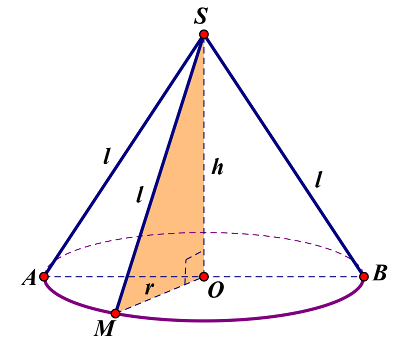
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI NÓN (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Lý thuyết – phương pháp chung

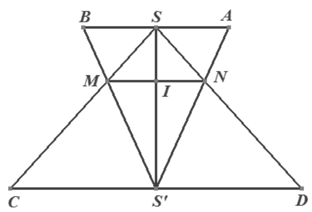
MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☞**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	• **Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). • **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$. • **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$. • **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$ • **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S. • **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	• **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. • **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. • **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* • **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. • **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S', đáy là hình tròn tâm S bán kính r. Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{4\pi r^3}{27}$. **B.** $\dfrac{\pi r^3}{9}$. **<u>C</u>.** $\dfrac{4\pi r^3}{9}$. **D.** $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hai khối nón và lần lượt cắt hai đường tròn (S,r) và $(S',2r)$ theo đường kính AB, CD. Gọi $M = SC \cap S'B, N = SD \cap S'A$. Phần chung của 2 khối nón đã cho gồm 2 khối nón chung đáy là hình tròn đường kính MN và đỉnh lần lượt là S, S'.

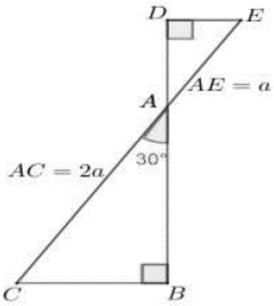
Ta có $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{SN}{SN+ND} = \dfrac{SA}{SA+S'D} = \dfrac{r}{3r} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{4r}{3}$.

Gọi I là giao điểm của MN và SS'. Ta có $SI = \dfrac{1}{3}SS' = r, S'I = \dfrac{2}{3}SS' = 2r$.

Do đó thể tích phần chung là

$$V = \frac{1}{3}\pi SI.\left(\frac{MN}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi S'I.\left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi.r.\frac{4r^2}{9} + \frac{1}{3}\pi.2r.\frac{4r^2}{9} = \frac{4\pi r^3}{9}.$$

Câu 2. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ bên) quanh trục DB.



A. $\dfrac{9\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **<u>B</u>.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Thể tích của vật thể tròn xoay gồm hai phần bao gồm thể tích V_1 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ABC khi quay quanh cạnh AB và thể tích V_2 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ADE khi quay quanh cạnh AD.

*Xét tam giác vuông ABC vuông tại B ta có:

$r_1 = BC = AC.\sin 30^o = a$; $h_1 = AB = AC.\sin 60^o = a\sqrt{3}$

Vậy ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.r_1^2.h_1 = \dfrac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

*Xét tam giác vuông ADE vuông tại D ta có:

$r_2 = DE = AE.\sin 30^o = \dfrac{a}{2}$; $h_2 = AD = AE.\sin 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy ta có $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.r_2^2.h_2 = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$.

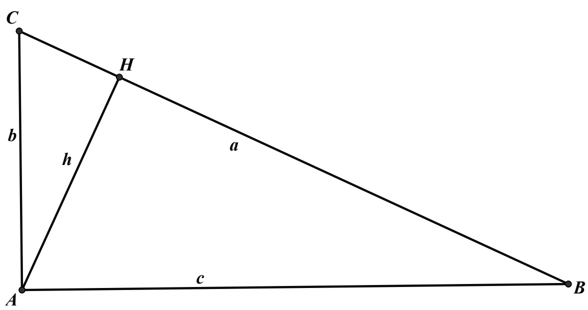
Vậy thể tích của vật thể tròn xoay là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3} + \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{24} = \dfrac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 3. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quay cạnh AC, quanh cạnh AB, ta thu được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

<u>A</u>. $S_b > S_c > S_a$. **B.** $S_b > S_a > S_c$. **C.** $S_c > S_a > S_b$. **D.** $S_a > S_c > S_b$.

Lời giải

<u>Chọn A</u>



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $BC, AH = h$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC ta thu được hình hợp bởi hai hình nón tròn xoay có chung đáy bán kính bằng h, đường sinh lần lượt là b,c. Do đó $S_a=\pi bh+\pi ch$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AC ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng c, đường sinh bằng a, $S_b=\pi ac+\pi c^2=\pi c\left(a+c\right)$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AB ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng b, đường sinh bằng a, $S_c=\pi ab+\pi b^2=\pi b\left(a+b\right)$.

Do $b<c$ nên $\begin{cases} ab<ac \\ b^2<c^2 \end{cases} \Rightarrow S_c<S_b$.

Ta có $h=\dfrac{bc}{a}\Rightarrow S_a=\pi b^2.\dfrac{c}{a}+\pi c^2.\dfrac{b}{a}$.

Tam giác ABC vuông nên $\dfrac{c}{a}<1\Rightarrow \pi b^2\dfrac{c}{a}<\pi b^2$; $\dfrac{c^2}{a^2}<1\Rightarrow \pi c^2\dfrac{b}{a}<\pi ab$.

$\Rightarrow S_a<\pi b^2+\pi ab=\pi b\left(a+b\right)=S_c$. Do đó $S_a<S_c$.

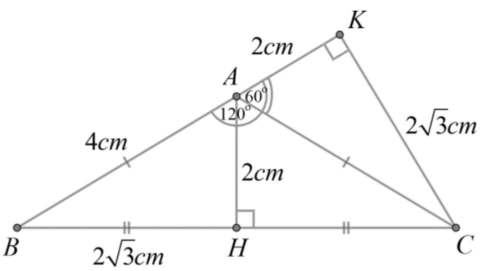
Vậy $S_b>S_c>S_a$.

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $\widehat{BAC}=120^\circ$ và $AB=4\text{cm}$. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa một cạnh của tam giác ABC.

A. $16\sqrt{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $16\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{3}}\ \left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn B



Trường hợp 1: Khối tròn xoay khi quay ΔABC quanh đường thẳng chứa AB (hoặc AC) có thể tích bằng hiệu thể tích của hai khối nón $\left(N_1\right)$ và $\left(N_2\right)$.

Dựng $CK\perp BA$ tại $K\Rightarrow \begin{cases} AK=AC.\cos CAK=4.\cos 60^\circ=2\text{cm} \\ BK=BA+AK=4+2=6\text{cm} \\ CK=AC.\sin CAK=4.\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\text{cm} \end{cases}$.

$+\left(N_1\right)$ có $h_1=BK=6\text{cm}$, $r_1=CK=2\sqrt{3}\text{cm}$.

$+\left(N_2\right)$ có $h_2=AK=2\text{cm}$, $r_2=CK=2\sqrt{3}\text{cm}$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}\pi.CK^2.\left(BK-AK\right)=\dfrac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{3}\right)^2.\left(6-2\right)=16\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Trường hợp 2: Khối tròn xoay khi quay ΔABC quanh đường thẳng chứa BC có thể tích bằng tổng thể tích của hai khối nón $\left(N_3\right)$ và $\left(N_4\right)$.

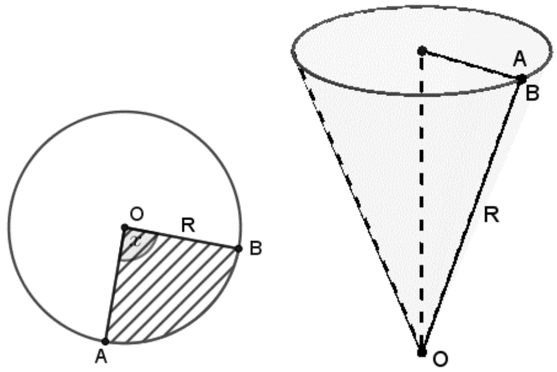
Kẻ đường cao $AH\ \left(H\in BC\right)\Rightarrow \begin{cases} AH=AB.\cos BAH=4.\cos 60^\circ=2\text{cm} \\ BH=CH=AB.\sin BAH=4.\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\text{cm} \end{cases}$.

$\left(N_3\right)$ và $\left(N_4\right)$ có $h_3=h_4=BH=CH=2\sqrt{3}\text{cm}$, $r_3=r_4=HA=2\text{cm}$.

Do đó $V = 2.\frac{1}{3}\pi.AH^2.BH = 2.\frac{1}{3}\pi.2^2.2\sqrt{3} = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left(\text{cm}^3\right)$.

Vậy $V_{\max} = 16\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 5. **(Cụm liên trường Hải Phòng- 2019)** Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu là lớn nhất?



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Góc x chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ có độ dài $l = R.x$.

Từ giả thiết suy ra bán kính của phễu là $r = \frac{Rx}{2\pi}$ và chiều cao của phễu là

$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Khi đó thể tích của phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{R^2x^2}{4\pi^2}.\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$, $x \in (0;2\pi)$

$f'(x) = 2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{2x\left(4\pi^2 - x^2\right) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{x\left(8\pi^2 - 3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

Lập bảng biến thiên, ta có:

x	0		$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Vậy thể tích phễu lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

Câu 6. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A. $R = 3a$. **B.** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C.** $R = \sqrt[3]{9}a$. **D.** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h, l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.h = 9a^3\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{27a^3\sqrt{2}}{R^2} \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2.\dfrac{729a^6}{R^4}}$

$S_{xq} = \pi.R.l = \pi\sqrt{R^4 + \dfrac{729a^6}{R^2} + \dfrac{729a^6}{R^2}} \geq \pi\sqrt{3\sqrt[3]{R^4.\dfrac{729a^6}{R^2}.\dfrac{729a^6}{R^2}}}$.

$\Rightarrow S_{xq} = 9\pi a^2$. Nên $\min S_{xq} = 9\pi a^2$ khi $R^4 = \dfrac{729a^6}{R^2} \Leftrightarrow R = 3a$.

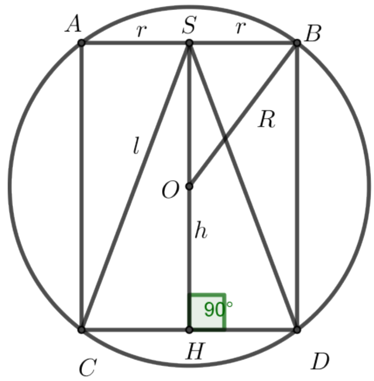
Câu 7. **(HSG Sở Nam Định 2019)** Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O, bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. $h = R$. **B.** $h = R\sqrt{2}$. **C.** $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cắt khối cầu tâm O, bán kính R bằng mặt phẳng (α) đi qua tâm O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ ta được hình như hình vẽ bên dưới.



Trong đó, $AB = (\alpha) \cap (P), CD = (\alpha) \cap (Q)$ với $AB = CD$, $h = SH = AC = BD$, $R = OB$.

Đường sinh $l = SC = SD$.

Bán kính của mỗi hình tròn giao tuyến là $r = \dfrac{AB}{2}$.

Ta có: $l^2 = SC^2 = AC^2 + AS^2 = h^2 + r^2$ và $r^2 = SB^2 = OB^2 - SO^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$.

Suy ra $l^2 = R^2 + \dfrac{3h^2}{4}$.

Mà diện tích xung quanh của khối nón được xét là: $S_{xq} = \pi rl$.

Ta có S_{xq} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ rl đạt giá trị lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $r\sqrt{3}$ và l ta có

$rl = \frac{1}{2\sqrt{3}}.2.\left(r\sqrt{3}\right)l \le \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3r^2 + l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.4R^2 = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

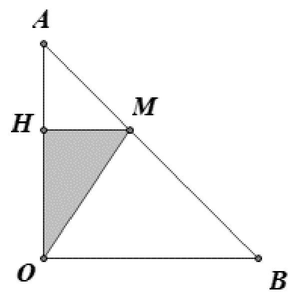
□ rl lớn nhất là $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $3r^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho tam giác OAB vuông cân tại O, có $OA = 4$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B) và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác OMH quanh OA.

A. $\frac{128\pi}{81}$. **B.** $\frac{81\pi}{256}$. **C.** $\frac{256\pi}{81}$. **D.** $\frac{64\pi}{81}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $h = OH$, $0 < h < 4$.

Khi quay tam giác OMH quanh OA, ta được hình nón đỉnh O chiều cao h bán kính đáy $r = HM$.

Ta có $HM \,//\, OB$ nên $\frac{AH}{AO} = \frac{HM}{OB} \Rightarrow \frac{4-h}{4} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 4 - h$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4-h)^2.h = \frac{1}{6}\pi(4-h)(4-h).2h \le \frac{1}{6}\pi\left(\frac{4-h+4-h+2h}{3}\right)^3 = \frac{256\pi}{81}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi.\frac{256}{27} = \frac{256\pi}{81}$.

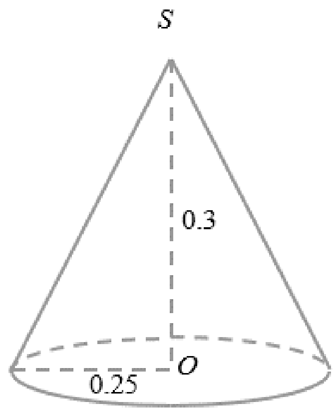
Câu 9. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6{,}13\,m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50\,cm$, chiều cao $30\,cm$ thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

A. $50\,kg$. **B.** $76\,kg$. **C.** $48\,kg$. **D.** $38\,kg$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R = \frac{50}{2} = 25(cm) = 0{,}25(m)$ và đường cao $h = 30(cm) = 0{,}3(m)$.



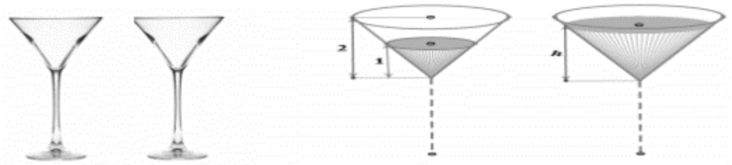
Gọi l là chiều cao của hình nón $\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\dfrac{\sqrt{61}}{20}\left(m\right)$.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón lá là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.0,25.\dfrac{\sqrt{61}}{20}=\dfrac{\pi\sqrt{61}}{80}\left(m^2\right)$

Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón là $S=1000.\dfrac{\pi\sqrt{61}}{80}=\dfrac{25\pi\sqrt{61}}{2}\left(m^2\right)$

Do đó khối lượng lá cần dùng là $\dfrac{S}{6,13}\approx 50,03\left(kg\right)$.

