UBND HUYỆN TAM DƯƠNG	**KÌ THI THỬ HỌC SINH GIỎI LỚP 9 LẦN 1**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**NĂM HỌC 2023 - 2024**
	ĐỀ THI MÔN: TOÁN
	Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
	Đề thi này gồm 01 trang

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay!

Câu 1. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-4x-\sqrt{x}+4}{2x\sqrt{x}-14x+28\sqrt{x}-16}$. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm).* Cho hai số a,b khác 0 thỏa mãn $a^2+b^2=\dfrac{a}{3a+4b}=\dfrac{b}{4a-3b}$. Tính giá trị của biểu thức a^2+b^2.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Giải phương trình $\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{(x+1)^3}=\dfrac{1}{3x\left(x^2+2\right)}$.

Câu 4. *(2,0 điểm)* Tìm các số nguyên x và y, biết $xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0$.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho a,b,c là các số nguyên cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Chứng minh rằng: $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)$ chia hết cho 24.

Câu 6. *(2,0 điểm)* Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}$ biết x,y,z là các số thực dương và $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$.

Câu 7. *(2,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Kẻ HI vuông góc với AB, HK vuông góc với AC (I thuộc AB, K thuộc AC). Chứng minh rằng $CK.\sqrt{BH}+BI.\sqrt{CH}=AH.\sqrt{BC}$.

Câu 8. *(2,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC có đường cao CK và H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$. Gọi S,S_1,S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng $S=\sqrt{S_1.S_2}$.

Câu 9. *(2,0 điểm)* Cho tam giác ABC, có $\widehat{BAC}>90^0$, gọi H là chân đường vuông góc hạ tự A xuống cạnh BC. Biết $\widehat{CAH}=3\widehat{BAH}$, $AH=6cm$, $BH=3cm$. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

Câu 10. *(2,0 điểm)* Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi môn Toán được mang số báo danh là số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số báo danh được mang chia hết cho 9.

-------------HẾT------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

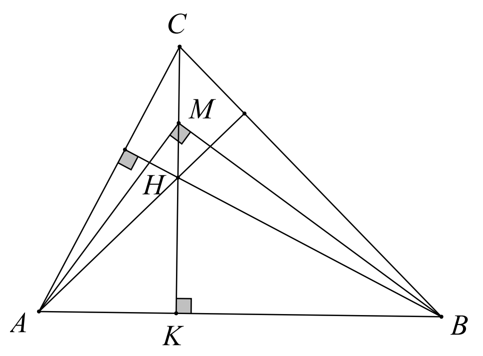
Họ tên thí sinh..SBD:................phòng thi............

TRƯỜNG THCS TAM DƯƠNG

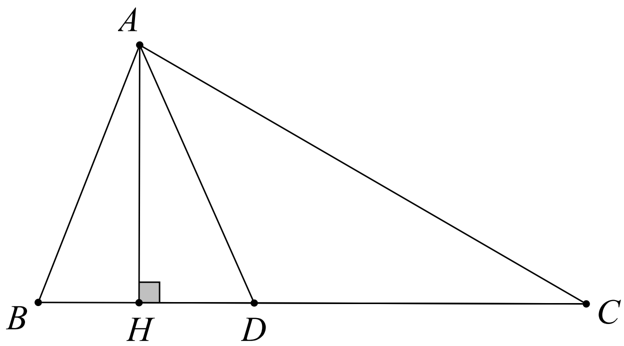
HDC KÌ THI THỬ HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Câu	Nội dung cơ bản	Điểm
1 (2 đ)	ĐKXĐ: $x \ge 0,\ x \ne 1,\ x \ne 4,\ x \ne 16$ Đặt $t = \sqrt{x}\ (x \ge 0)$ $A = \dfrac{t^3 - 4t^2 - t + 4}{2t^3 - 14t^2 + 28t - 16} = \dfrac{(t^2 - 1)(t - 4)}{2t^3 - 2t^2 - (12t^2 - 28t + 16)} = \dfrac{(t-1)(t+1)(t-4)}{2(t-1)(t-2)(t-4)}$ $A = \dfrac{t+1}{2(t-2)} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-4}$	0,5
	Với $x \ne a^2\ (a \in \mathbb{N})$ thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ nên $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2(\sqrt{x}-2)}$ là số vô tỷ Với $x = a^2\ (a \in \mathbb{N})$ thì A là số nguyên khi $(\sqrt{x}+1) \vdots (2\sqrt{x}-4)$ $\Rightarrow 2(\sqrt{x}+1) \vdots (2\sqrt{x}-4)$	0,5
	Mà $(2\sqrt{x}-4) \vdots (2\sqrt{x}-4)$ nên $\Rightarrow \left[2(\sqrt{x}+1) - (2\sqrt{x}-4)\right] \vdots (2\sqrt{x}-4)$ $\Rightarrow 6 \vdots (2\sqrt{x}-4) \Rightarrow 3 \vdots (\sqrt{x}-2)$ Do đó $\sqrt{x} - 2 \in Ư(3)$ $Ư(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$	0,5
	$\sqrt{x} - 2 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1$ (Vô lý) $\sqrt{x} - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ (Loại) $\sqrt{x} - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 9$ (TM) $\sqrt{x} - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 25$ (TM) Vậy: Để A nhận các giá trị nguyên thì $x = 9$ và $x = 25$.	0,5
2 (2 đ)	$a^2 + b^2 = \dfrac{a}{3a+4b} = \dfrac{b}{4a-3b} \Rightarrow 3a + 4b = \dfrac{a}{a^2+b^2}$; $4a - 3b = \dfrac{b}{a^2+b^2}$	0,5
	Ta có $(3a+4b)^2 + (4a-3b)^2 = 25(a^2+b^2)$ Mặt khác $(3a+4b)^2 + (4a-3b)^2 = \dfrac{a^2}{(a^2+b^2)} + \dfrac{b^2}{(a^2+b^2)} = \dfrac{1}{a^2+b^2}$	0,5
	Nên $25(a^2+b^2) = \dfrac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow (a^2+b^2)^2 = \dfrac{1}{25}$	0,5
	Do đó $a^2 + b^2 = \dfrac{1}{5}$ (do $a^2 + b^2 > 0$ với a, b khác 0)	0,5
3 (2 đ)	ĐKXĐ: $x \ne 0$; $x \ne \pm 1$. Đặt $a = (x+1)^3$; $b = (x-1)^3$; $c = x^3 \Rightarrow 3x(x^2+2) = a + b + c$.	0,5
	Phương trình trở thành $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$ Nếu $a + b = 0$ thì $(x+1)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)	0,5

