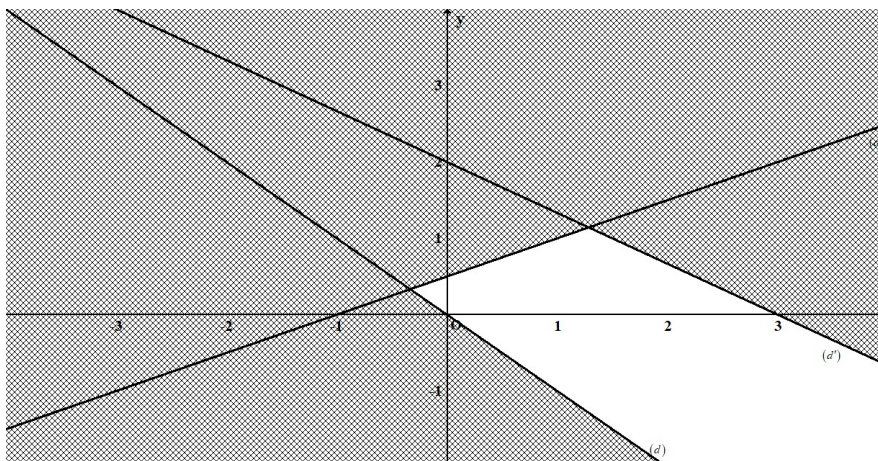


b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$, $d': -2x - 3y + 6 = 0$ và $d'': x - 2y + 1 = 0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $-2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$, ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x + y > 0$.

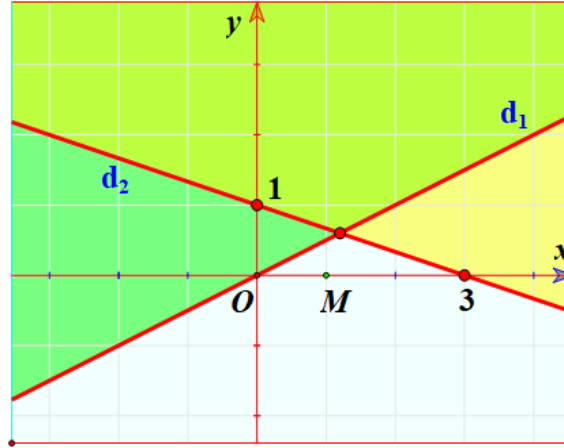
Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kẻ cả đường thẳng d'' .



Câu 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < 3 \end{cases}$$
.

Lời giải

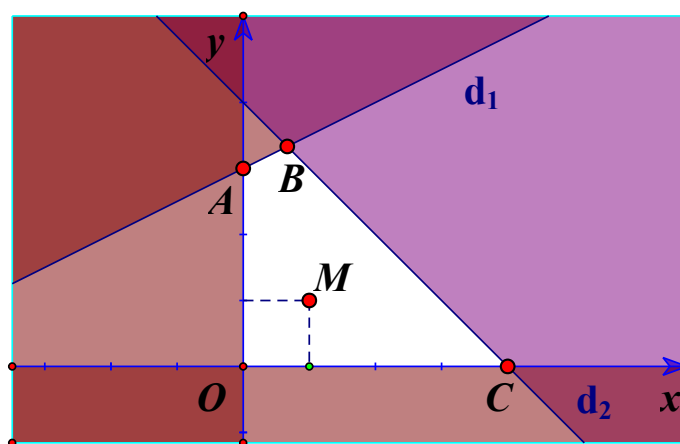
- Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y = 0$; $d_2: x + 3y = 3$.
- Điểm $M(1;0)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm (miền chứa điểm M), không tính các bờ $d_1; d_2$ (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ đã cho.



Câu 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
.

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1: -x + 2y = 6$; $d_2: x + y = 4$; trục $Oy: x = 0$; trục $Ox: y = 0$.
- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; Ox; Oy$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tứ giác $OABC$ kể cả bốn cạnh OA, AB, BC, CO trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

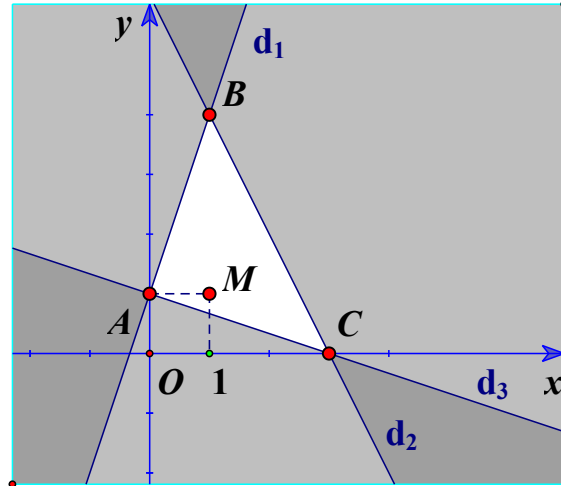


Câu 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y > 3 \end{cases}$$
.

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1: 3x - y = -1$; $d_2: 2x + y = 6$; $d_3: x + 3y = 3$

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; d_3$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC không tính cạnh AC trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



$$\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$

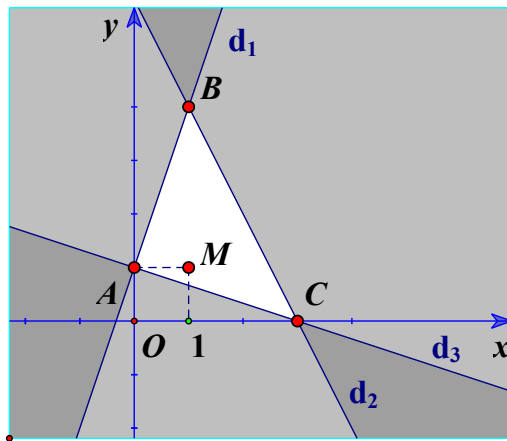
Câu 5. Cho cặp $(x; y)$ là nghiệm của hệ $(*)$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x; y) = 2x - 3y + 1$.

Lời giải

* Trước hết ta biểu diễn miền nghiệm của hệ $(*)$:

+ Vẽ các đường thẳng $d_1: 3x - y = -1$; $d_2: 2x + y = 6$; $d_3: x + 3y = 3$

+ Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; d_3$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC , tính cả ba cạnh AB, BC, CA trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



* Tìm tọa độ các điểm A, B, C :

+ $A = d_1 \cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $A(0;1)$.

+ $B = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy $B(1;4)$.

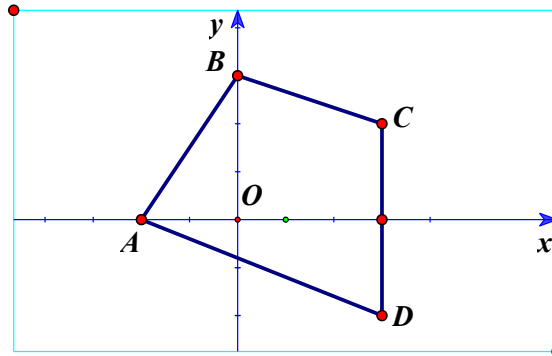
+ $C = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $C(3;0)$.