Câu 10. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2dm$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1dm$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01dm$).



A. $h\approx 1,41dm$. **B.** $h\approx 1,89dm$. **C.** $h\approx 1,91dm$. **D.** $h\approx 1,73dm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính đáy, thể tích (phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2dm$) của khối nón lần lượt là r; V.

Gọi bán kính đáy, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ nhất sau khi rót sang ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_1; V_1.

Gọi bán kính đáy, chiều cao, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_2; h; V_2.

Ta có: Thể tích chất lỏng ban đầu là: $V=\dfrac{2}{3}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng còn lại sau khi rót sang ly thứ hai là: $V_1=\dfrac{1}{3}\pi r_1^2$.

mà $\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow r_1=\dfrac{r}{2}\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{12}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng ly thứ hai là: $V_2=\dfrac{1}{3}\pi r_2{}^2h=V-V_1\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\pi r_2{}^2h=\dfrac{7}{12}\pi r^2\Leftrightarrow r_2{}^2h=\dfrac{7}{4}r^2$.

mà $\frac{r_2}{r}=\frac{h}{2}\Leftrightarrow r_2=\frac{hr}{2}\Rightarrow h^3=7\Rightarrow h\approx 1,91\,dm.$

Kết luận: $h\approx 1,91\,dm.$

Câu 11. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50\,\text{cm}$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là:

A. $10\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$. **B.** $50\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$. **C.** $20\left(\text{cm}\right)$. **D.** $25\left(\text{cm}\right)$.

Lời giải

Ta có diện tích miếng tôn là $S=\pi.2500\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=\pi R^2+\pi.R.l$.

Thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: $\pi R^2+\pi.R.l=2500\pi \Leftrightarrow R^2+R.l=2500=A \Leftrightarrow l=\frac{A}{R}-R$.

Thể tích khối nón là:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.h \Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{l^2-R^2} \Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\left(\frac{A}{R}-R\right)^2-R^2}$$

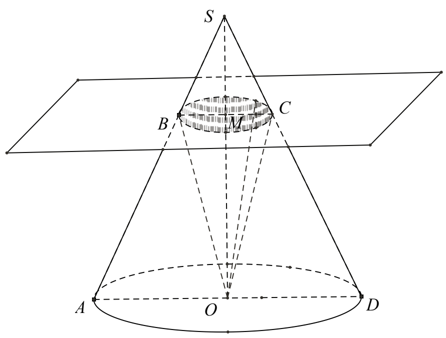
$$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\frac{A^2}{R^2}-2A} \Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{A^2.R^2-2A.R^4} \Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{\frac{A^3}{8}-2A\left(R^2-\frac{A}{4}\right)^2}$$

$\Leftrightarrow V\le\frac{1}{3}\pi.\frac{A}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi $R=\sqrt{\frac{A}{4}}=25$, vậy V đạt GTLN khi $R=25$.

Câu 12. **(Phan Dăng Lưu - Huế - 2018)** Cho hình nón $\left(N\right)$ có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x$, $0<x<h$. $\left(C\right)$ là thiết diện của mặt phẳng $\left(P\right)$ vuông góc với trục SO tại M, với hình nón $\left(N\right)$. Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là $\left(C\right)$ lớn nhất.

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{h}{3}$.

Lời giải



Ta có BM là bán kính đường tròn $\left(C\right)$.

Do tam giác $\Delta SBM \backsim \Delta SAO$ nên $\frac{BM}{AO}=\frac{SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{AO.SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{R\left(h-x\right)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là $\left(C\right)$ là:

$$V=\frac{1}{3}\pi BM^2.OM=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{R\left(h-x\right)}{h}\right]^2x=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}\left(h-x\right)^2x.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$, $(0<x<h)$ ta có

Ta có $f'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) \Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có

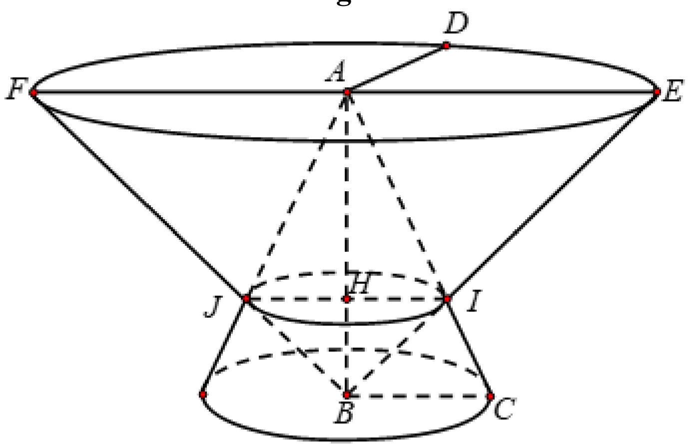
x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	$\searrow$	

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x=\frac{h}{3}$.

Câu 13. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AD=3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (Bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA, đáy là đường tròn bán kính $AE=3$ cm. Gọi $I=AC\cap BE$, $IH \perp AB$ tại H. Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH.

Ta có ΔIBC đồng dạng với ΔIEA $\Rightarrow \frac{IC}{IA}=\frac{BC}{AE}=\frac{1}{3} \Rightarrow IA=3IC$.

Mặt khác $IH//BC$ $\Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{IH}{BC}=\frac{AI}{AC}=\frac{3}{4} \Rightarrow IH=\frac{3}{4}BC=\frac{3a}{4}$.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H

$V_1=\frac{1}{3}\pi.IH^2.AH$.

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.IH^2.BH$.

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}.IH^2.AB \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}.\frac{9a^2}{16}.a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 14. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt được các hình tròn xoay có thể tích là 672π, $\frac{3136\pi}{5}$, $\frac{9408\pi}{13}$.Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S = 1979$. **B.** $S = 364$. **C.** $S = 84$. **D.** $S = 96$.

Lời giải

Vì tam giác ABC nhọn nên các chân đường cao nằm trong tam giác.

Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC, và a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Khi đó

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh AB là $\frac{1}{3}.\pi.{h_c}^2.c = 672\pi$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh BC là $\frac{1}{3}.\pi.{h_a}^2.a = \frac{3136\pi}{5}$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh CA là $\frac{1}{3}.\pi.{h_b}^2.b = \frac{9408\pi}{13}$.

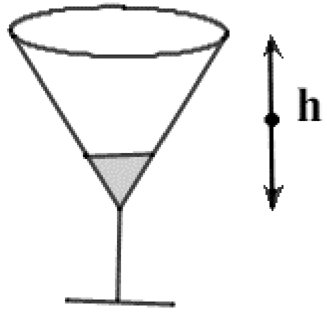
Do đó

$$\begin{cases} \frac{1}{3}c.h_c^2 = 672 \\ \frac{1}{3}a.h_a^2 = \frac{3136}{5} \\ \frac{1}{3}b.h_b^2 = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{S^2}{c} = 672 \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{a} = \frac{3136}{5} \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{b} = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4S^2}{3.672} \\ a = \frac{20S^2}{3.3136} \\ b = \frac{52S^2}{3.9408} \end{cases}$$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812} \Leftrightarrow 16S^2 = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812}$

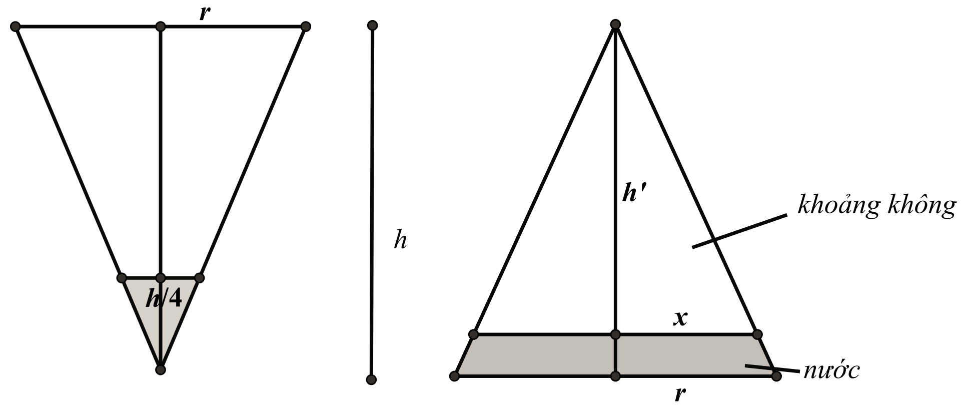
$\Leftrightarrow S^6 = 16.81.9408.28812 \Leftrightarrow S = 84$.

Câu 15. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ với chiều cao ly là h). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly. Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng bao nhiêu?



A. $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{63}}{4}$. **C.** $\frac{4-\sqrt{63}}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Giả sử ly có chiều cao h và đáy là đường tròn có bán kính r, nên có thể tích $V=\dfrac{1}{3}\pi hr^2$.

Khối nước trong ly có chiều cao bằng $\dfrac{1}{4}$ chiều cao của ly nên khối nước tạo thành khối nón có chiều cao bằng $\dfrac{h}{4}$ và bán kính đáy $\dfrac{r}{4}$ thể tích nước bằng $\dfrac{1}{3}.\dfrac{h}{4}\pi\left(\dfrac{r}{4}\right)^2=\dfrac{1}{64}.\left(\dfrac{1}{3}\pi hr^2\right)=\dfrac{1}{64}V$.

Do đó thể tích khoảng không bằng $V-\dfrac{1}{64}V=\dfrac{63}{64}V$.

Nên khi úp ngược ly lại thì ta có các tỉ lệ: $\dfrac{x}{r}=\dfrac{h'}{h}\Rightarrow x=\dfrac{r.h'}{h}$.

Suy ra: thể tích khoảng không bằng: $\dfrac{1}{3}h'.\pi x^2=\dfrac{1}{3}.h'.\pi.\left(\dfrac{r.h'}{h}\right)^2=\dfrac{1}{3}\pi hr^2.\left(\dfrac{h'}{h}\right)^3=\left(\dfrac{h'}{h}\right)^3.V$.

$\Rightarrow\dfrac{63}{64}V=\left(\dfrac{h'}{h}\right)^3V\Rightarrow\left(\dfrac{h'}{h}\right)^3=\dfrac{63}{64}\Rightarrow\dfrac{h'}{h}=\sqrt[3]{\dfrac{63}{64}}=\dfrac{\sqrt[3]{63}}{4}\Rightarrow h'=\dfrac{\sqrt[3]{63}}{4}h$.

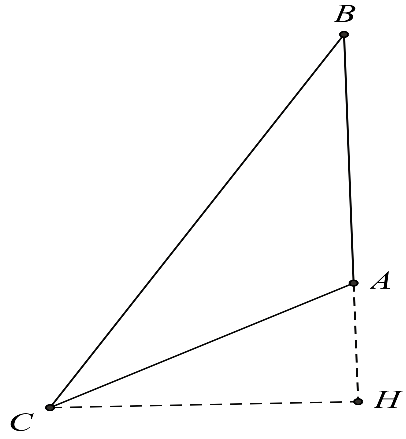
Nên chiều cao mực nước bằng: $h-h'=h-\dfrac{\sqrt[3]{63}}{4}h=\dfrac{4-\sqrt[3]{63}}{4}h$.

Vậy tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng $\dfrac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$.

Câu 16. **(Nam Định - 2018)** Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120°$, $AB=AC=a$. Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng:

A. $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **<u>B</u>.** $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Theo định lý cosin ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A} = a\sqrt{3}$.

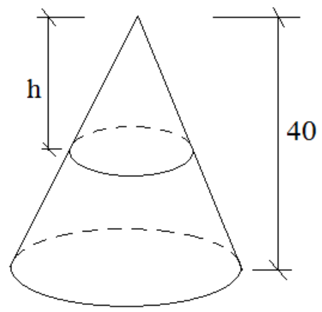
Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích $V = V_1 - V_2$ với V_1, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác

vuông BCH và tam giác ACH quay xung quanh với HB (H là hình chiếu vuông góc của C lên AB)

Ta tính được $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \dfrac{a}{2}$. Khi đó, ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi.CH^2.BH - \frac{1}{3}\pi.CH^2.AH = \frac{1}{3}\pi.CH^2.AB = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4}$$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng $40cm$. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\dfrac{1}{8}$

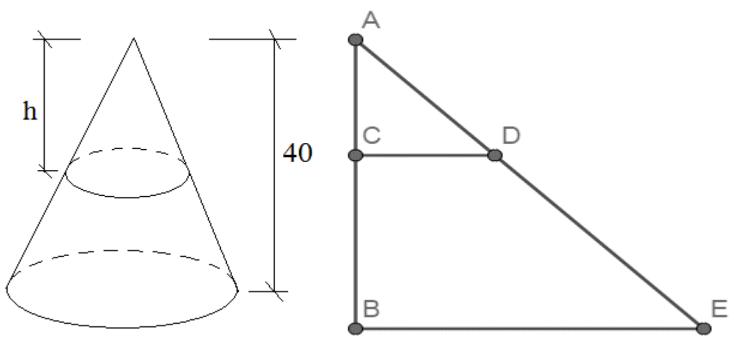


thể tích N_1.Tính chiều cao h của hình nón N_2?

A. $10cm$ **B.** $20cm$ **C.** $40cm$ **D.** $5cm$

Lời giải

Chọn B



Gọi $r_1 = BE$, $h_1 = AB$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_1

Gọi $r_2 = CD$, $h = AC$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_2

Khi đó thể tích của hai khối nón lần lượt là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h$$

Theo đề bài ta có

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 . \frac{h}{h_1} = \frac{1}{8} \ (1)$$

Xét hai tam giác đồng dạng ACD, ABE có:

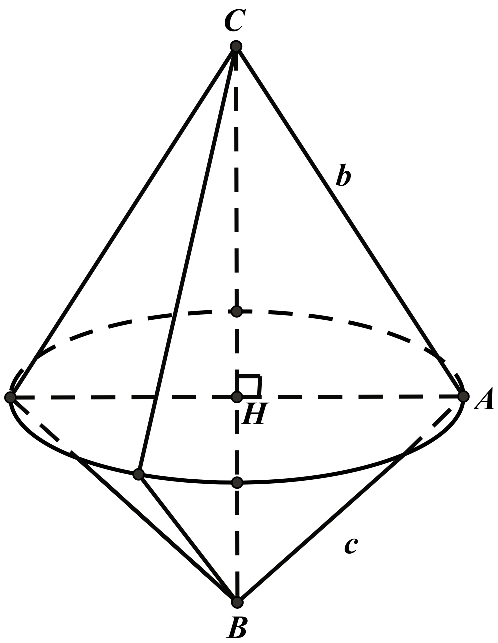
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{h_1} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}h_1 = 20$

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho một tấm bìa hình dạng tam giác vuông, biết b và c là độ dài cạnh tam giác vuông của tấm một khối tròn xoay. Hỏi thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi tấm bìa bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **B.** $V = \dfrac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **C.** $V = \dfrac{2\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **D.** $V = \dfrac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{2(b^2+c^2)}}$.