	Nếu $b+c=0$ thì $(x-1)^3=(-x)^3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (TM) Nếu $c+a=0$ thì $(x+1)^3=(-x)^3 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$ (TM) Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pm 1}{2}$	0,5 0,5
4 (2 đ)	Ta có: $xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0 \Leftrightarrow -x^2+xy^2+xy-2x+y^2+y=0$ $\Leftrightarrow -x^2+x\left(y^2+y-2\right)+y^2+y-2=-2$ Đặt $a=x$; $b=y^2+y-2$ $\Rightarrow -a^2+ab+b=-2 \Leftrightarrow 1-a^2+ab+b=1-2$ $\Leftrightarrow (1-a)(1+a)+b(1+a)=-1$ $\Leftrightarrow (1+a)(1-a+b)=-1$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1+a=1\\1-a+b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}1+a=-1\\1-a+b=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}\\ \begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}\end{array}\right.$ TH1: $a=0;b=-2$ $\Rightarrow \begin{cases}x=0\\y^2+y-2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\y=-1\end{array}\right.\end{cases}$ TH2: $a=-2;b=-2$ $\Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y^2+y-2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\y=-1\end{array}\right.\end{cases}$ Vậy tập nghiệm của pương trình là $S=\{(0;0);(0;-1);(-2;0);(-2;-1)\}$	0,5 0,5 0,5 0,5
5 (2 đ)	Ta có: $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)$ $=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc-a^3-b^3-c^3$ $=3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc\right)$ $=3\left[\left(ab^2+b^2c\right)+\left(a^2b+abc\right)+\left(a^2c+ac^2\right)+\left(bc^2+abc\right)\right]$ $=3\left[b^2(a+c)+ab(a+c)+ac(a+c)+bc(a+c)\right]$ $=3(a+c)\left(b^2+ab+ac+bc\right)$ $=3(a+c)(a+b)(b+c)$ Vì $a,\ b,\ c$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ nên $a+b;\ b+c;\ c+a$ là các số chẵn. Do đó, $(a+b)(b+c)(c+a) \vdots 8 \Rightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) \vdots 24$ Vậy: $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right) \vdots 24$	0,5 0,5 0,5 0,5
6 (2 đ)	Theo bất đẳng thức BCS ta có	0,5