* Tính giá trị của $f(x; y) = 2x - 3y + 1$ tại tất cả các đỉnh của tam giác ABC :

$(x; y)$	$A(0;1)$	$B(1;4)$	$C(3;0)$
$f(x; y) = 2x - 3y + 1$	-2	-9	7

Suy ra $\min f(x; y) = f(1; 4) = -9$ và $\max f(x; y) = f(3; 0) = 7$.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-2; 0)$; $B(0; 3)$; $C(3; 2)$ và $D(3; -2)$ (tham khảo hình vẽ). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh AB, BC, CD, DA .



Lời giải

* Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0; 0)$ và lần lượt có các bờ là các đường AB, BC, CD và DA .

- Phương trình đường thẳng AB : $-3x + 2y = 6$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ AB (tính cả bờ AB) và chứa điểm O là $-3x + 2y \leq 6$.

- Phương trình đường thẳng BC : $x + 3y = 9$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ BC (tính cả bờ BC) và chứa điểm O là $x + 3y \leq 9$.

- Phương trình đường thẳng CD : $x = 3$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ CD (tính cả bờ CD) và chứa điểm O là $x \leq 3$.

- Phương trình đường thẳng DA : $2x + 5y = -4$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ DA (tính cả bờ DA) và chứa điểm O là $2x + 5y \geq -4$.

Như vậy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ x + 3y \leq 9 \\ x \leq 3 \\ 2x + 5y \geq -4 \end{cases} \quad (*)$$

* Điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh của nó khi và chỉ khi $(m; m+1)$ là một

$$\begin{cases} m \geq -4 \\ -3m + 2(m+1) \leq 6 \\ m + 3(m+1) \leq 9 \\ m \leq 3 \\ 2m + 5(m+1) \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq 3 \\ m \geq -\frac{9}{7} \Leftrightarrow -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

nghiệm của hệ (*), tức là

$$-\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Vậy các giá trị m cần tìm là

Dạng 2. Bài toán thực tế - tìm GTLN-GTNN

Câu 7. Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu về được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

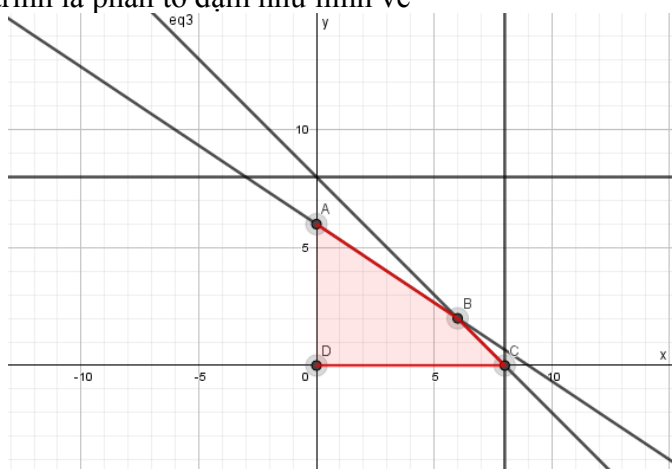
Gọi diện tích để trồng đậu là : x (ha); diện tích để trồng cà là : y (ha). (Đk: $0 \leq x, y \leq 8$)

Tổng số diện tích sử dụng là: $x + y$.

Tổng số công cần sử dụng là: $20x + 30y$

Ta có hệ bất phương trình :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $(d_1): x + y = 8$, $(d_2): 2x + 3y = 18$, $(d_3): x = 8$, $(d_4): y = 8$ ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm như hình vẽ



$$A(0;6) = (d_2) \cap Oy, B(6;2) = (d_1) \cap (d_2)$$

$$C(8;0) = (d_1) \cap Ox, D \equiv O(0;0)$$

Số tiền thu về là: $f(x,y) = 3x + 4y$ (triệu đồng)

$M(x,y)$	A	B	C	D
$f(x,y) = 3x + 4y$	24	26	24	0

Do đó $f(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $B(6;2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất thì cần trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

Câu 8. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1.5kg thịt bò và 1kg thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Lời giải

Gọi số kg thịt bò cần mua là : x (kg); số kg thịt lợn cần mua là : y (kg). Đk: $0 \leq x \leq 1,5, 0 \leq y \leq 1$.

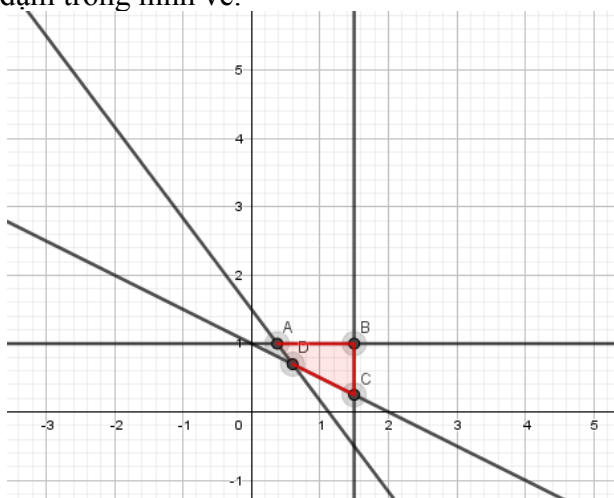
Khi đó số đơn vị protein là : $800x + 600y$.

Số đơn vị lipid là : $200x + 400y$.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

Vẽ các đường thẳng: $(d_1): x=1,5$, $(d_2): y=1$, $(d_3): 8x+6y=9$, $(d_4): x+2y=2$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm trong hình vẽ.



$$A\left(\frac{3}{8}; 1\right) = (d_3) \cap (d_2), \quad B(1,5; 1) = (d_1) \cap (d_2), \quad C(1,5; 0,25) = (d_1) \cap (d_4), \quad D\left(\frac{3}{8}; \frac{7}{10}\right) = (d_3) \cap (d_4)$$

Số tiền bỏ ra là: $f(x; y) = 200x + 100y$ (nghìn đồng).

$M(x; y)$	A	B	C	D
$f(x; y) = 200x + 100y$	175	400	325	190

Do đó $f(x; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $A\left(\frac{3}{8}; 1\right)$.

Vậy để số tiền bỏ ra nhỏ nhất thì cần mua $\frac{3}{8} \text{ kg}$ và 1kg thịt lợn.

Câu 9. Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Lời giải

Gọi số tấn nguyên liệu loại I cần sử dụng là x (tấn); số tấn nguyên liệu loại II cần sử dụng là y (tấn).

Đk: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9$.

Khi đó số kg chất A thu được là: $20x + 10y$

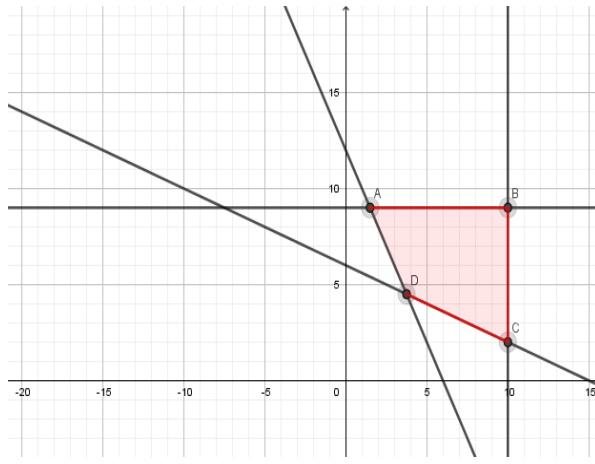
Số kg chất B thu được là: $0,6x + 1,5y$.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 120 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

Vẽ các đường thẳng $(d_1): x=10, (d_2): y=9, (d_3): 2x+y=12, (d_4): 2x+5y=30$

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ:



$$(d_2) \cap (d_3) = A\left(\frac{3}{2}; 9\right), \quad (d_2) \cap (d_1) = B(10; 9)$$

$$(d_1) \cap (d_4) = C(10; 2), \quad (d_4) \cap (d_3) = D\left(\frac{15}{4}; \frac{9}{2}\right)$$

Chi phí mua nguyên liệu cần bỏ ra là : $f(x, y) = 4x + 3y$ (triệu đồng).