Lời giải



Gọi tam giác vuông là ABC, kẻ $AH \perp BC$, H là chân đường cao.

Khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

Thể tích khối tròn xoay cần tính bằng tổng thể tích 2 khối nón tạo bởi hai tam giác vuông ACH và ABH khi quay quanh trục BC.

Khối nón tạo bởi tam giác vuông ACH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi CH.AH^2$

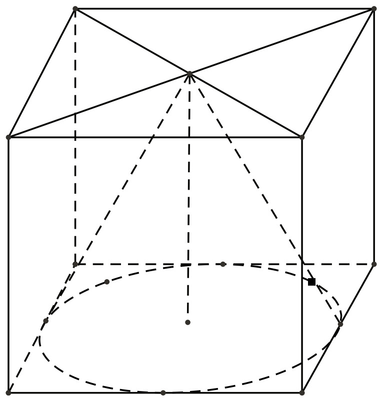
Khối nón tạo bởi tam giác vuông ABH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_2=\frac{1}{3}\pi BH.AH^2$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}\pi CH.AH^2+\frac{1}{3}\pi BH.AH^2$$

$$=\frac{1}{3}\pi BC.AH^2=\frac{1}{3}\pi\sqrt{b^2+c^2}.(\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})^2=\frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$$

Câu 19. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



A. $\frac{\pi}{12-\pi}$. **B.** $\frac{1}{11}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V=1$.

Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h=1$, bán kính đáy $r=\frac{1}{2}$.

Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón.

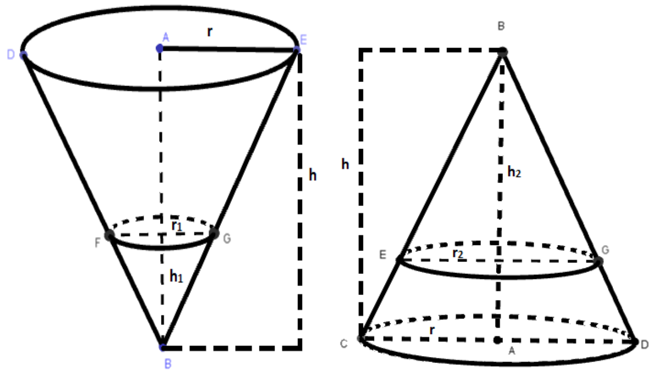
Ta có: $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.1=\frac{\pi}{12}$.

Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là: $V_2=V-V_1=1-\frac{\pi}{12}=\frac{12-\pi}{12}$.

Do đó: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi}{12-\pi}$.

Câu 20. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.

A. $0,501(\text{cm})$. **B.** $0,302(\text{cm})$. **C.** $0,216(\text{cm})$. **D.** $0,188(\text{cm})$.



Lời giải

Gọi h_1 là chiều cao của nước ta có $h_1 = \frac{1}{3}h$. Từ hình vẽ ta có: $\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}r$;

$\frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} \Leftrightarrow \frac{h_2}{r_2} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{h}h_2 = r_2$.

Ta có thể tích của nước trước và sau khi lôn ngược là như nhau:

$h_1.\pi r_1^2 = h.\pi r^2 - h_2.\pi r_2^2$

$$\Leftrightarrow h_2 = \frac{h\pi r^2 - h_1\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{hr^2 - h_1.r_1^2}{r_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{hr^2}{r_2^2} - \frac{h_1.r_1^2}{r_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{h^3}{h_2^2} - \frac{h_1.\frac{1}{9}r^2}{\frac{r^2}{h^2}h_2^2}$$

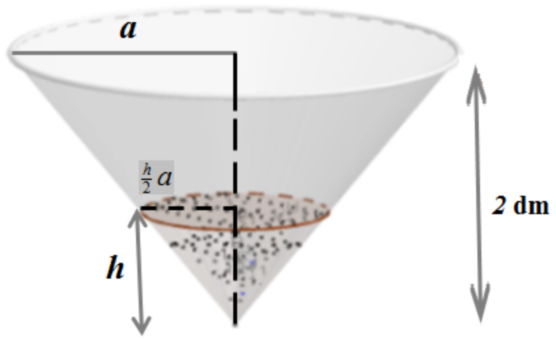
$$\Leftrightarrow h_2 = \frac{h^3}{h_2^2} - \frac{h_1.\frac{1}{9}}{\frac{1}{h^2}h_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{15^3}{h_2^2} - \frac{5.\frac{1}{9}.15^2}{h_2^2} \Leftrightarrow h_2^3 = 15^3 - 5.\frac{1}{9}.15^2 \Leftrightarrow h_2^3 = 3250 \Leftrightarrow h_2 = \sqrt[3]{3250}$$ Vậ

y bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng: $0,188(\text{cm})$.

Câu 21. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi a là bán kính đáy hình nón;

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

$h,\ V_3$ lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

$R,\ r$ lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

Ta có: $\frac{R}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=\frac{a}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là $V_2=\frac{1}{3}.1.\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{\pi a^2}{12}$.

Mặt khác: $\frac{r}{a}=\frac{h}{2}\Rightarrow r=\frac{ah}{2}$.

Do đó thể tích nước hình nón dưới $V_3=\frac{1}{3}.h.\pi\left(\frac{h}{2}a\right)^2=\frac{\pi a^2h^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước $V_1=\frac{1}{3}.2.\pi a^2$.

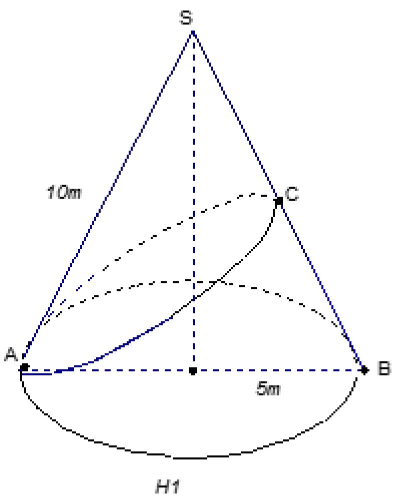
Lại có: $V_3=V_1-V_2\Rightarrow\frac{\pi a^2h^3}{12}=\frac{1}{3}.2.\pi a^2-\frac{\pi a^2}{12}\Leftrightarrow 1+h^3=8\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{7}$.

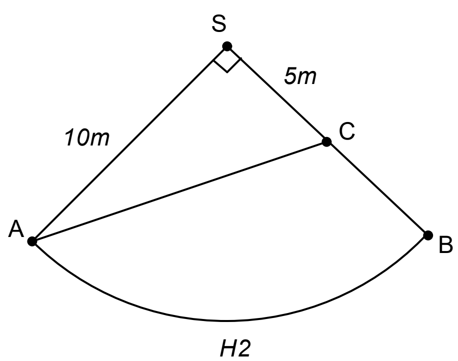
Câu 22. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tại trung tâm thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l=10\,\text{m}$, bán kính đáy $R=5\,\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. 15 m. **B.** 10 m. **C.** $5\sqrt{3}\,\text{m}$. **D.** $5\sqrt{5}\,\text{m}$.

Lời giải

• Cắt hình nón theo hai đường sinh SA, SB rồi trải ra ta được hình ($H2$) như sau:





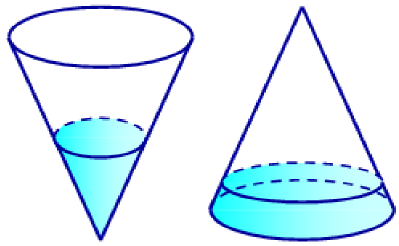
Khi đó, chiều dài dây đèn ngắn nhất là độ dài đoạn thẳng AC trên hình *H2*.

• Chu vi cung tròn $\overset{\frown}{AB}$: $C=\frac{1}{2}.2\pi.5=5\pi$.

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại *S*.

$\Rightarrow AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=\sqrt{10^2+5^5}=5\sqrt{5}\,\text{m}$.

Câu 23. Một cái phểu có dạng hình nón, chiều cao của phểu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phểu sao cho chiều cao của cột nước trong phểu là $10cm$. Nếu bịt kím miêng phểu rồi lật ngược lên chiều cao của cột nước trong phểu gần nhất với giá trị nào sau đây.



A. $1,07cm$. **B.** $0,97cm$. **C.** $0,67cm$. **D.** $0,87cm$.

Lời giải

Chọn D

Gọi R là bán kính đáy của cái phểu ta có $\frac{R}{2}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi(R)^2.20-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.10=\frac{35}{6}\pi R^2$.

Khi lật ngược phểu Gọi h chiều cao của cột nước trong phểu.phần thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi(20-h)\left(\frac{R(20-h)}{20}\right)^2=\frac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2$.

$\frac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2=\frac{35}{6}\pi R^2\Rightarrow(20-h)^3=7000\Rightarrow h\approx 0,87$

Câu 24. Giả sử đồ thị hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A,B,C mà $x_A<x_B<x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây:

A. $(4;6)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

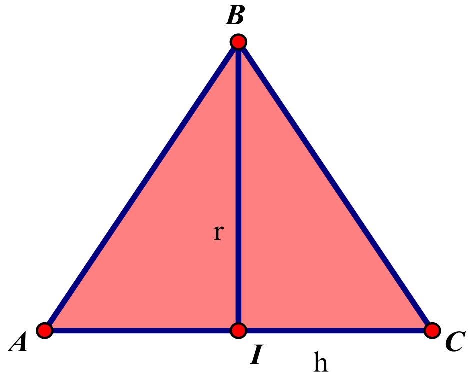
$y'=4(m^2+1)x^3-4mx=4x\left[(m^2+1)x^2-m\right]$

$+\ y'=0\Leftrightarrow 4x\left[(m^2+1)x^2-m\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}\ (m>0)\end{array}\right.$

+ Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A<x_B<x_C$) là:

$A(-\sqrt{\frac{m}{m^2+1}};-\frac{m^2}{m^2+1}+m^2+1)$; $B(0;m^2+1)$; $C(\sqrt{\frac{m}{m^2+1}};-\frac{m^2}{m^2+1}+m^2+1)$.

+ Quay ΔABC quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là:



$$V=2.\frac{1}{3}.\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi BI^2.IC=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^2.\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}}.$$

+ Xét hàm số $f(x)=\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}$

Có: $f'(x)=\dfrac{m^8(9-m^2)}{\left(m^2+1\right)^6}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow m=3\ (m>0)$.

Ta có BBT:

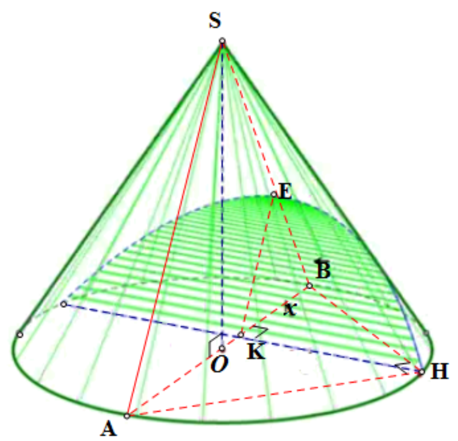
x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m=3$.

Câu 25. Khi cắt hình nón có chiều cao $16\ cm$ và đường kính đáy $24\ cm$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Lời giải



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB\perp KH$, trong tam giác SAB, $KE//SA, E\in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có: $\dfrac{KE}{SA} = \dfrac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \dfrac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \dfrac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \dfrac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \dfrac{16}{9}KH^2.KE^2 = \dfrac{16}{9}.x(24 - x).\dfrac{25x^2}{36} = \dfrac{100}{81}.(24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \dfrac{10}{9}.\sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	34992	$\searrow$	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\dfrac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207,8\ cm^2$

Câu 26. Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

A. $\dfrac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **<u>B</u>.** $\dfrac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Fb: Bi Trần

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $l = 2a$ có bán kính đáy là R và đường cao là h.

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$. Ta có: $R^2 + h^2 = 4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $4a^2 = R^2 + h^2 = \dfrac{R^2}{2} + \dfrac{R^2}{2} + h^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{R^4 h^2}{4}}$.

$\Rightarrow \dfrac{R^4 h^2}{4} \leq \dfrac{64}{27}a^6 \Rightarrow \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \leq \dfrac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{R^2}{2} = h^2 \\ h^2 + R^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a \\ R = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a \end{cases}$.

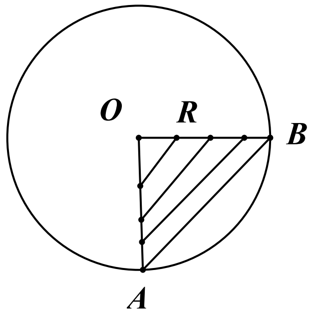
Khi đó $V_{\max} = \dfrac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

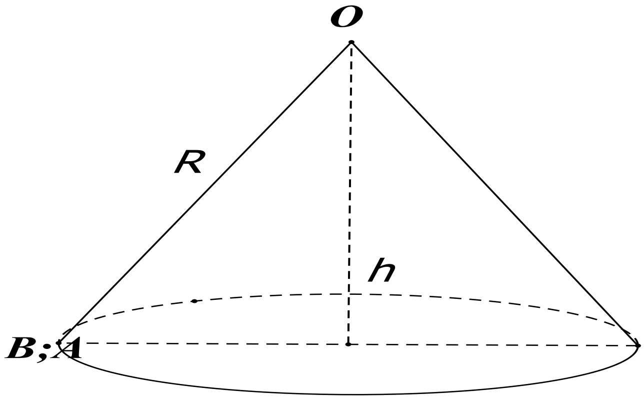
Câu 27. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Huyền có một tấm bìa như hình vẽ, Huyền muốn biến đường tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA, OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn A





Ta có diện tích của hình phểu $S_{xq}=\frac{R^2x}{2}\Rightarrow r=\frac{xR}{2\pi}$ là bán kính của đáy phểu; $\Rightarrow x=\frac{2\pi r}{R}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4.R^2-r^6}$ là thể tích của phểu

Xét hàm số phụ $y=r^4.R^2-r^6\Rightarrow y'=4r^3.R^2-6r^5$

$y'=0\Leftrightarrow 2.R^2-3r^2=0\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$

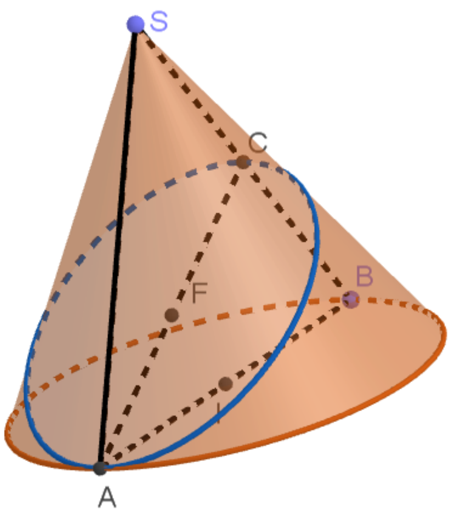
r	0		$\frac{R\sqrt{6}}{3}$		R
$y'(r)$		$+$	0	$-$	
$y(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy y max thì V và V max khi $r=\frac{R\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi r}{R}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi R\sqrt{6}}{3R}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$

Câu 28. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l=10m$, bán kính đáy $R=5m$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. $15m$. **B.** $10m$. **C.** $5\sqrt{3}m$. **D.** $5\sqrt{5}m$.