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{(x+y+y+z+z+x)}=\dfrac{x+y+z}{2}$.
Theo bất đẳng thức AM – GM ta có
$\dfrac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$; $\dfrac{y+z}{2}\ge\sqrt{yz}$; $\dfrac{z+x}{2}\ge\sqrt{zx}$ nên $x+y+z\ge\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$
$\dfrac{x+y+z}{2}\ge\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2}=\dfrac{1}{2}$
$\min A=\dfrac{1}{2}$
Dấu $"=" \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.</td>
<td>0,5
0,5
0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>7
(2 đ)</td>
<td>ΔABC, $HK//AB$ $\Rightarrow\dfrac{BI}{BA}=\dfrac{BH}{BC}$ (Định lý Thales)
ΔABC, $HI//AC$ $\Rightarrow\dfrac{CK}{AC}=\dfrac{CH}{BC}$ (Định lý Thales)
Xét tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH suy ra:
$AB^2=BH.BC; AC^2=CH.BC$ (1)
Có $CK.\sqrt{BH}+BI.\sqrt{CH}=AH.\sqrt{BC}$
$\Leftrightarrow CK.\sqrt{BH.BC}+BI.\sqrt{CH.BC}=AH.BC$
$\Leftrightarrow CK.\sqrt{AB^2}+BI.\sqrt{AC^2}=AH.BC$
$\Leftrightarrow CK.AB+BI.AC=AH.BC$.
$\Leftrightarrow CK.AB+BI.AC=AB.AC$
$\Leftrightarrow\dfrac{CK}{AC}+\dfrac{BI}{AB}=1$
$\Leftrightarrow\dfrac{BH}{BC}+\dfrac{CH}{BC}=1$ (luôn đúng)</td>
<td>0,5
0,5
0,5
0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>8
(2 đ)</td>
<td>

Tam giác AMB vuông tại M có $MK\perp AB$ nên $MK^2=AK.BK$ (1).
Xét ΔAHK, ΔCBK có $\widehat{AKH}=\widehat{CKB}=90^0$; $\widehat{KAH}=\widehat{KCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$)</td>
<td>0,5</td>
</tr>
</table>

	$\Rightarrow \Delta AHK \backsim \Delta CBK$ (g.g) Suy ra $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{HK}{BK} \Rightarrow AK.KB = CK.KH$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $MK^2 = CK.HK$ nên $MK = \sqrt{CK.HK}$; $S_{AMB} = \dfrac{1}{2}.AB.MK = \dfrac{1}{2}AB.\sqrt{CK.HK} = \sqrt{\dfrac{1}{2}AB.CK.\dfrac{1}{2}AB.HK} = \sqrt{S_1S_2}$. Vậy $S = \sqrt{S_1.S_2}$.	0,5 0,5 0,5
9 (2 đ)	 Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. ΔABD có BH là đường cao và trung tuyến nên ΔABD cân tại A. $\Rightarrow AH$ là đường phân giác của $\widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BAD} = 2\widehat{BAH}$. (1) $\widehat{CAD} = \widehat{CAH} - \widehat{DAH} = 3\widehat{BAH} - \widehat{BAH} = 2\widehat{BAD}$ ($\widehat{CAH} = 3\widehat{BAH}$; $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$) $\Rightarrow \widehat{CAD} = 2\widehat{BAH}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow AD$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (Tính chất đường phân giác) $BD = 6cm$; $AB = 3\sqrt{5}cm$ $\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{5}}{AC} = \dfrac{6}{CD} \Rightarrow AC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}CD$. Theo định lý Pytago trong ΔAHB vuông ta có: $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2}$ $= \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ cm $HD = HB = 3$ cm; $BD = BH + HD = 3 + 3 = 6$ cm. Đặt $CD = x$. Theo định lý Pytago trong tam giác ΔAHC vuông ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 = 6^2 + (3+x)^2$	0,5 0,5 0,5

	$\Rightarrow \frac{5}{4}CD^2 = 36 + 9 + CD^2 + 6CD$ $\Leftrightarrow \; x^2 - 24x - 180 = 0$ $\Leftrightarrow (x-30)(x+6) = 0$ $\Leftrightarrow \; x = 30$ (thỏa mãn) hoặc $x = -6$ (loại). $BC = BD + CD \; = 6 + 30 = 36$. Diện tích ΔABC là: $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.36.6 = 108 \; cm^2$.	0,5
10 (1,0 đ)	Với 5 số tự nhiên đôi một khác nhau tùy ý thì có 2 trường hợp xảy ra: - TH1: Có ít nhất 3 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Tổng 3 số tương ứng chia hết cho 3. - TH2: Có nhiều nhất 2 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Có ít nhất 1 số chia hết cho 3, 1 số chia 3 dư 1, 1 số chia 3 dư 2. Suy ra luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3.	0,5
	Do đó ta chia 17 số báo danh của 17 học sinh thành 3 tập hợp lần lượt có 5; 5; 7 phần tử. Trong mỗi tập hợp, chọn được 3 số có tổng lần lượt là $3a_1; 3a_2; 3a_3 \left(a_1; a_2; a_3 \in N\right)$	0,5
	Còn lại 17 – 9 = 9 số, trong 8 số còn lại, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_4$ Còn lại 5 số, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_5$	0,5
	Trong 5 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có 3 số a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} có tổng chia hết cho 3. Nên 9 học sinh tương ứng có tổng các số báo danh là $3\left(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}\right) \vdots 9$	0,5

Lưu ý:

- HS làm cách khác đáp án mà vẫn đúng thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa của câu đó.

- Bài hình nếu HS không vẽ hình hoặc vẽ hình sai phần nào thì không chấm điểm phần đó.