$M(x, y)$	A	B	C	D
$f(x, y) = 4x + 3y$	33	67	46	28,5

Do đó $f(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $D\left(\frac{15}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất ta cần sử dụng $\frac{15}{4} = 3,75$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{9}{2} = 4,5$ tấn nguyên liệu loại II.

Câu 10. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi số sản phẩm loại I cần sản xuất là x ; số sản phẩm loại II cần sản xuất là y . Đk: $x, y \geq 0$.

Số máy nhóm A cần sử dụng là: $2x + 2y$.

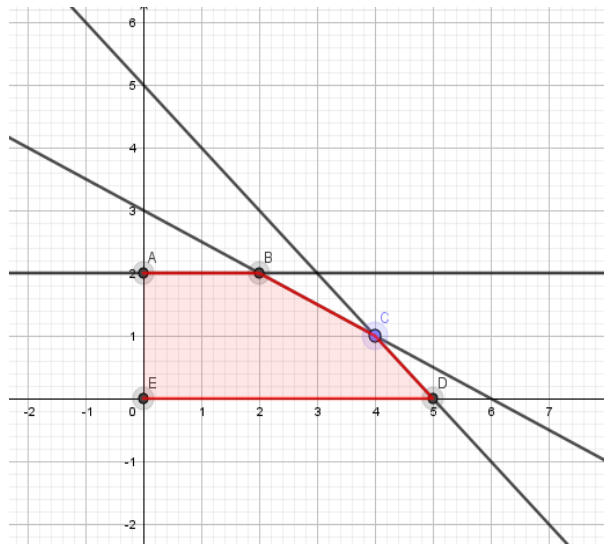
Số máy nhóm B cần sử dụng là: $2y$.

Số máy nhóm C cần sử dụng là: $2x + 4y$.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

Vẽ các đường thẳng $(d_1): y = 2$, $(d_2): x + y = 5$, $(d_3): x + 2y = 6$. Ta có miền nghiệm của bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ :



$$(d_1) \cap Oy = A(0;2) \quad (d_1) \cap (d_3) = B(2;2) \quad (d_2) \cap (d_3) = C(4;1) \\ (d_2) \cap Ox = D(5;0) \quad E \equiv O = (0;0)$$

Lãi suất thu được là : $f(x,y) = 3x + 5y$ (nghìn đồng).

$M(x,y)$	A	B	C	D	E
$f(x,y) = 4x + 3y$	10	16	17	15	0

Do đó $f(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $C(4;1)$.

Vậy phương án sản xuất 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II sẽ cho lãi cao nhất.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Câu 1. Trong các cặp số sau, cặp nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$ là

A. $(0;0)$ B. $(1;1)$ C. $(-1;1)$ D. $(-1;-1)$

Lời giải

Chọn C.

Ta thay cặp số $(-1;1)$ vào hệ ta thấy không thỏa mãn.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ 2(x-1) + \frac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Câu 2. Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng chứa điểm

A. $(2;1)$ B. $(0;0)$ C. $(1;1)$ D. $(3;4)$

Lời giải

Chọn A.

Nhận xét: chỉ có điểm $(2;1)$ thỏa mãn hệ.

- Câu 3.** Điểm nào sau đây **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-1 > 0 \\ 5x-y+4 < 0 \end{cases}$?
- A. $(-1; 4)$. B. $(-2; 4)$. C. $(0; 0)$. D. $(-3; 4)$.

Lời giải

Chọn C.

Nhận xét: chỉ có điểm $(0; 0)$ không thỏa mãn hệ.

- Câu 4.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5y-1 > 0 \\ 2x+y+5 > 0 \\ x+y+1 < 0 \end{cases}$?
- A. $(0; 0)$. B. $(1; 0)$. C. $(0; -2)$. D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C.

Nhận xét: chỉ có điểm $(0; -2)$ thỏa mãn hệ.

- Câu 5.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y > 0 \\ x-3y+3 < 0 \\ x+y-5 > 0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm
- A. $(5; 3)$. B. $(0; 0)$. C. $(1; -1)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn A.

Nhận xét: chỉ có điểm $(5; 3)$ thỏa mãn hệ.

- Câu 6.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y \geq 9 \\ x \geq y-3 \\ 2y \geq 8-x \\ y \leq 6 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm
- A. $(0; 0)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; 1)$. D. $(8; 4)$.

Lời giải

Chọn D.

Nhận xét: chỉ có cặp số $(8; 4)$ thỏa bất phương trình $3x+y \geq 9$.

- Câu 7.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y > 0 \\ 2x+5y < 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $(1; 1) \in S$. B. $(-1; -1) \in S$. C. $\left(1; -\frac{1}{2}\right) \in S$. D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right) \in S$.

Lời giải

Chọn C

Thế đáp án, chỉ có $x=1; y=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ bất phương trình $\Rightarrow$ chọn C

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 4 \end{cases}$$

- Câu 8.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng chứa điểm:
 A. (2;1) . B. (6;4) . C. (0;0) . D. (1;2) .

Lời giải

Chọn A

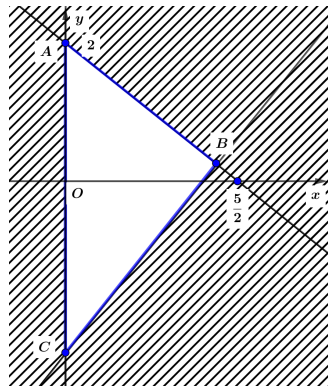
Nhận xét: Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền mặt phẳng chứa tất cả các điểm có toạ độ thoả mãn tất cả các bất phương trình trong hệ.

Thế $x=6; y=4$ vào từng bất phương trình trong hệ, ta lần lượt có các mệnh đề đúng: $22 \geq 6; 6 \geq 1; 8 \geq 2; 4 \leq 4$. Vậy ta chọn đáp án B.

Đáp án A có toạ độ không thoả bất phương trình thứ 3.

Đáp án C, D có toạ độ không thoả bất phương trình thứ 1 và 3.

- Câu 9.** Miền tam giác ABC kẻ cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ bất phương trình dưới đây?



- A. $\begin{cases} y \geq 0 \\ 5x - 4y \geq 10 \\ 5x + 4y \leq 10 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x > 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 5y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 10 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Cạnh AC có phương trình $x=0$ và cạnh AC nằm trong miền nghiệm nên $x \geq 0$ là một bất phương trình của hệ.

Cạnh AB qua hai điểm $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ và $(0; 2)$ nên có phương trình: $\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x + 5y = 10$.

Vậy hệ bất phương trình cần tìm là $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$.

- Câu 10.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
 A. $(1; -1) \in S$. B. $(1; -\sqrt{3}) \in S$. C. $(-1; \sqrt{5}) \notin S$. D. $(-4; \sqrt{3}) \in S$.

Lời giải

Chọn C.