Lời giải



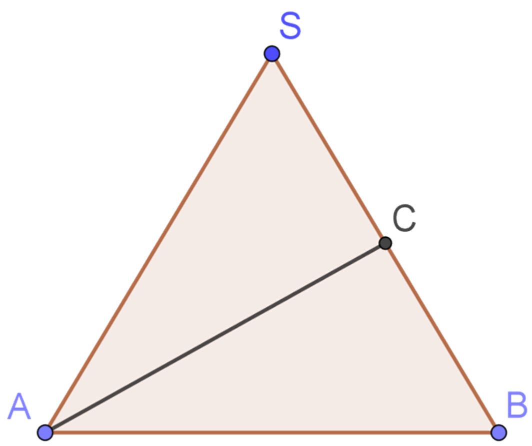
Ta có: ΔSAB cân và $SB = AB \Rightarrow \Delta SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = 50\pi\left(m^2\right)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện tử ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trải hình ra sẽ thấy ngay như sau



Hình trải dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R.\pi = 5\pi(m)$

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{\widehat{ASB}.\pi R_1^{\ 2}}{360} = 25\pi \Leftrightarrow \widehat{ASB} = \frac{360.25\pi}{\pi.10^2} = 90^0$$

Vậy ΔSAC vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}$.

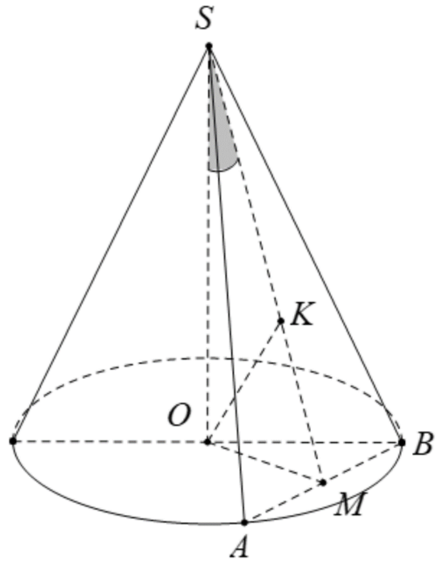
Câu 29. **(Sở Tuyên Quang - 2021)** Cho hình nón có chiều cao bằng 3. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, góc giữa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $45°$. Thể

tích của hình nón đã cho bằng

A. $5\sqrt{24}\pi$. **B.** 15π. **C.** 45π. **D.** $15\sqrt{25}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt phẳng (α) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Theo giả thiết thì tam

giác SAB đều. Gọi O là tâm của đường tròn đáy; h, r lần lượt là đường cao và bán kính của

hình nón.

Gọi M là trung điểm của AB, tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ suy ra $AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$ ($K \in SM$).

Theo trên ta có $AB \perp (SOM) \Rightarrow AB \perp OK \Rightarrow OK \perp (SAB)$.

Vậy góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSM} = 45°$.

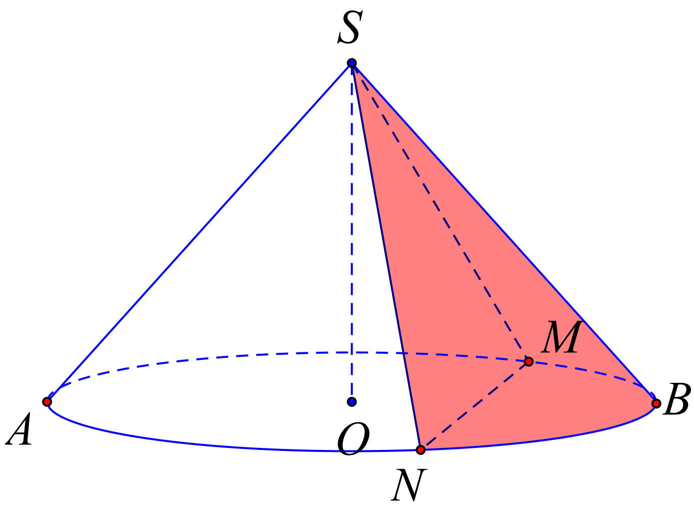
Xét tam giác vuông SOM có $\cos\widehat{OSM} = \dfrac{SO}{SM} \Rightarrow SM = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}, OM = SO\tan\cos\widehat{OSM} = 3$.

Do tam giác SAB đều nên $SM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{2SM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AM = \sqrt{6}$.

Xét tam giác vuông OAM có $r = OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{15}$. Suy ra thể tích của hình nón đã

cho là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.15.3 = 15\pi$.

Câu 30. Cổ động viên bóng đá của đội tuyển Indonesia muốn làm một chiếc mũ có dạng hình nón sơn hai màu Trắng và Đỏ như trên quốc kỳ. Biết thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân. Cổ động viên muốn sơn màu Đỏ ở bề mặt phần hình nón có đáy là cung nhỏ $\overset{\frown}{MBN}$, phần còn là của hình nón sơn màu Trắng. Tính tỉ số phần diện tích hình nón được sơn màu Đỏ với phần diện tích sơn màu Trắng.



A. $\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $SO = OA = OB = r \Rightarrow SM = r\sqrt{2} = MN$

Do đó tam giác OMN vuông cân tại O.

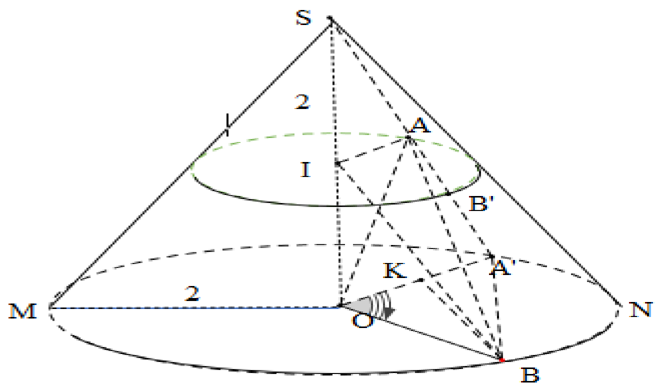
Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón, S_d là diện tích xung quanh của phần hình nón được sơn màu đỏ, ứng với góc $\widehat{MON} = 90^0$ nên $\frac{S_1}{S} = \frac{90^0}{360^0} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_d}{S_t} = \frac{1}{3}$.

Câu 31. **(Chuyên ĐHSP - 2021)** Cho hình nón (T) có đỉnh là S, có đáy là đường tròn (C_1) tâm O, bán kính bằng 2. Chiều cao hình nón (T) bằng 2. Khi cắt hình nón (T) bởi mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn SO và song song với đáy của hình nón, ta được đường tròn (C_2) tâm I. Lấy hai điểm A, B lần lượt trên hai đường tròn (C_2) và (C_1) sao cho góc giữa $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{OB}$ bằng $60°$. Thể tích khối tứ diện $IAOB$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



- Kẻ $OA' // IA$, $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}}\right) = \widehat{A'OB} = 60^0$.
- Gọi K là trung điểm của IA', khi đó $\begin{cases} BI \perp OA' \\ BI \perp IO \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SOA')$.

$\Rightarrow d\left(B,\left(SOA'\right)\right)=BK=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Ta có $IO\perp IA$, $IO=\dfrac{SO}{2}=1$, $IA=\dfrac{OA'}{2}=1$.

Nên $S_{IAO}=\dfrac{1}{2}IA.IO=\dfrac{1}{2}.1.1=\dfrac{1}{2}$.

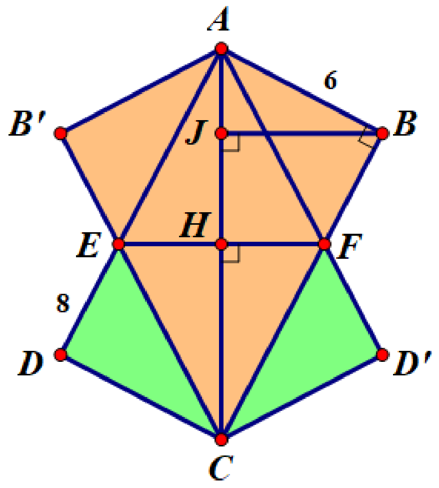
Vậy $V_{B.AIO}=\dfrac{1}{3}.S_{OIA}.BK=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 32. **(Chuyên Tuyên Quang - 2021)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=6$, $AD=8$. Thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AC bằng

A. $\dfrac{4271\pi}{80}$. **<u>B</u>.** $\dfrac{4269\pi}{40}$. **C.** $\dfrac{4271\pi}{40}$. **D.** $\dfrac{4269\pi}{80}$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>



Gọi J là hình chiếu vuông góc của B lên cạnh AC và B',D' lần lượt là điểm đối xứng của B,D qua AC. Gọi $E=B'C\cap AD$; $F=BC\cap AD'$ và $EF\cap AC=H$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$; $BJ=\dfrac{AB.BC}{AC}=\dfrac{24}{5}$;

$CJ=\sqrt{8^2-\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=\dfrac{32}{5}$; $HF=\dfrac{CH}{CJ}.JB=\dfrac{25}{32}.\dfrac{24}{5}=\dfrac{15}{4}$.

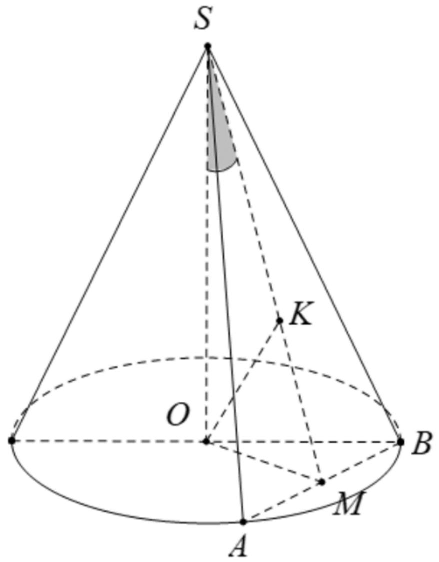
Thể tích khối tròn xoay cần tìm: $V=2.\dfrac{1}{3}\pi JB^2.AC-\dfrac{1}{3}\pi HF^2.AC=\dfrac{4269\pi}{40}$.

Câu 33. **(Cụm Trường Nghệ An - 2022)** Cắt hình nón $\left(N\right)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với trục của $\left(N\right)$ một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$.Chiều cao của hình nón bằng

<u>A</u>. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB và O là tâm của đường tròn đáy của hình nón, tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ suy ra $AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$ tại M.

Theo trên ta có: $\begin{cases} OK \perp AB \\ OK \perp SM \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SAB)$.

Suy ra góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSM} = 30°$.

Tam giác vuông cân SAB có diện tích bằng $4a^2$ suy ra $\frac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$ $\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SM = 2a$.

Xét tam giác vuông SOM có $\cos\widehat{OSM} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3}}{2}.2a = \sqrt{3}a$.

Vậy chiều cao của hình chóp bằng $a\sqrt{3}$.

Câu 34. **(Đại học Hồng Đức – 2022)** Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường cao là R và đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Gọi (d) là tiếp tuyến của đường tròn đáy tại A và (P) là mặt phẳng chứa SA và (d). Mặt phẳng (Q) thay đổi qua S cắt đường tròn O tại hai điểm C, D sao cho $CD = \sqrt{3}R$. Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Q). Tính giá trị lớn nhất của $\cos\alpha$.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

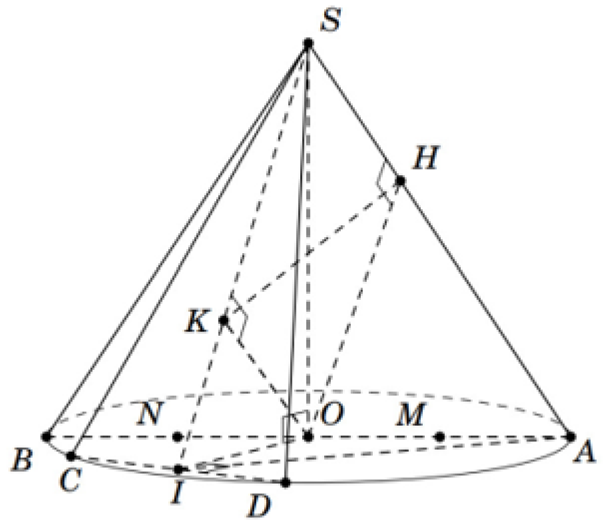
C. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm CD, khi đó $OI \perp CD$, hạ $OK \perp SI$ tại $K \Rightarrow OK \perp (Q)$.

$HaOH \perp SA \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow \alpha = (OH, OK)$



$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\dfrac{OK^2+OH^2-HK^2}{2OH\cdot OK}\right|$. Ta có $OI=\sqrt{OD^2-ID^2}=\dfrac{R}{2}, OK=\dfrac{OI\cdot OS}{\sqrt{OI^2+SO^2}}=\dfrac{R}{\sqrt{5}}; OH=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$HK^2=SK^2+SH^2-2SK\cdot SH\cos\widehat{ASI} \quad =SK^2+SH^2-2SK\cdot SH\cdot\dfrac{SI^2+SA^2-AI^2}{2SI\cdot SA}$.

$SA=\sqrt{2}R, SI=\dfrac{\sqrt{5}}{2}R, SH=\dfrac{SO^2}{SA}=\dfrac{R}{\sqrt{2}}, SK=\dfrac{SO^2}{SI}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}R$.

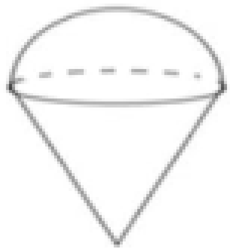
Gọi M và N lần lượt là trung điểm OA và OB khi đó
$AM\le AI\le AN$.
Suy ra

$$SK^2+SH^2-2SK\cdot SH\cdot\frac{SI^2+SA^2-AM^2}{2SI\cdot SA}\le HK^2\le SK^2+SH^2-2SK\cdot SH\cdot\frac{SI^2+SA^2-AN^2}{2SI\cdot SA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}R^2\le HK^2\le\frac{9}{10}R^2\Rightarrow -\frac{\sqrt{10}}{10}\le\frac{OK^2+OH^2-HK^2}{2OH\cdot OK}\le\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\le\max\left\{\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{3\sqrt{10}}{10}\right\}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Câu 35. **(THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022)** Một chiếc kem Ốc quế gồm 2 phần, phần dưới là một khối nón có chiều cao bằng ba lần đường kính đáy, phần trên là nửa khối cầu có đường kính bằng đường kính khối nón bên dưới (như hình vẽ). Thể tích phần kem phía trên bằng $50\,\text{cm}^3$. Thể tích của cả chiếc kem bằng



A. $200\,\text{cm}^3$. **B.** $150\,\text{cm}^3$. **C.** $125\,\text{cm}^3$. **D.** $500\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính của khối cầu là $R\ (R>0)$. Theo bài ra ta có:

$V_1=\dfrac{1}{2}V_C=50\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}\pi R^3=100\Leftrightarrow R^3=\dfrac{75}{\pi}$.

Do đó, khối nón phía dưới có bán kính R; $h=3.2R=6R$.

Thể tích của khối nón bằng: $V_2=\dfrac{1}{3}\pi R^2.h=\dfrac{1}{3}\pi R^2.6R=2\pi.R^3=2\pi.\dfrac{75}{\pi}=150\ (\text{cm}^3)$.

Vậy thể tích của cả chiếc kem bằng: $V = V_1 + V_2 = 50 + 150 = 200\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 36. **(Liên trường Hà Tĩnh – 2022)** Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

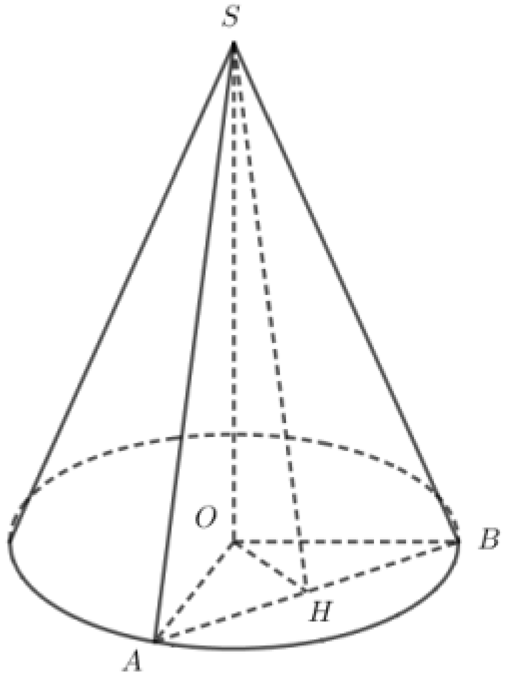
B. 32π.

C. $32\sqrt{5}\pi$.

D. $\dfrac{18\sqrt{5}\pi}{3}$.

Lời giải

Theo giả thiết tam giác SAB đều, $S_{\Delta SAB} = 9\sqrt{3}$ và $SO = 2\sqrt{5}$.



$S_{\Delta SAB} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 6.$

ΔSAB đều $SA = AB = 6$.

Xét ΔSOA vuông tại O, $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4.$

Thể tích hình nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi 4^2 \cdot 2\sqrt{5} = \dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$.

Câu 37. **(THPT Nho Quan A – Ninh Bình – 2022)** Cho hình nón đỉnh S có đường cao $h = a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh S, cắt đường tròn đáy tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8a$ và tạo với mặt đáy một góc $30°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

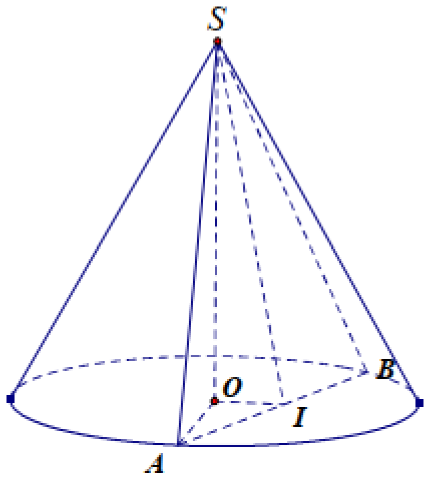
A. $\dfrac{10\sqrt{7}\pi}{3}a^2$.

B. $20\sqrt{7}\pi a^2$.

C. $10\sqrt{7}\pi a^2$

D. $5\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn đáy, I là trung điểm AB. Khi đó, góc giữa mặt phẳng (α) và mặt đáy là $\widehat{SIO} = 30°$.

Trong tam giác SOI, ta có $OI = \dfrac{SO}{\tan \widehat{SIO}} = 3a$.

Trong tam giác AIO, ta có $OA^2 = OI^2 + AI^2 = 9a^2 + 16a^2 = 5a$

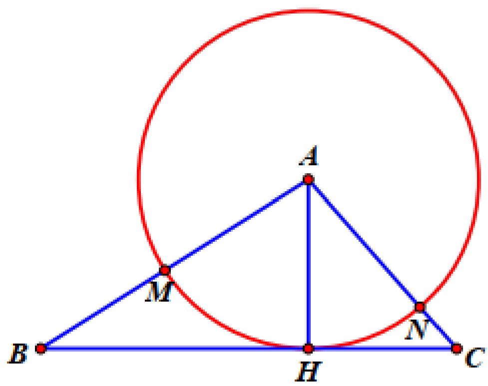
$\Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{3a^2 + 25a^2} = 2\sqrt{7}a$.

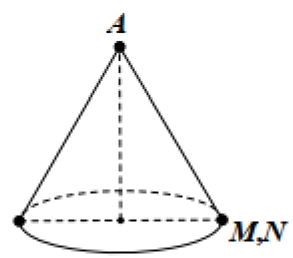
Vậy $S_{xq} = \pi \cdot OASA = 10\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 38. **(THPT Phù Cừ - Hưng Yên - 2022)** Một tấm tôn hình tam giác ABC có độ dài cạnh $AB = 3; AC = 2; BC = \sqrt{19}$. Điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Người ta dùng compa có tâm là A, bán kính AH vạch một cung tròn MN. Lấy phần hình quạt gỏ thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là A, cung MN thành đường tròn đáy của hình nón (nhuc hình vẽ). Tính thể tich khối nón trên.

A. $\dfrac{2\pi\sqrt{114}}{361}$. **B.** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{19}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{57}}{361}$. **D.** $\dfrac{2\pi\sqrt{19}}{361}$.

Lời giải





Theo định lý côsin trong tam giác ABC ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$ hay $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Suy ra diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{3\sqrt{57}}{19}$.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón. Suy ra $2\pi r = \dfrac{2\pi}{3} AH \Rightarrow r = \dfrac{AH}{3} = \dfrac{\sqrt{57}}{19}$.

Chiều cao của khối nón bằng $h=\sqrt{AH^2-r^2}=\dfrac{2\sqrt{114}}{19}$.

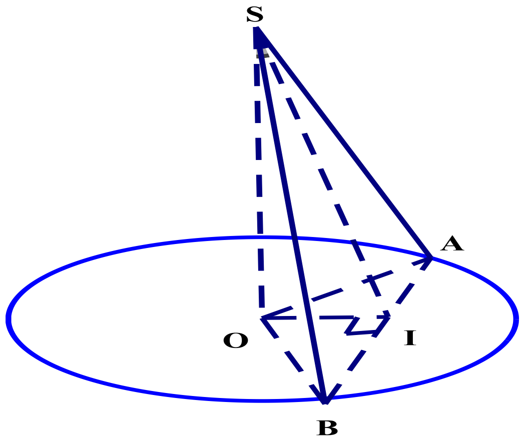
Thể tích bằng $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{57}}{19}\right)^2\cdot\dfrac{2\sqrt{114}}{19}=\dfrac{2\pi\sqrt{114}}{361}$.

Câu 39. **(Sở Hà Tĩnh 2022)** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh (S) và tạo bởi với trục của (N) một góc bằng $30°$ ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng:

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi đường sinh $SB=x(x>0)$. Vì tam giác SAB là tam giác vuông nên $AB=x\sqrt{2}$.

$\Rightarrow SI=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$. Theo đề bài tam giác SAB vuông và có diện tích $4a^2$ nên:

$S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}SI.AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{x\sqrt{2}}{2}.x\sqrt{2}=4a^2\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}a\Rightarrow SI=2a$

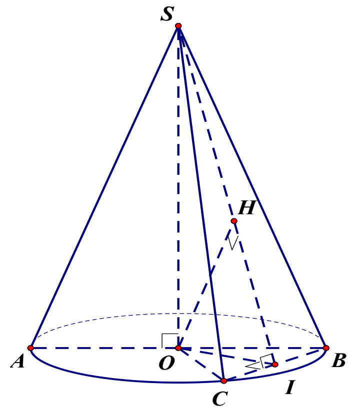
Ta có $\widehat{IOS}=30°\Rightarrow cos\,\widehat{IOS}=\dfrac{SO}{SI}\Rightarrow SO=SI.cos\,\widehat{IOS}=2a\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Câu 40. **(Sở Phú Thọ 2022)** Cho hình nón $(\aleph)$ có chiều cao bằng $2a$. Cắt $(\aleph)$ bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng a ta được thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{4a^2\sqrt{11}}{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{10\pi a^3}{3}$. **B.** $10\pi a^3$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{5}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng mặt phẳng qua đỉnh (SBC) của hình nón, gọi I là trung điểm của BC.

Theo giả thiết: $SO = 2a$; $S_{\Delta SBC} = \dfrac{4a^2\sqrt{11}}{3}$; $OH = d\left(O,(SBC)\right) = a$.

Trong ΔSOI vuông tại O có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SI.BC \Rightarrow BC = \dfrac{2S}{SI} = \dfrac{2a\sqrt{33}}{3} \Rightarrow IC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Trong ΔOIC vuông tại I có: $OC = \sqrt{OI^2 + IC^2} = a\sqrt{5}$.

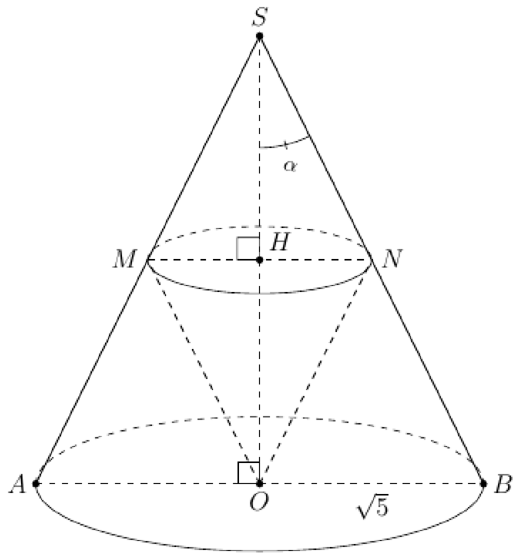
Vậy thể tích của khối nón đã cho là: $V = \dfrac{1}{3}\pi SO.OC^2 = \dfrac{10\pi a^3}{3}$.

Câu 41. **(Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$ và góc ở đỉnh là 2α với $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo một đường tròn tâm H. Gọi V là thể tích của khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H. Biết $V = \dfrac{50\pi}{81}$ khi $SH = \dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a^2 - 2b^3$.

A. 12. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C



Trong ΔSOB vuông tại O ta có $\widehat{OSB} = \alpha$ với $\sin\alpha = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{HN}{SH} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow HN = \dfrac{2.SH}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $\sin\alpha = \dfrac{HN}{SN} = \dfrac{OB}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{OB}{\sin\alpha} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$;

Trong ΔSOB vuông tại O ta có $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\dfrac{45}{4} - 5} = \dfrac{5}{2}$.

Theo bài ta có thể tích khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H là

$V = \dfrac{50\pi}{81} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}.OH.\pi.HN^2 = \dfrac{50\pi}{81} \Leftrightarrow OH.HN^2 = \dfrac{50}{27} \Leftrightarrow (SO - SH).\dfrac{4SH^2}{5} = \dfrac{50}{27}$

$\Leftrightarrow (5 - 2.SH)SH^2 = \dfrac{125}{27} \Leftrightarrow 54SH^3 - 135SH^2 + 125 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} SH = \dfrac{5}{3} \\ SH = -\dfrac{5}{6}\ (loai) \end{array}\right.$.

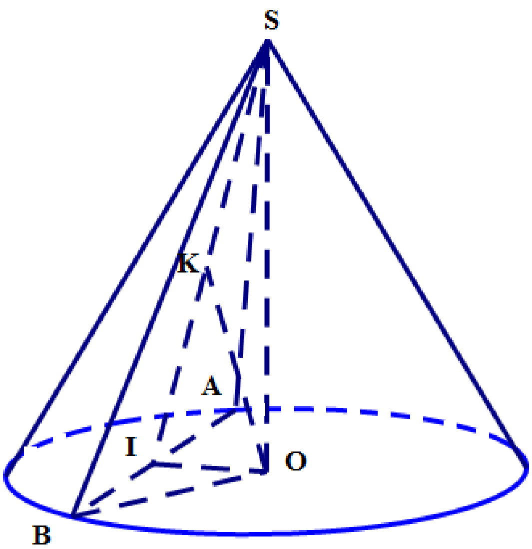
Suy ra $a = 5; b = 3$. Vậy $T = 3a^2 - 2b^3 = 3.25 - 2.27 = 21$.

Câu 42. **(Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S của hình nón cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm đoạn AB dễ thấy OI là đường trung tuyến của tam giác OAB.

Dựng $OK \perp SI$ tại K.

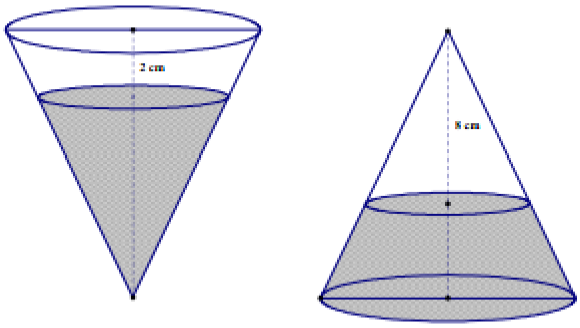
Ta có $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow OK \perp (SAB)$.