Ta thấy $(-1; \sqrt{5}) \notin S$ vì $-1 < 0$.

Câu 11. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $(-1; 2) \in S$. B. $(\sqrt{2}; 0) \notin S$. C. $(1; -\sqrt{3}) \in S$. D. $(\sqrt{3}; 0) \in S$.

Lời giải

Chọn D.

Ta thấy $(\sqrt{3}; 0) \in S$ vì $\begin{cases} \sqrt{3} > 0 \\ \sqrt{3} + \sqrt{3}.0 + 1 > 0 \end{cases}$.

Câu 12. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > 3 \\ 1 - \frac{1}{2}x + y > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $(1; -2) \in S$. B. $(2; 1) \in S$. C. $(5; -6) \in S$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D.

Vì không có điểm nào thỏa hệ bất phương trình.

Câu 13. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - \frac{3}{2}y \geq 1 \\ 4x - 3y \leq 2 \end{cases}$ có tập nghiệm S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\left(-\frac{1}{4}; -1\right) \notin S$

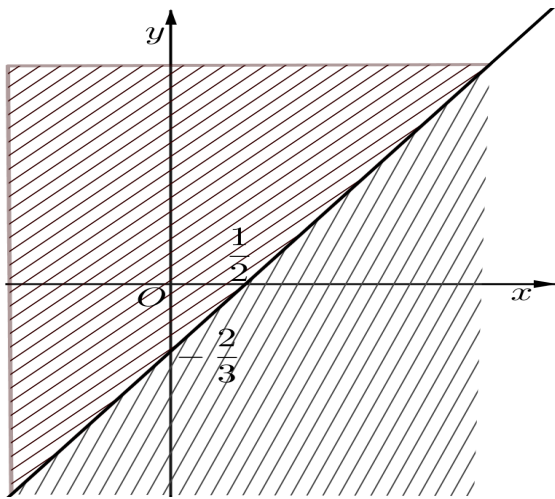
- B. $S = \{(x; y) | 4x - 3y = 2\}$

C. Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ và kẻ cả bờ d , với d là đường thẳng $4x - 3y = 2$.

D. Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kẻ cả bờ d , với d là đường thẳng $4x - 3y = 2$.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$$(d_1): 2x - \frac{3}{2}y = 1$$

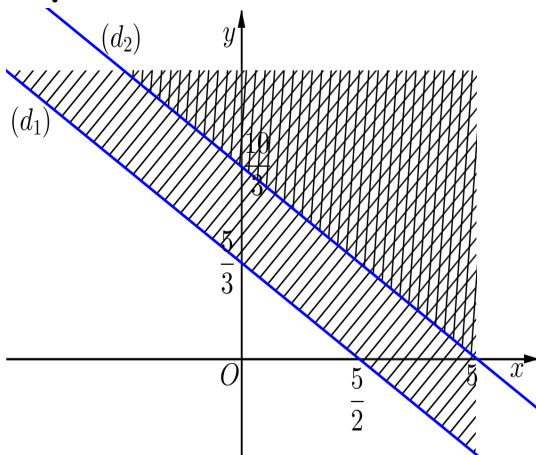
$$(d_2): 4x - 3y = 2$$

Thử trực tiếp ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không phải là nghiệm của phương trình (1). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, tập hợp nghiệm của bất phương trình chính là các điểm thuộc đường thẳng $(d): 4x - 3y = 2$.

- Câu 14.** Cho hệ
$$\begin{cases} 2x + 3y < 5 & (1) \\ x + \frac{3}{2}y < 5 & (2) \end{cases}$$
. Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), S_2 là tập nghiệm của bất phương trình (2) và S là tập nghiệm của hệ thì
- A. $S_1 \subset S_2$. B. $S_2 \subset S_1$. C. $S_2 = S$. D. $S_1 \neq S$.

Lời giải

Chọn B.



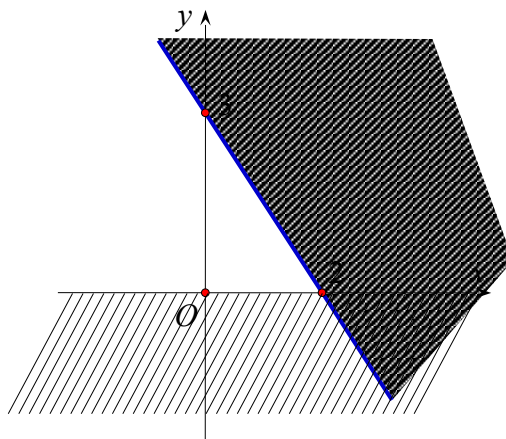
Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$$(d_1): 2x + 3y = 5$$

$$(d_2): x + \frac{3}{2}y = 5$$

Ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của cả hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa gốc tọa độ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Say khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

Câu 15. Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?



A. $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < -6 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y > -6 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị gồm hai đường thẳng $(d_1): y = 0$ và đường thẳng $(d_2): 3x + 2y = 6$.

Miền nghiệm gồm phần y nhận giá trị dương.

Lại có $(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $3x + 2y < 6$.

Câu 16. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

A. $A(1; 0)$

B. $B(-2; 3)$

C. $C(0; -1)$

D. $D(-1; 0)$

Lời giải

Chọn D.

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$(d_1): x - 2y = 0$

$(d_2): x + 3y = -2$

$(d_3): y - x = 3$

Ta thấy $(0; 1)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(0; 1)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

Câu 17. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

A. $A(1; 2)$

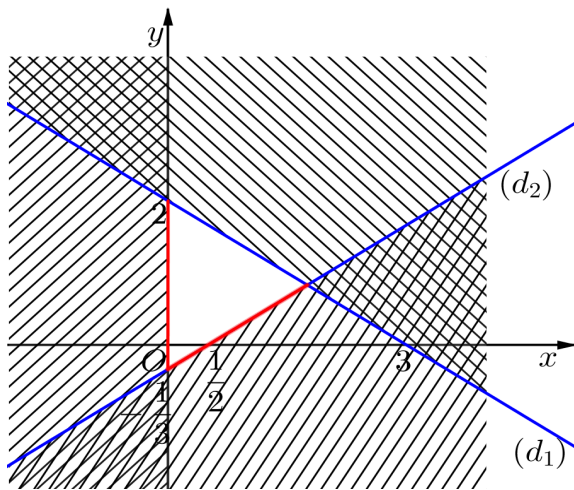
B. $B(0; 2)$

C. $C(-1; 3)$

D. $D\left(0; -\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn D.



Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$$(d_1): 2x + 3y - 6 = 0$$

$$(d_2): x = 0$$

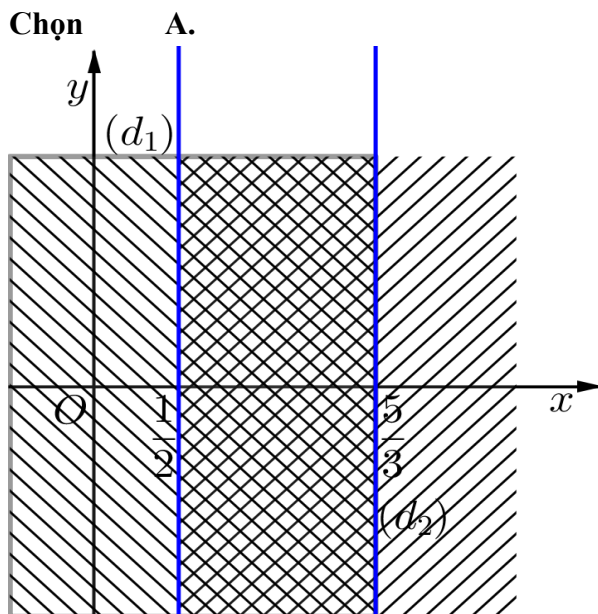
$$(d_3): 2x - 3y - 1 = 0$$

Ta thấy $(1; 1)$ là nghiệm của các ba bất phương trình. Điều này có nghĩa là điểm $(1; 1)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

Câu 18. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ -3x + 5 \leq 0 \end{cases}$$
 chứa điểm nào sau đây?

- A. Không có. B. $B\left(\frac{5}{3}; 2\right)$. C. $C(-3; 1)$. D. $D\left(\frac{1}{2}; 10\right)$.

Lời giải



Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$$(d_1): 2x - 1 = 0$$

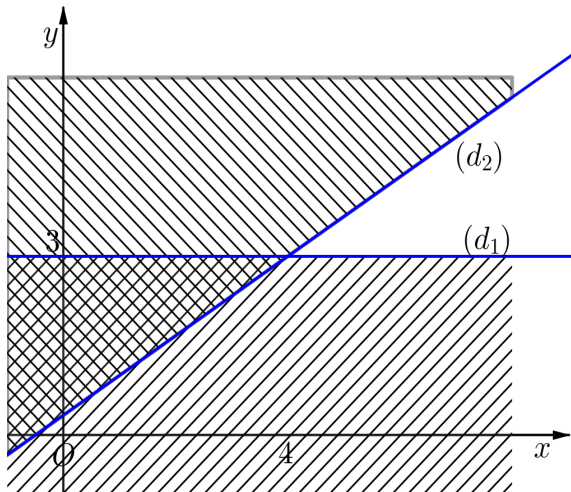
$$(d_2): -3x + 5 = 0$$

Ta thấy $(1; 0)$ là không nghiệm của cả hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(1; 0)$ không thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Vậy không có điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn hệ bất phương trình.

- Câu 19.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3 - y < 0 \\ 2x - 3y + 1 > 0 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?
- A. $A(3; 4)$. B. $B(4; 3)$. C. $C(7; 4)$. D. $D(4; 4)$.

Lời giải

Chọn C.



Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$$(d_1): 3 - y = 0$$

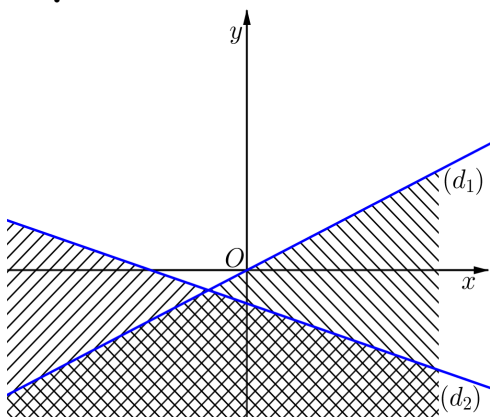
$$(d_2): 2x - 3y + 1 = 0$$

Ta thấy $(6; 4)$ là nghiệm của hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(6; 4)$ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

- Câu 20.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?
- A. $A(-1; 0)$. B. $B(1; 0)$. C. $C(-3; 4)$. D. $D(0; 3)$.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$$(d_1): x - 2y = 0$$

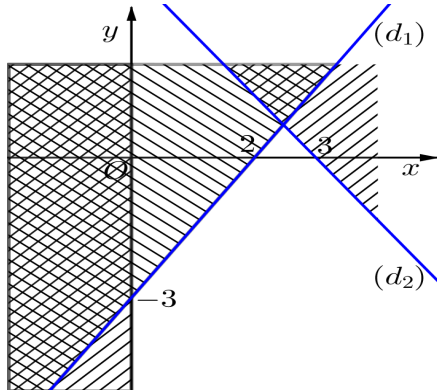
$$(d_2): x + 3y = -2$$

Ta thấy $(0; 1)$ là nghiệm của hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(0; 1)$ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Sau khi gạch bỏ phần không thích hợp, phần không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

Câu 21. Miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 \\ 2(x - 1) + \frac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

không chứa điểm nào sau đây?



A. $A(2; -2)$.

B. $B(3; 0)$.

C. $C(1; -1)$.

D. $D(2; -3)$.

Lời giải

Chọn C.

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$$(d_1): 3x - 2y - 6 = 0$$

$$(d_2): 4x + 3y - 12 = 0$$

$$(d_3): x = 0$$

Ta thấy $(2; -1)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(2; -1)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

Câu 22. Miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y \leq -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$$

không chứa điểm nào sau đây?

A. $A(3; 2)$.

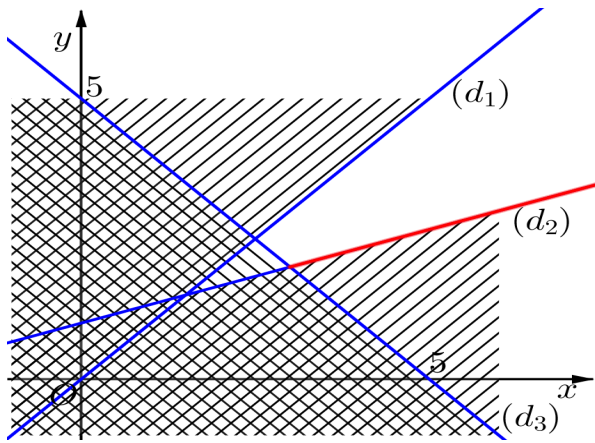
B. $B(6; 3)$.

C. $C(6; 4)$.

D. $D(5; 4)$.

Lời giải

Chọn A.



Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

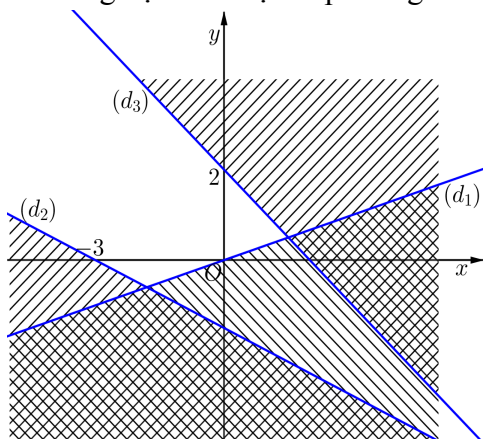
$$(d_1): x - y = 0$$

$$(d_2): x - 3y = -3$$

$$(d_3): x + y = 5$$

Ta thấy $(5; 3)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(5; 3)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

Câu 23. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 3y < 0 \\ x + 2y > -3 \\ y + x < 2 \end{cases}$$
 không chứa điểm nào sau đây?