Ta có $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OI = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó $d(O;(P)) = OK \Rightarrow \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OK^2} - \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{16}{2a^2} - \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.a^2.\dfrac{a}{2} = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 43. **(Chuyên Lam Sơn 2022)** Một cái bình thủy tinh có phần không gian bên trong là một hình nón có đỉnh hướng xuống dưới theo chiều thẳng đứng. Rót nước vào bình cho đến khi phần không gian trống trong bình có chiều cao $2cm$. Sau đó đậy kín miệng bình bởi một cái nắp phẳng và lật ngược bình để đỉnh hướng lên trên theo chiều thẳng đứng, khi đó mực nước cao cách đỉnh của nón $8\,cm$ (hình vẽ minh họa bên dưới).



Biết chiều cao của nón là $h = a + \sqrt{b}\,cm$. Tính $T = a + b$.

A. 22.

B. 58.

C. 86.

D. 72.

Lời giải

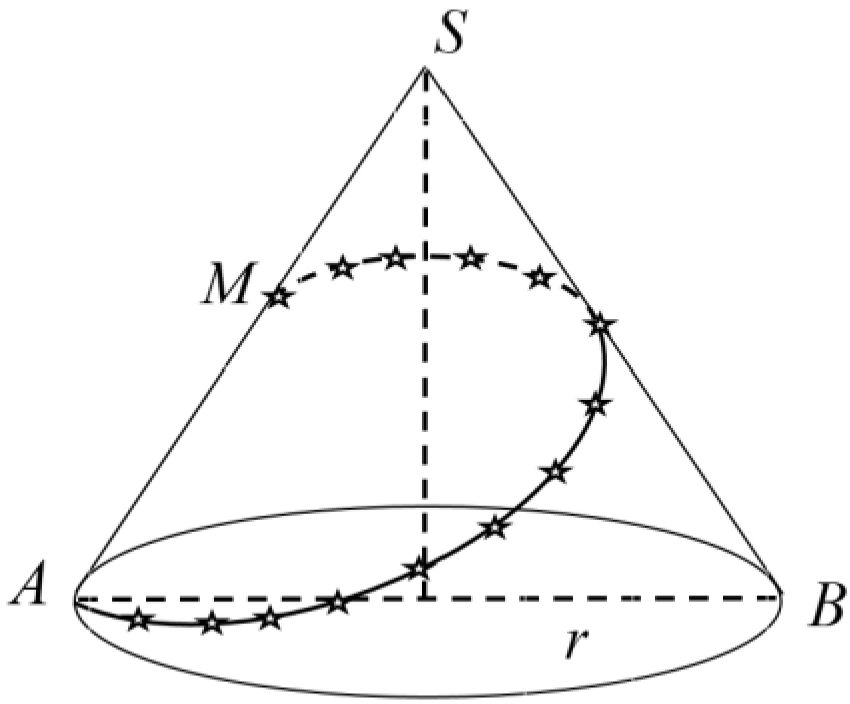
Để ý rằng có 3 hình nón đồng dạng: Phần không gian bên trong bình thủy tinh (có thể tích V), phần không chứa nước khi đặt bình có đỉnh hướng lên (có thể tích V_1), phần chứa nước khi đặt bình có đỉnh hướng xuống (có thể tích V_2). Do tỷ số đồng dạng bằng với tỷ số của chiều cao và tỷ số thể tích là lập phương tỷ số đồng dạng nên ta có $\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{8^3}; \frac{V}{V_2} = \frac{h^3}{(h-2)^3} \Rightarrow V_1 = \frac{512V}{h^3}; V_2 = \frac{(h-2)^3 V}{h^3}$.

Mà $V_1 + V_2 = V$ nên ta có:

$$\frac{512V}{h^3} + \frac{(h-2)^3 V}{h^3} = V \Rightarrow 512 + h^3 - 6h^2 + 12h - 8 = h^3 \Leftrightarrow h^2 - 2h - 84 = 0 \Rightarrow h = 1 + \sqrt{85}$$

Vậy $T = 86$

Câu 44. **(Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – 2022)** Nhân dịp năm mới để trang trí một cây thông Noel, ở sân trung tâm có hình nón (N) như hình vẽ sau. Người ta cuộn quanh cây bằng một sợi dây đèn LED nhấp nháy, bóng đèn hình hoa tuyết từ điểm A đến điểm M sao cho sợi dây luôn tựa trên mặt nón. Biết rằng bán kính đáy hình nón bằng $8m$, độ dài đường sinh bằng $24m$ và M là điểm sao cho $2\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$. Hãy tính chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có.



A. $8\sqrt{19}(m)$.

B. $8\sqrt{13}(m)$.

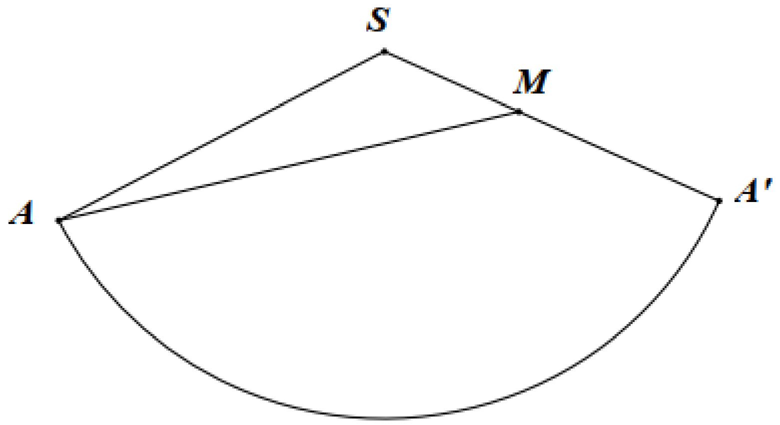
C. $8\sqrt{7}(m)$.

D. $9\sqrt{12}(m)$.

Lời giải

Ta có: $2\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}\Rightarrow SM=\frac{1}{3}SA=8(m)$.

Trải hình nón ra như hình bên dưới



Khi đó chu vi đáy của hình nón cũng là độ dài cung AA' suy ra $2\pi R=16\pi(m)=l_{AA'}$.

Góc $\alpha=ASA'=\frac{l_{AA'}}{SA}=\frac{16\pi}{24}=\frac{2\pi}{3}$

Chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có là đoạn thẳng

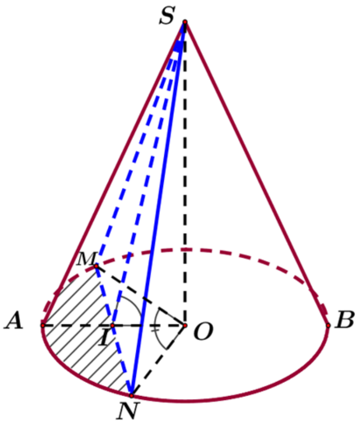
$$AM=\sqrt{SA^2+SM^2-2SA\cdot SM\cdot\cos\alpha}=\sqrt{24^2+8^2-2\cdot 24\cdot 8\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}=8\sqrt{13}(m).$$

Câu 45. **(THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022)** Một khối nón có bán kính đáy bằng 2 cm, chiều cao bằng $\sqrt{3}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$ chia khối nón làm 2 phần. Tính thể tích phần nhỏ hơn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $2,47\text{ cm}^3$. **B.** $2,36\text{ cm}^3$. **C.** $1,42\text{ cm}^3$. **D.** $1,53\text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (SMN) qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} SI \perp MN \\ OI \perp MN \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{SIO} = 60°$ là góc giữa (SMN) và đáy.

$OI = \dfrac{SO}{\tan 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}OA \Rightarrow OMAN$ là hình bình hành, có 2 đường chéo $OA \perp MN$

Nên tứ giác $OMAN$ là hình thoi, có $NA = NO = OA = 2 \Rightarrow \widehat{ANO} = 60° \Rightarrow \widehat{MON} = 120°$.

$S_{\text{qu't OMN}} = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°} = \dfrac{\pi.2^2.120°}{360°} = \dfrac{4\pi}{3}$

$S_{\Delta OMN} = \dfrac{1}{2}OM.ON.\sin 120° = \dfrac{1}{2}2.2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Nên $S_{\overset{\frown}{MAN}} = S_{\text{qu't } OMN} - S_{\Delta OMN} = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

Thể tích khối nhỏ cần tính: $V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{\overset{\frown}{MAN}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{3}.\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \simeq 1,42 \text{ cm}^3$.

Câu 46. **(THPT Yên Phong 1 - Bắc Ninh - 2022)** Cho hình nón đỉnh S tâm O có độ dài đường sinh bằng $SA = a$, đường kính đáy AB. Thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc $60°$ cắt đường tròn đáy theo dây cung $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Biết rằng khoảng cách từ A đến MN bằng a. Thể tích khối nón bằng:

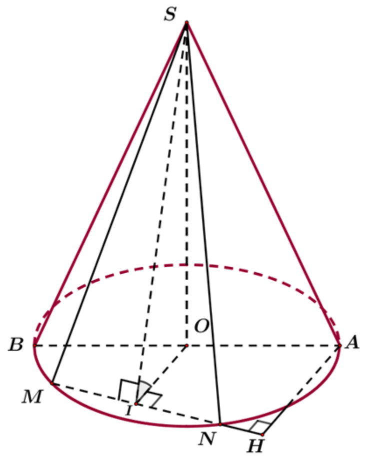
A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}\pi}{18}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Biết rằng khoảng cách từ A đến MN bằng $a \Rightarrow MN$ không vuông góc với AB.

Ta có hình vẽ sau:



Gọi I là trung điểm MN thì $SI \perp MN, OI \perp MN \Rightarrow \widehat{SIO} = 60^\circ$ là góc giữa (SMN) và mặt phẳng đáy.

$MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IM = IN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔOIN vuông ở I có: $OI^2 = ON^2 - IN^2 = R^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{3}}$.

Xét ΔSIM vuông ở I có: $SI^2 = SM^2 - MI^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

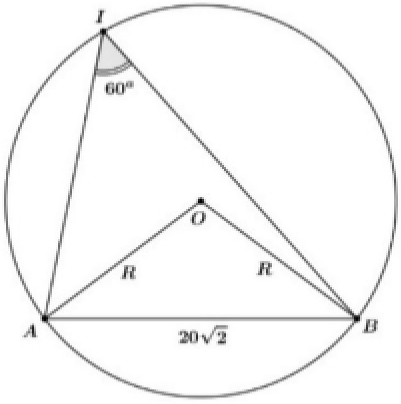
Xét ΔSIO vuông ở O có: $\cos 60^\circ = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{3}}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3R^2 - a^2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

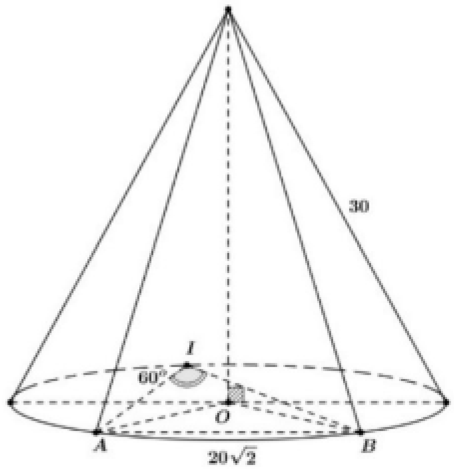
$\Leftrightarrow 4\left(3R^2 - a^2\right) = 2a^2 \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 60^\circ = \dfrac{SO}{SI} \Rightarrow SO = SI.\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot SO.\left(\pi R^2\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \pi \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$.

Câu 47. **(Chuyên Sơn La 2022)** Bà Hương nhận làm 100 chiếc nón lá giống nhau có độ dài đường sinh là 30 cm. Ở phần mặt trước của mỗi chiếc nón (từ A đến B như hình vẽ) bà Hương thuê người sơn và vẽ hình trang trí. Biết $AB = 20\sqrt{2}\,cm$ và giá tiền công để sơn trang trí $1m^2$ là 50000 đồng. Tính số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà bà Hương phải thuê sơn trang trí cho cả đợt làm nón



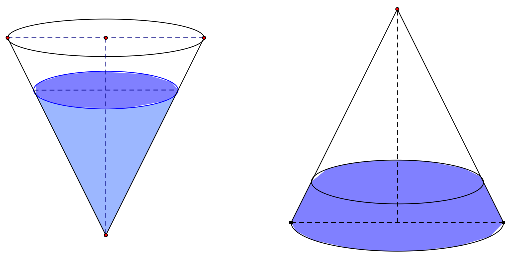


A. 128.000 đồng
B. 257.000 đồng
C. 384.000 đồng
D. 209.000 đồng

Lời giải

Đầu tiên theo tính chất góc ở tâm bằng hai lần góc nội tiếp chắn cung tương ứng nên ta suy ra: $\widehat{AOB}=2\widehat{AIB}=120°$. Sử dụng đính li Cosin ta có: $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos 120° \Leftrightarrow 3R^2=(20\sqrt{2})^2$. Từ đó suy ra $R=\dfrac{20\sqrt{6}}{3}(cm)$. Tiếp theo, ta gọi đỉnh của hình nón là S, sau đó ta trải phẳng mặt xung quanh của nón ra, khi ấy diện tích mặt cần sơn và trang trí chính là phần hình quạt SAB. Ta có độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ là $l=\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{20\sqrt{6}}{3}=\dfrac{40\pi\sqrt{6}}{9}(cm)$. Từ đó ta tính được diện tích hình quạt SAB là: $S=\dfrac{l\cdot SA}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 30\cdot\dfrac{40\pi\sqrt{6}}{9}=\dfrac{1200\pi\sqrt{6}}{18}\left(cm^2\right)=\dfrac{1200\pi\sqrt{6}}{18}\cdot 10^{-4}\left(m^2\right)$. Mà giá tiền công để sơn trang trí $1m^2$ là 50000 đồng nên giá tiền công sơn 100 cái nón là: $\dfrac{1200\pi\sqrt{6}}{18}\cdot 10^{-4}\cdot 50.000.100=256.509$ (đồng). Như vậy tổng tiền này gần với đáp án B nhất.

Câu 48. (Sở Hải Dương 2022) Một cốc thủy tinh hình nón có chiều cao $20cm$. Người ta đổ vào cốc thủy tinh một lượng nước, sao cho chiều cao của lượng nước trong cốc bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao cốc thủy tinh, sau đó người ta bịt kín miệng cốc, rồi lật úp cốc xuống như hình vẽ thì chiều cao của nước lúc này là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)?