A. $A(0; 1)$.

B. $B(-1; 1)$.

C. $C(-3; 0)$.

D. $D(-3; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$$(d_1): x - 3y = 0$$

$$(d_2): x + 2y = -3$$

$$(d_3): x + y = 2$$

Ta thấy $(-1; 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(-1; 0)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

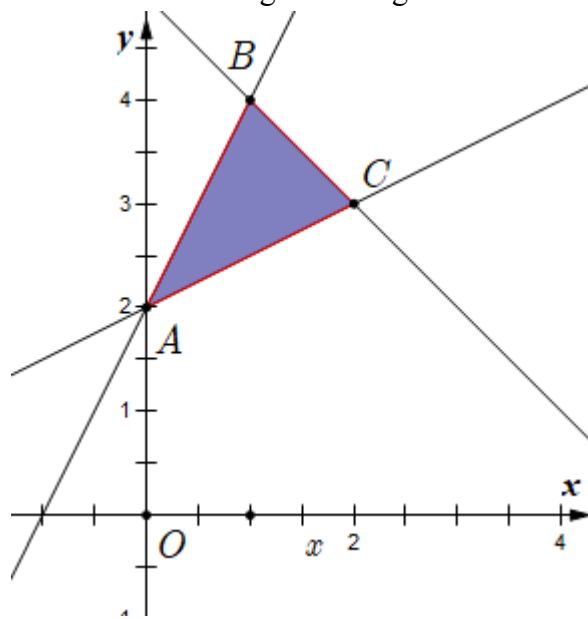
$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

- Câu 24.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ là
- A. $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.
 B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.
 C. $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.
 D. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên (như hình)



Ta thấy $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C .

Tại $A(0;2)$ thì $F = 2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F = 3$.

Tại $C(2;3)$ thì $F = 1$.

Vậy $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

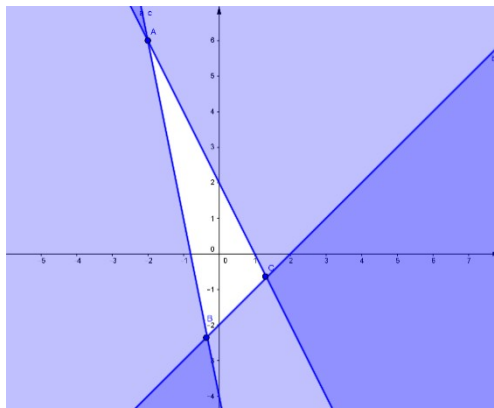
$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 5x + y \geq -4 \end{cases}$$

- Câu 25.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ là
- A. $\min F = -3$ khi $x = 1, y = -2$.
 B. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.
 C. $\min F = -2$ khi $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}$.
 D. $\min F = 8$ khi $x = -2, y = 6$.

Lời giải

Chọn C.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 5x + y \geq -4 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:



Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ chỉ đạt được tại các điểm

$$A(-2; 6), C\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right), B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right)$$

Ta có: $F(A) = 8; F(B) = -2; F(C) = -2$

Vậy $\min F = -2$ khi $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 26. Cho hệ bất phương trình . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tứ

giác $ABCO$ kể cả các cạnh với $A(0; 3)$, $B\left(\frac{25}{8}; \frac{9}{8}\right)$, $C(2; 0)$ và $O(0; 0)$.

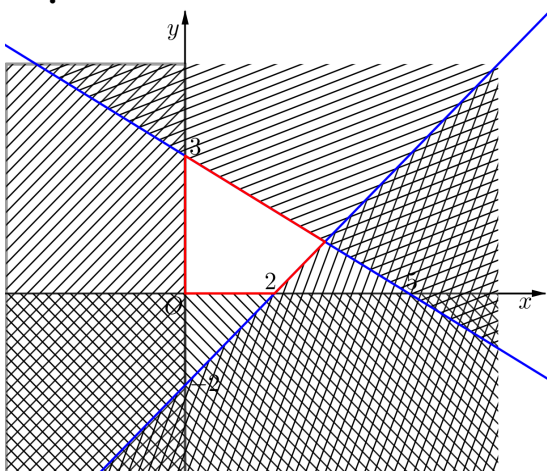
B. Đường thẳng $\Delta: x + y = m$ có giao điểm với tứ giác $ABCO$ kể cả khi $-1 \leq m \leq \frac{17}{4}$.

C. Giá trị lớn nhất của biểu thức $x + y$, với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là $\frac{17}{4}$.

D. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$, với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là 0.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, ta vẽ bốn đường thẳng:

$$(d_1): x - y = 2$$

$$(d_2): 3x + 5y = 15$$

$$(d_3): x = 0$$

$$(d_4): y = 0$$

Miền nghiệm là phần không bị gạch, kể cả biên.

- Câu 27.** Giá trị lớn nhất của biết thức $F(x; y) = x + 2y$ với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là
- A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

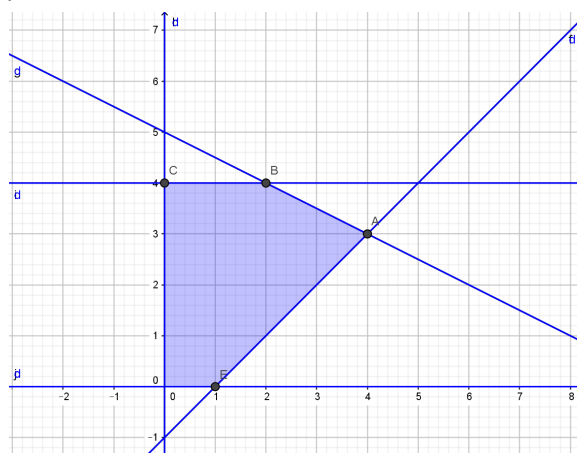
Lời giải

Chọn C.

Vẽ đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$, đường thẳng d_1 qua hai điểm $(0; -1)$ và $(1; 0)$.

Vẽ đường thẳng $d_2: x + 2y - 10 = 0$, đường thẳng d_2 qua hai điểm $(0; 5)$ và $(2; 4)$.

Vẽ đường thẳng $d_3: y = 4$.



Miền nghiệm là ngũ giác $ABCOE$ với $A(4; 3), B(2; 4), C(0; 4), E(1; 0)$.

Ta có: $F(4; 3) = 10$, $F(2; 4) = 10$, $F(0; 4) = 8$, $F(1; 0) = 1$, $F(0; 0) = 0$.

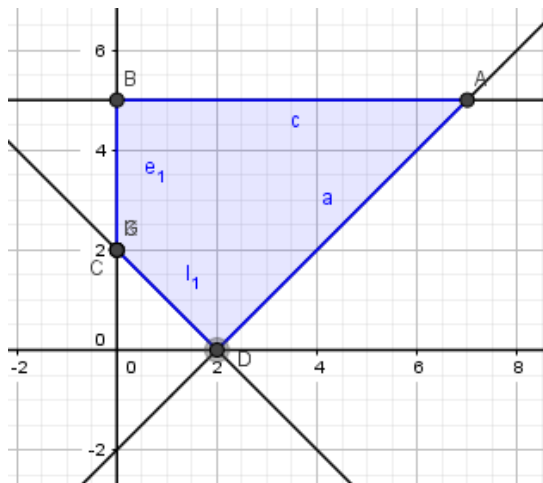
Vậy giá trị lớn nhất của biết thức $F(x; y) = x + 2y$ bằng 10.

- Câu 28.** Giá trị nhỏ nhất của biết thức $F(x; y) = x - 2y$ với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ là
- A. -10. B. 12. C. -8. D. -6.

Lời giải

Chọn A.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:.



Nhận thấy biết thức $F = y - x$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm A, B, C hoặc D .

Ta có: $F(A) = 7 - 2 \times 5 = -3; F(B) = -2 \times 5 = -10$

$F(C) = -2 \times 2 = -4, F(D) = 2 - 2 \times 0 = 2$

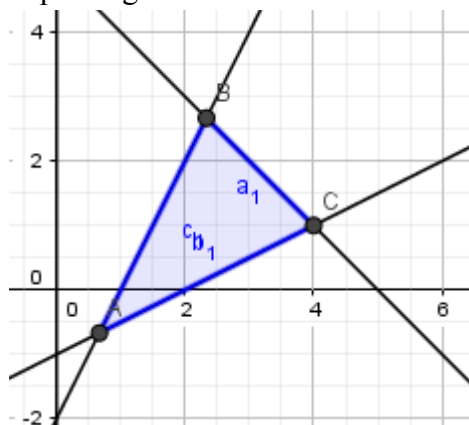
Vậy $\min F = -10$ khi $x = 0, y = 5$.

- Câu 29.** Biểu thức $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} -2x + y \leq -2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm $S(x; y)$ có tọa độ là
- A. (4;1) B. (3;1) C. (2;1) D. (1;1)

Lời giải

Chọn A.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -2x + y \leq -2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:



Nhận thấy biết thức $F = y - x$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm A, B hoặc C .

Chỉ $C(4;1)$ có tọa độ nguyên nên thỏa mãn.

Vậy $\min F = -3$ khi $x = 4, y = 1$.

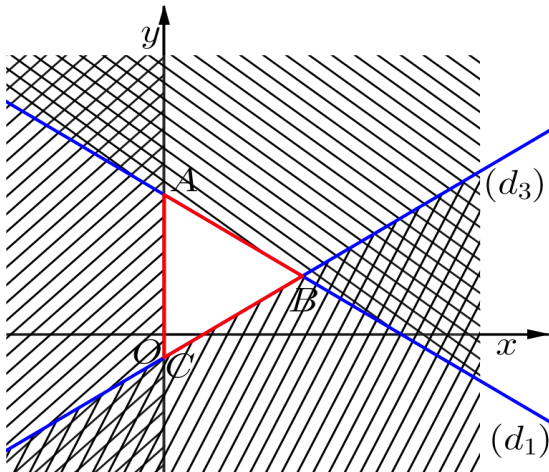
$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Câu 30. Biểu thức $L = y - x$, với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình , đạt giá trị lớn nhất là a và đạt giá trị nhỏ nhất là b . Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

- A. $a = \frac{25}{8}$ và $b = -2$. B. $a = 2$ và $b = -\frac{11}{12}$. C. $a = 3$ và $b = 0$. D. $a = 3$ và $b = \frac{-9}{8}$.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$$(d_1): 2x + 3y - 6 = 0$$

$$(d_2): x = 0$$

$$(d_3): 2x - 3y - 1 = 0$$

Ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa gốc tọa độ thuộc cả ba miền nghiệm của cả ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ (kể cả biên).

Miền nghiệm là hình tam giác ABC (kể cả biên), với $A(0; 2)$, $B\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{6}\right)$, $C\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

Vậy ta có $a = 2 - 0 = 2$, $b = \frac{5}{6} - \frac{7}{4} = -\frac{11}{12}$.

Câu 31. Trong một cuộc thi pha chế, hai đội A, B được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần $30g$ đường, 1 lít nước và $1g$ hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần $10g$ đường, 1 lít nước và $4g$ hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Đội A pha chế được a lít nước cam và b lít nước táo và dành được điểm thưởng cao nhất. Hiệu số $a - b$ là

- A. 1 . B. 3 . C. -1 . D. -6 .

Lời giải

Chọn C

Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và nước táo mà mỗi đội cần pha chế ($x \geq 0; y \geq 0$).

Để pha chế x lít nước cam cần $30xg$ đường, x lít nước và xg hương liệu.

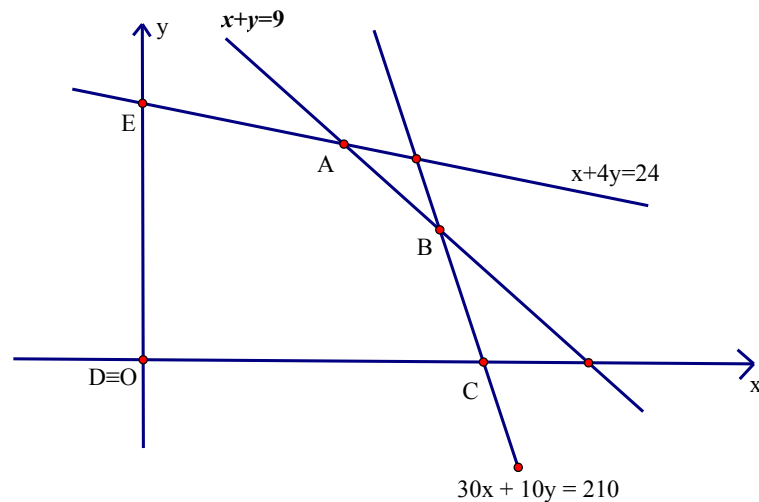
Để pha chế y lít nước táo cần $10yg$ đường, y lít nước và $4yg$ hương liệu.

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Số điểm đạt được khi pha x lít nước cam và y lít nước táo là $M(x, y) = 60x + 80y$. Bài toán trở thành tìm x, y để $M(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ $(*)$ trên mặt phẳng tọa độ như sau:



Miền nghiệm là ngũ giác $ABCDE$.

Tọa độ các điểm: $A(4;5)$, $B(6;3)$, $C(7;0)$, $D(0;0)$, $E(0;6)$.

$M(x, y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại các đỉnh của miền nghiệm nên thay tọa độ các điểm vào biểu thức $M(x, y)$ ta được:

$$M(4;5) = 640, M(6;3) = 600, M(7;0) = 420, M(0;0) = 0, M(0;6) = 480$$

Vậy giá trị lớn nhất của $M(x; y)$ bằng 640 khi $x = 4; y = 5 \Rightarrow a = 4; b = 5 \Rightarrow a - b = -1$.

Câu 32. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích $800m^2$. Nếu trồng đậu trên diện tích $100m^2$ thì cần 20 công làm và thu được 3000000 đồng. Nếu trồng cà thì trên diện tích $100m^2$ cần 30 công làm và thu được 4000000 đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công làm không quá 180 công. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau:

A. Trồng $600m^2$ đậu; $200m^2$ cà.

B. Trồng $500m^2$ đậu; $300m^2$ cà.

C. Trồng $400m^2$ đậu; $200m^2$ cà.

D. Trồng $200m^2$ đậu; $600m^2$ cà.

Lời giải

Chọn A

Giả sử diện tích trồng đậu là x (trăm m^2); suy ra diện tích trồng cà là $8 - x$ (trăm m^2)

Ta có thu nhập thu được là $S(x) = [3x + 4(8 - x)] \cdot 10000 = 10000(-x + 32)$ đồng.

Tổng số công là $20x + 30(8 - x) = -10x + 240$

Theo giả thiết có $-10x + 240 \leq 180 \Leftrightarrow x \geq 6$

Mà hàm số $S(x)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=6$.
Do đó trồng $600m^2$ đậu, $200m^2$ cà.

Câu 33. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng. Xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng.