A. $3,34\,cm$ **B.** $2,21\,cm$ **C.** $5,09\,cm$ **D.** $4,27\,cm$

Lời giải

Chọn A

Gọi R là bán kính đáy của cái phễu ta có $\dfrac{3R}{4}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\dfrac{1}{3}\pi(R)^2.20-\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{3R}{4}\right)^2.\dfrac{3}{4}.20=\dfrac{185}{48}\pi R^2$.

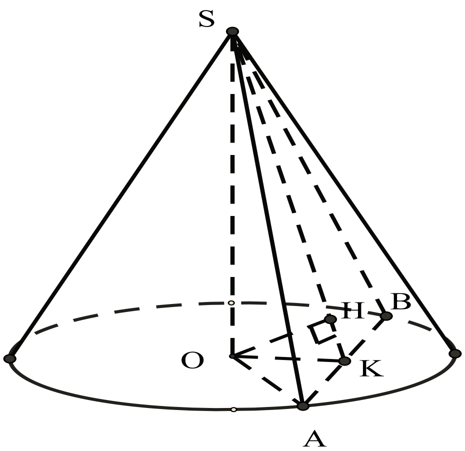
Khi lật ngược phểu Gọi h chiều cao của cột nước trong phểu.phần thể tích phần nón không chứa nước là: $V=\frac{1}{3}\pi\left(20-h\right)\left(\frac{R\left(20-h\right)}{20}\right)^2=\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2$

Mà: $\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2=\frac{185}{48}\pi R^2\Rightarrow\left(20-h\right)^3=4625\Rightarrow h\approx 3,34$.

Câu 49. **(Chuyên Hà Tĩnh 2022)** Cho khối nón đỉnh S có đường cao bằng $3a$. SA,SB là hai đường sinh của khối nón. Khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng a và diện tích tam giác SAB bằng $3a^2$. Tính thể tích khối nón.

A. $\frac{145\pi a^3}{48}$. **B.** $\frac{145\pi a^3}{72}$. **C.** $\frac{145\pi a^3}{54}$. **D.** $\frac{145\pi a^3}{36}$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của AB và H là hình chiếu của O lên SK

Ta có: $\begin{cases} OK\perp AB \\ SO\perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow AB\perp(SOK)$

Mặt khác $\begin{cases} OH\perp SK \\ OH\perp AB \text{ (do } AB\perp(SOK)) \end{cases}$

$\Rightarrow OH\perp(SAB)$ tại H

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(O,\left(SAB\right)\right)=OH=a$

Xét tam giác SOK vuông tại O, ta có:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}\Rightarrow\frac{1}{a^2}=\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{OK^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{OK^2}=\frac{8}{9a^2}\Rightarrow OK=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{9a^2+\frac{9a^2}{8}}=\frac{9a\sqrt{2}}{4}$

$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SK.AB=3a^2$

$\Rightarrow AB=\frac{6a^2}{SK}=\frac{6a^2}{\frac{9a\sqrt{2}}{4}}=\frac{4a\sqrt{2}}{3}$

$AK=\frac{1}{2}AB=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow OA=\sqrt{OK^2+KA^2}=\sqrt{\frac{8a^2}{9}+\frac{9a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{290}}{12}$

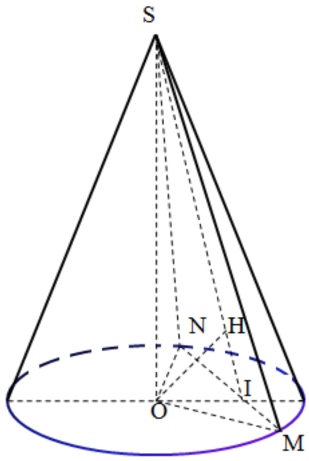
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{290}a}{12}\right)^2 .3a = \frac{145}{72}\pi a^3$$

Câu 50. (Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội 2022) Cho khối nón có bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$. Gọi M, N là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $MN = 2a$. Biết thể tích của khối nón là $\sqrt{2}\pi a^3$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SMN) là

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi r, h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và đường cao của khối nón.

Theo giả thiết ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \pi a^2 h = \sqrt{2}\pi a^3 \Rightarrow SO = h = \sqrt{2}a$.

Gọi I là trung điểm của MN. O là tâm của đường tròn đáy.

ΔOMN cân tại O, I là trung điểm của MN nên $OI \perp MN \Rightarrow OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = a\sqrt{2}$.

Khi đó, ta có $IO \perp MN$, $SO \perp MN \Rightarrow MN \perp (SIO)$.

Kẻ $OH \perp SI$ tại H, có $MN \perp (SIO) \Rightarrow MN \perp OH$ mà $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SMN)$ tại H.

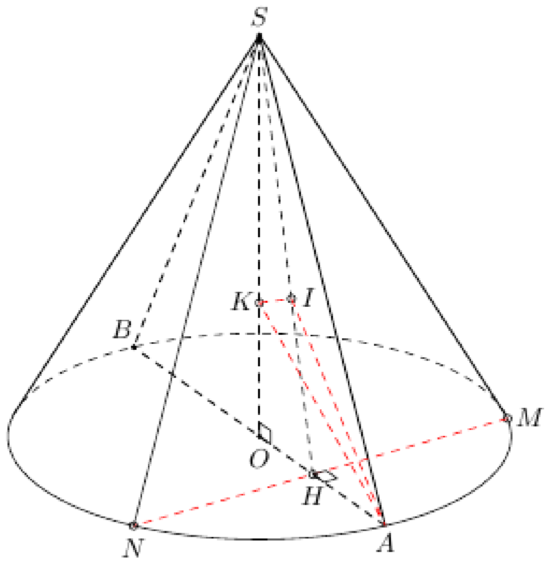
$$\Rightarrow d(O,(SMN)) = OH = \frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = a.$$

Câu 51. (Chuyên Quốc Học Huế 2022) Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh bằng 60^0 và có độ dài đường sinh $l = 12$ cm. Gọi AB là một đường kính cố định của đáy hình nón, MN là một dây cung thay đổi của đường tròn đáy và luôn vuông góc với AB. Biết rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SMN luôn thuộc một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn (C).

A. $6\sqrt{2}$ cm. **B.** $2\sqrt{3}$ cm. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Góc ở đỉnh của hình nón bằng 60^0 nên $\widehat{ASB} = 60^0$.

Suy ra, tam giác SAB đều có cạnh bằng $l = 12$ cm.

Gọi K, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và SMN.

Khi đó, K là trọng tâm của tam giác $SAB \Rightarrow KS = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3}.\frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

Mặt khác, $\Delta KOA = \Delta KOM = \Delta KON \Rightarrow KA = KM = KN$. Mà $KA = KS$ nên $KM = KN = KS \Rightarrow KI$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN

$\Rightarrow KI \perp (SMN) \Rightarrow KI \perp IS \Rightarrow I$ thuộc mặt cầu (S) đường kính KS cố định. (1)

Gọi H là giao điểm của MN và AB. Dễ thấy, $I \in SH$ nên $I \in (SAB)$ cố định. (2)

Từ (1) và (2), suy ra I thuộc đường tròn (C) là giao tuyến của (S) và mặt phẳng (SAB).

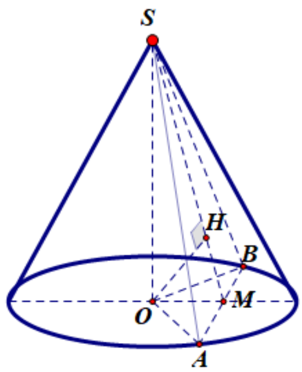
Bán kính của đường tròn (C) là $R = \frac{1}{2}KS = 2\sqrt{3}$ cm.

Câu 52. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022)** Cho hình nón có thiết diện qua đỉnh S là một tam giác đều tạo với đường cao một góc $30°$. Khối nón có thể tích bằng 7π. Diện tích xung quanh của khối nón là

A. $S = 4\sqrt{7}\pi$. **B.** $S = 2\sqrt{7}\pi$. **C.** $S = 14\pi$. **D.** $S = 4\sqrt{13}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử thiết diện qua đỉnh là ΔSAB. Suy ra $\left(\widehat{SO,(SAB)}\right) = \widehat{OSM} = 30°$.

Đặt $SA = x, (x > 0)$. Mà ΔSAB đều $\Rightarrow SM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{x^2 - R^2} \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - R^2}$ (với $SO = h > 0$)

Xét ΔSOM vuông tại O có $\cos\widehat{SMO}=\dfrac{SO}{SM}$ $\Leftrightarrow \cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{x^2-R^2}}{\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow 3x=4\sqrt{x^2-R^2}$.

$\Leftrightarrow 9x^2=16\left(x^2-R^2\right)\Leftrightarrow 7x^2=16R^2\Leftrightarrow x^2=\dfrac{16R^2}{7}\Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{7}R}{7}$ $\Rightarrow h=\dfrac{3\sqrt{7}R}{7}$

Có $V_N=7\pi$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi R^2h=7\pi\Leftrightarrow R^2h=21\Leftrightarrow R^2.\dfrac{3\sqrt{7}R}{7}=21\Leftrightarrow R=\sqrt{7}\Rightarrow SA=x=4$.

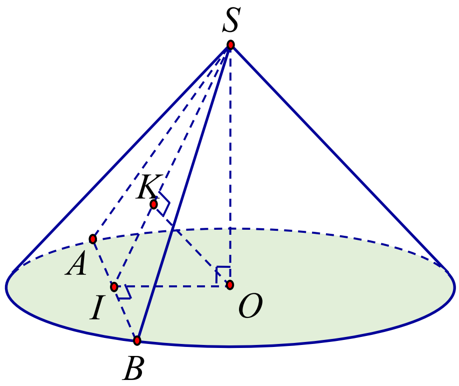
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.\sqrt{7}.4=4\sqrt{7}\pi$.

Câu 53. **(Liên trường Quảng Nam 2022)** Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông cân và khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) là $3a$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $96\pi a^3$. **B.** $108\pi a^3$. **C.** $120\pi a^3$. **D.** $150\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông cân SAB.

Gọi I là trung điểm của AB, O là tâm của đường tròn đáy của hình nón.

Kẻ $OK\perp SI$ tại K.

Ta có $d\left(O,(SAB)\right)=OK=3a$; $SO=6a$, suy ra $IO=\sqrt{\dfrac{OK^2.SO^2}{SO^2-OK^2}}=2\sqrt{3}a$.

$SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=4\sqrt{3}a.$

$IA=\dfrac{AB}{2}=SI=4\sqrt{3}a$ (Do tam giác SAB vuông tại S).

$R=\sqrt{IA^2+IO^2}=2\sqrt{15}a.$

Thể tích của khối nón cần tìm là

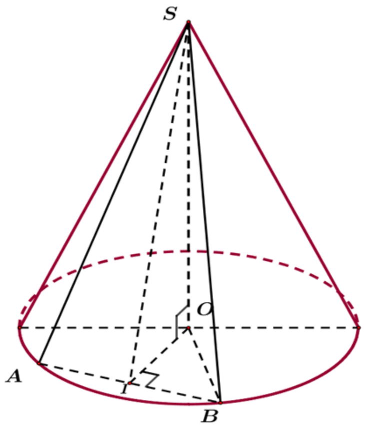
$V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}.\pi.\left(2\sqrt{15}a\right)^2.6a=120\pi a^3.$

Câu 54. **(Sở Hà Nam 2022)** Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng 120°. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $2\pi\sqrt{3}$. **B.** $27\pi\sqrt{3}$. **C.** $9\pi\sqrt{3}$. **D.** $18\pi\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB khi đó $OI \perp AB$.

Mà SO vuông góc với đáy $\Rightarrow SO \perp OI$ nên $d\left(SO, AB\right) = OI = 3$.

Gọi bán kính của đường tròn đáy là $r \Rightarrow OB = r$.

Vì góc ở đỉnh bằng $120° \Rightarrow \widehat{OSB} = 60° \Rightarrow \sin\widehat{OSB} = \dfrac{OB}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{r}{\sin 60°} = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔOIB vuông tại I: $IB^2 = OI^2 + OB^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow IB = \sqrt{3^2 + r^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3^2 + r^2}$.

Xét ΔSAB vuông cận tại S:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3^2 + r^2}\right)^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = 27 \Leftrightarrow r = 3\sqrt{3}.$$

$$l = SB = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 6.$$

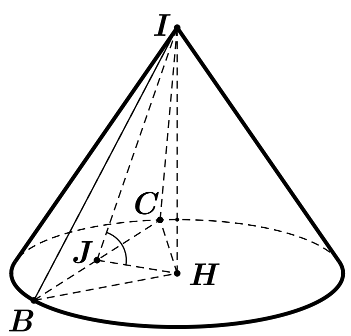
Diện tích xung quanh của hình nón: $S = \pi r l = \pi 3\sqrt{3}.6 = 18\pi\sqrt{3}$.

Câu 55. **(Sở Hưng Yên 2022)** Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy sao cho mặt phẳng $\left(IBC\right)$ tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **B.** $S = \dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $r,\ h,\ l$ lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của hình nón đã cho.

Vì cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên $\begin{cases} 2r = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ l = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a \end{cases} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là tâm của đường tròn đáy và J là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp IH \\ BC \perp HJ \end{cases} \Rightarrow BC \perp (IHJ)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (IBC) với mặt phẳng chứa đáy hình nón là góc $\widehat{IJH} = 60°$

Ta có $JI = \dfrac{IH}{\sin 60°} = \dfrac{h}{\sin 60°} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow BJ = \sqrt{l^2 - JI^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = 2BJ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

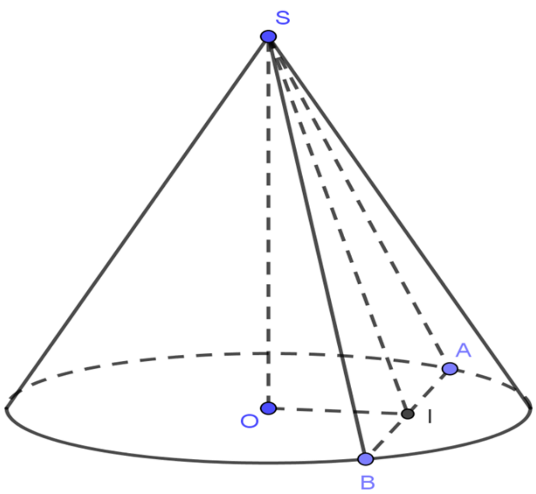
Vậy $S = \dfrac{1}{2}.JI.BC = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$.