A. 4 xe A và 5 xe B.

B. 5 xe A và 6 xe B.

C. 5 xe A và 4 xe B.

D. 6 xe A và 4 xe B.

Lời giải

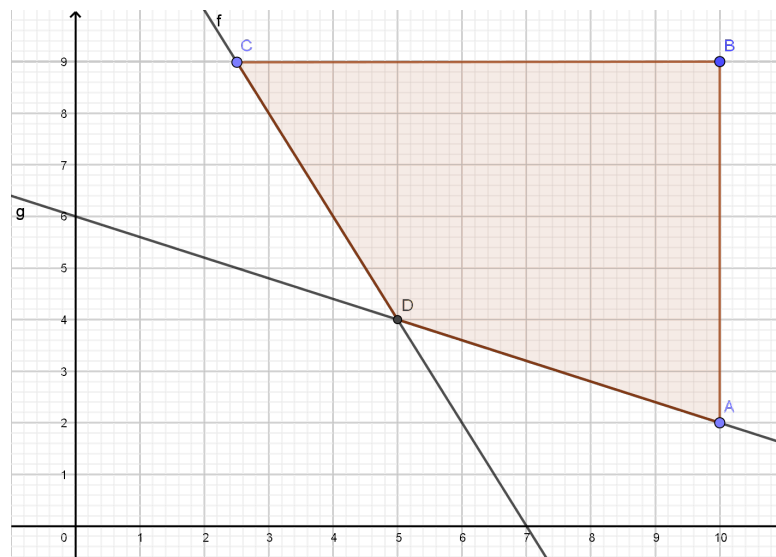
Chọn D

Gọi x là số xe loại A ($0 \leq x \leq 10; x \in \mathbb{N}$), y là số xe loại B ($0 \leq y \leq 9; y \in \mathbb{N}$). Khi đó tổng chi phí thuê xe là $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Xe A chở tối đa 20 người, xe B chở tối đa 10 người nên tổng số người 2 xe chở tối đa được là $20x + 10y$ (người).

Xe A chở được 0,6 tấn hàng, xe B chở được 1,5 tấn hàng nên tổng lượng hàng 2 xe chở được là $0,6x + 1,5y$ (tấn).

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} (*)$$


Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác ABCD kể cả miền trong của tứ giác (như hình vẽ trên).

Biểu thức $T = 4x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD.

Tại các đỉnh $A(10;2); B(10;9); C\left(\frac{5}{2};9\right); D(5;4)$, ta thấy T đạt giá trị nhỏ nhất tại $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$.

Khi đó $T_{\min} = 32$ (triệu đồng).

- Câu 34.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính $x^2 + y^2$
- A. $x^2 + y^2 = 1,3$
 B. $x^2 + y^2 = 2,6$
 C. $x^2 + y^2 = 1,09$
 D. $x^2 + y^2 = 0,58$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1,6$; $0 \leq y \leq 1,1$

Khi đó số protein có được là $800x + 600y$ và số lipit có được là $200x + 400y$

Vì gia đình đó cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là: $800x + 600y \geq 900$ và $200x + 400y \geq 400$

$\Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ và $x + 2y \geq 2$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là miền nghiệm của tứ giác ABCD (kể cả biên)

Chi phí để mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn là $T = 160x + 110y$

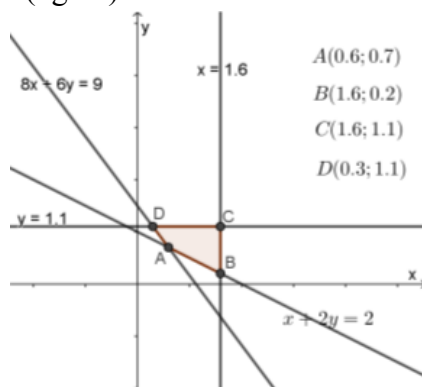
Biết T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD

Tại A: $T = 160.0,6 + 110.0,7 = 173$ (nghìn)

Tại B: $T = 160.1,6 + 110.0,2 = 278$ (nghìn)

Tại C: $T = 160.1,6 + 110.1,1 = 377$ (nghìn)

Tại D: $T = 160.0,3 + 110.1,1 = 169$ (nghìn)



Vậy T đạt GTNN khi $x = 0,3$; $y = 1,1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0,3^2 + 1,1^2 = 1,3$

- Câu 35.** Có hai cái giỏ đựng trứng gồm giỏ A và giỏ B, các quả trứng trong mỗi đều có hai loại là trứng lành và trứng hỏng. Tổng số trứng trong hai giỏ là 20 quả và số trứng trong giỏ A nhiều hơn số

trứng trong giỏ B. Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, biết xác suất để lấy được hai quả trứng

lành là $\frac{55}{84}$. Tìm số trứng lành trong giỏ A.

A. 6.

B. 14.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi a là số trứng lành, b là số trứng hỏng trong giỏ A.

Gọi x là số trứng lành, y là số trứng hỏng trong giỏ B.

Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, xác suất để lấy được hai quả trứng lành: $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{55}{84}$.

$$\begin{cases} (a \cdot x) : 55 \\ (a+b)(x+y) : 84 \\ a+b+x+y = 20 \\ (a+b)(x+y) \leq \left(\frac{a+b+x+y}{2}\right)^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ x=5 \end{cases}$$

Do đó:

Suy ra: Giỏ A có 11 quả trứng lành.

Câu 36. Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

A. 32 triệu đồng.

B. 35 triệu đồng.

C. 14 triệu đồng.

D. 30 triệu đồng.

Lời giải

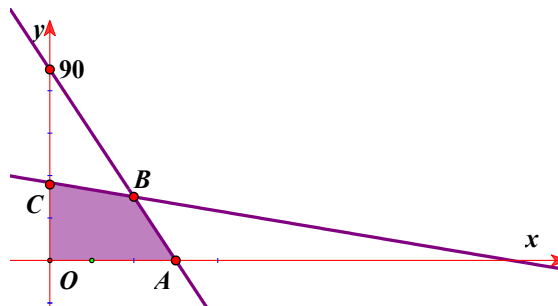
Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

$$\begin{cases} 3x+2y \leq 180 \\ x+6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình sau:

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$ (triệu đồng).

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C. Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60; 0)$ thì $T = 30$ triệu đồng.

Tại $B(40; 30)$ thì $T = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Câu 37. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

A. $x = 0,3$ và $y = 1,1$. B. $x = 0,3$ và $y = 0,7$. C. $x = 0,6$ và $y = 0,7$. D. $x = 1,6$ và $y = 0,2$.

Lời giải

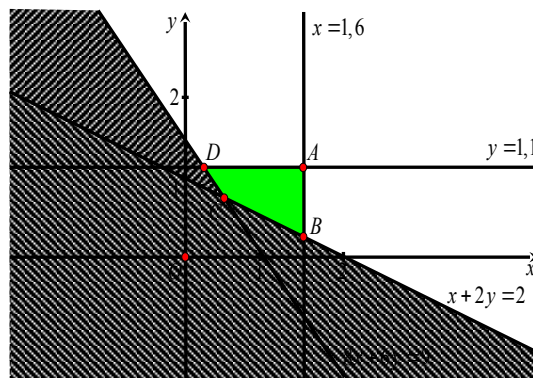
Chọn A.

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x + 0,6.y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ (d_1).

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2.x + 0,4.y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$ (d_2).

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$
 sao cho $T = 160.x + 110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6; 1,1)$, $B(1,6; 0,2)$, $C(0,6; 0,7)$, $D(0,3; 1,1)$.

Nhận xét: $T(A) = 377$ nghìn, $T(B) = 278$ nghìn, $T(C) = 173$ nghìn, $T(D) = 169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x = 0,6$ và $y = 0,7$.