Câu 56. **(THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022)** Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi bán kính hình nón là $OA = OB = r \ (r > 0)$.

Gọi I là trung điểm của AB thì khoảng cách giữa AB và SO là $OI = 3$.

Tam giác OIA vuông tại I nên $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{r^2 - 9}$. Suy ra $AB = 2AI = 2\sqrt{r^2 - 9}$.

Góc ở đỉnh hình nón bằng $120°$ nên $\widehat{ASO} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

Tam giác SAO vuông tại O nên $\sin \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{OA}{\sin \widehat{ASO}} = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Hai đường sinh có độ dài bằng nhau nên $SA = SB = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Tam giác SAB vuông nên $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow \dfrac{4r^2}{3} + \dfrac{4r^2}{3} = 4(r^2 - 9) \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$.

Suy ra độ dài đường sinh $l = SA = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 6$.

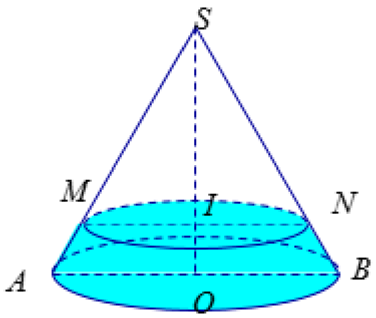
Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi.3\sqrt{3}.6 = 18\pi\sqrt{3}$.

Câu 57. **(THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi - 2022)** Cho một hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $4a$, bán kính đáy bằng $2a$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng vuông góc với trục ta được một hình nón (N) đỉnh S có đường sinh bằng a. Tính thể tích của khối nón (N).

A. $\frac{2\sqrt{5}\pi a^3}{75}$. **B.** $\frac{13\pi a^3}{125}$. **C.** $\frac{13\pi a^3}{375}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}\pi a^3}{125}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có bán kính hình nón ban đầu bằng $OB = 2a$, $SO = 4a$ do đó độ dài đường sinh

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = 2a\sqrt{5}$.

Ta có độ dài đường sinh hình nón (N) là $SN = a$

Các tam giác SIN và tam giác SOB đồng dạng nên ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{IN}{OB} = \frac{SN}{SB} = \frac{a}{2a\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

Suy ra $SI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $IN = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

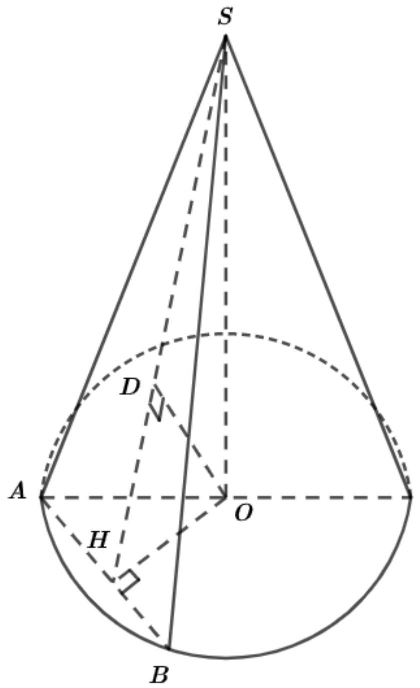
Thể tích khối nón (N) bằng $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi a^3\sqrt{5}}{75}$.

Câu 58. **(THPT Ngũ Hành Sơn - Đà Nẵng 2022)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA, SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích là $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $h = a\sqrt{3}$. **C.** $h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $h = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $OH \perp AB$ $(H \in AB)$ suy ra H là trung điểm của AB.

Kẻ $OD \perp SH$ $(D \in SH)$. Suy ra $OD \perp (SAB)$.

Khi đó $\left(\widehat{OS,(SAB)}\right) = \left(\widehat{OS,DS}\right) = \widehat{OSD}$.

Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{DSO} = 30°$.

Ta có tam giác SAB vuông cân và có diện tích là $4a^2$ nên $SA = SB = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 4a$.

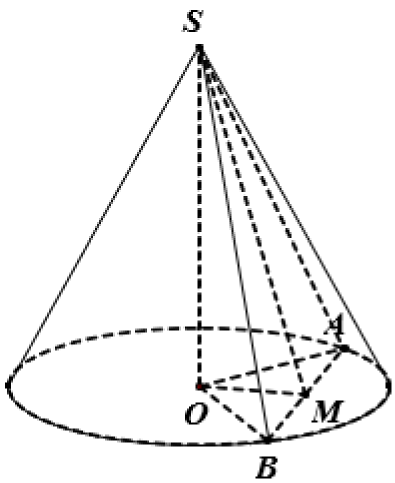
Ta có $SH = \dfrac{SA.SB}{AB} = 2a$ nên $SO = SH.\cos 30° = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 59. **(THPT Nguyễn Cảnh Quân - Nghệ An 2022)** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc $30°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $4\sqrt{11}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{7}\pi a^2$. **C.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



Gọi hình nón đã cho có đỉnh S và tâm hình tròn đáy là O, thiết diện qua đỉnh S là ΔSAB đều cạnh $4a$, M là trung điểm của AB suy ra góc giữa (SAB) và đáy là $\widehat{SMO} = 30°$.

Ta có $l = SA = SB = AB = 4a$ và $SM = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét ΔSOM vuông tại O nên $\sin \widehat{SMO} = \dfrac{SO}{SM} \Rightarrow h = SO = SM.\sin 30^0 = \sqrt{3}a$ suy ra $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{13}a$.

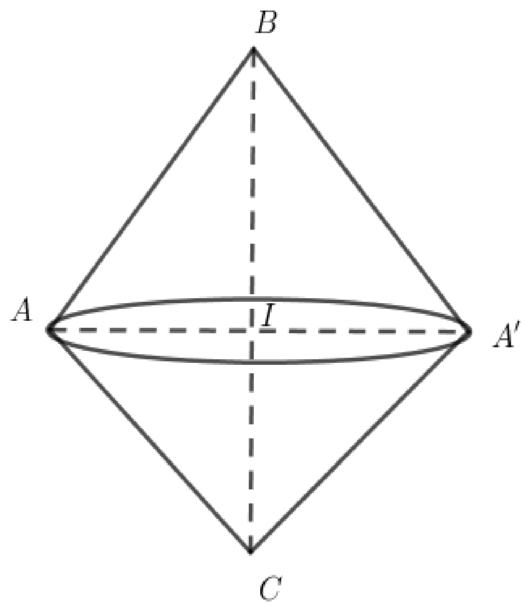
Vậy diện tích xung quanh của (N) bằng $\pi rl = \pi.\sqrt{13}a.4a = 4\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 60. **(Sở Hòa Bình 2022)** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4, AC = 2$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình tam giác khi quanh quanh cạnh BC bằng

A. $\dfrac{32\pi\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\pi\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Kẻ $AI \perp BC\,(I \in BC) \Rightarrow \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AI = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình tam giác khi quanh quanh cạnh BC bằng

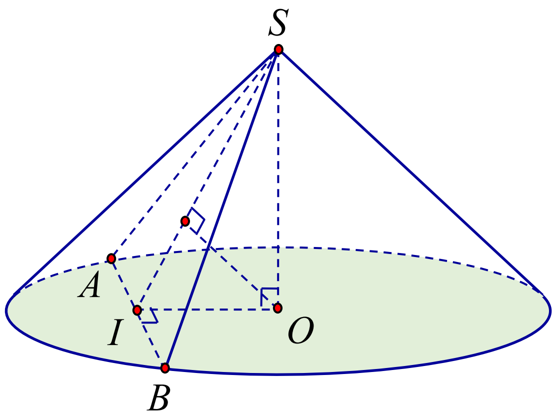
$$V = \frac{1}{3}\pi AI^2(BI + CI) = \frac{1}{3}\pi AI^2 BC = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2.2\sqrt{5} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{15}.$$

Câu 61. **(Sở Cà Mau 2022)** Cho hình nón có thiết diện qua đỉnh S là tam giác đều có cạnh bằng 16 và tạo với mặt đáy một góc $60°$. Thể tích của khối nón đó bằng

A. $16\sqrt{7}\pi$. **B.** 448π. **C.** 1344π. **D.** $192\sqrt{7}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi thiết diện qua đỉnh S là tam giác đều SAB cạnh bằng 16, tạo với mặt đáy một góc $\widehat{SIO}=60°$

Ta có đường cao của tam giác $SI=\frac{16\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$.

$\sin\widehat{SIO}=\frac{SO}{SI}\Rightarrow SO=SI\sin 60°=8\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=12$.

$IO=\sqrt{SI^2-SO^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2-12^2}=4\sqrt{3}$, suy ra $r=OB=\sqrt{IO^2+IB^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+8^2}=4\sqrt{7}$.

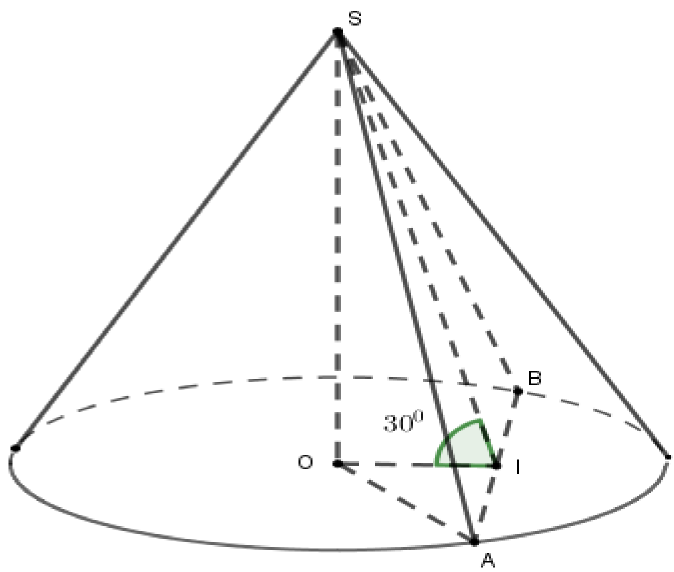
Thể tích khối nón bằng $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{1}{3}\pi\left(4\sqrt{7}\right)^2.12=448\pi$.

Câu 62. **(Sở Thái Bình 2022)** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc $30°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $4\sqrt{7}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử thiết diện là tam giác SAB; gọi I là trung điểm của AB.
Ta có: $AB\perp SI$ và $OI\perp AB$

Suy ra: góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO}$.

Xét ΔSOI vuông tại O ta có: $OI=\cos 30°.SI=\frac{\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{3}=3a$.

Xét ΔOAI vuông tại I ta có: $OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = a\sqrt{13}$.

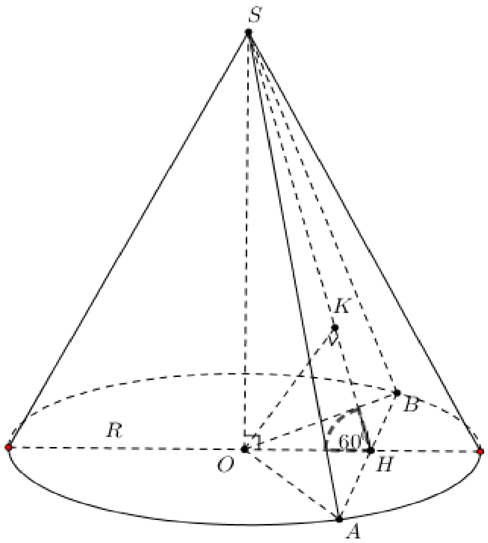
Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l = \pi.OA.SA = \pi.a\sqrt{13}.4a = 4\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 63. **(Sở Kiên Giang 2022)** Cho hình nón S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt phẳng chứa đường tròn đáy bằng $60°$. Biết khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $V = 8\sqrt{3}\pi a^3$. **B.** $V = 36\sqrt{2}\pi a^3$. **C.** $V = 24\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** $V = 12\sqrt{2}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



• Ta có: $SO \perp (ABCD)$. Kẻ $OH \perp AB$ suy ra $SH \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc)

Ta có: $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Mà $OH \perp AB$, $SH \perp AB$.

Suy ra góc $\widehat{[(SAB),(ABCD)]} = \widehat{(OH,SH)} = \widehat{SHO} \Rightarrow \widehat{SHO} = 60°$.

• Kẻ $OK \perp SH$, mà $AB \perp SO$, $AB \perp OH \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK$

Suy ra $OK \perp (SAB) \Rightarrow OK = d(O,(SAB))$. Do đó $OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Xét tam giác vuông OKH ta có $\sin KHO = \frac{OK}{OH} \Rightarrow OH = \frac{OK}{\sin 60°} = \sqrt{6}a$.

Xét tam giác vuông SOH ta có $\tan SHO = \frac{SO}{OH} \Rightarrow SO = OH.\tan 60° = 3\sqrt{2}a$.

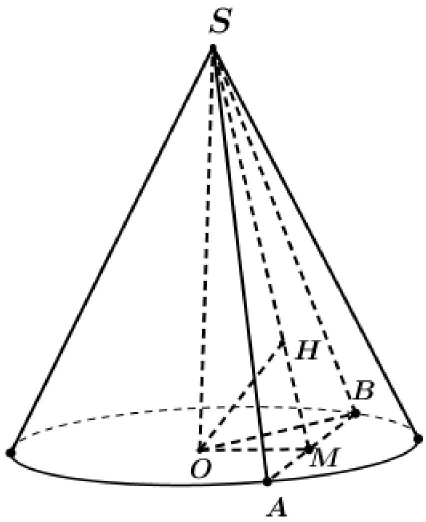
Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2.h = \frac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{3}a\right)^2.3\sqrt{2}a = 12\sqrt{2}\pi a^3$.

Câu 64. **(Sở Nam Định 2022)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB vuông và có diện tích bằng 16. Góc tạo bởi trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{40\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}\pi$. **C.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $\frac{40\sqrt{2}}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow SM \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SM \Rightarrow SH$ là hình chiếu của SO lên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow (SO,(SAB)) = (SO, SM) = \widehat{OSM} = 30°$.

Từ giả thiết suy ra tam giác SAB vuông cân tại S.

$S_{\Delta SAB} = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}SA^2 = 16 \Leftrightarrow SA = 4\sqrt{2} \Rightarrow AB = 8 \Rightarrow MS = MA = MB = 4$.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón.

Xét tam giác vuông SOM : $\cos 30° = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SO = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow r = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{32-12} = \sqrt{20}$.

Suy ra thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi r^2.SO = \frac{1}{3}\pi.20.2\sqrt{3} = \frac{40\pi\sqrt{3}}{3}$.