

Bài 6. Dãy số

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Tìm tất cả giá trị m để dãy số (u_n) với $u_n = \frac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng.

Lời giải**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Xét } u_{n+1} - u_n &= \frac{m(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{mn+1}{n+1} = \frac{mn+m+1}{n+2} - \frac{mn+1}{n+1} \\ &= \frac{mn^2 + 2mn + m + n + 1 - (mn^2 + 2mn + n + 2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{m-1}{(n+2)(n+1)}. \\ &\Leftrightarrow \frac{m-1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow m > 1 \end{aligned}$$

Dãy số đã cho là dãy tăng

(do $(n+2)(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$).Vậy $m > 1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 2. Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Tính số tiền ông An có được sau tháng sau tháng thứ hai

Lời giải**Lời giải**

Số tiền ông An có được:

$$T_1 = 30 + 30 \cdot \frac{0,6}{100} = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) = 30,18 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Sau tháng thứ nhất là:

$$T_2 = 30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) + \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) \right] \frac{0,6}{100}$$

Sau tháng thứ hai:

$$\begin{aligned} &= \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) \right] \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right)^2 \\ &\approx 60,54 \quad (\text{triệu đồng}) \end{aligned}$$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số.

Lời giải**Lời giải**

$$u_6 = \frac{2 \cdot 6 + 1}{6^2} = \frac{13}{36}.$$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \end{cases}$ với $n \geq 2$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy.

Lời giải**Lời giải**Ta có $u_1 = -1, u_2 = 3$.

Từ hệ thức truy hồi ta có

$$u_3 = u_2 + 2u_1 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$u_4 = u_3 + 2u_2 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$$u_5 = u_4 + 2u_3 = 7 + 2 \cdot 1 = 9$$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) : $-3; -1; 1; 3; 5; \dots$ Hãy chỉ ra một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho.

Lời giải

Lời giải

Ta có $u_1 = -3, u_2 = -1, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 5, \dots$

Suy ra $u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 2, u_4 = u_3 + 2, u_5 = u_4 + 2, \dots$

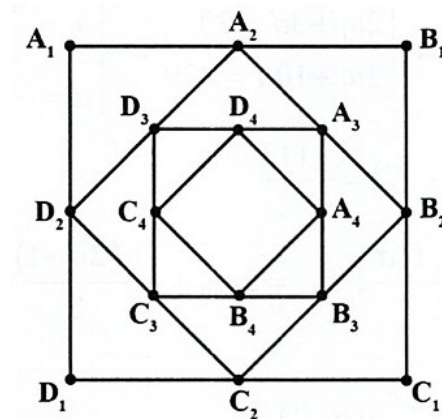
Vậy hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho là
$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} \text{ với } n \geq 1.$$

Câu 6. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$.

Tính S_{12} .

Lời giải

Lời giải



Ta thấy mỗi tứ giác $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông có cạnh là A_nB_n .

Ta có: $A_1B_1 = 4, A_2B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1B_1 = 2\sqrt{2}, A_3B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 A_1B_1 = 2, \dots$

Tổng quát: $A_nB_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} A_1B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$

Diện tích hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ là $S_n = (A_nB_n)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng với $n=12$ có: $S_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{32768}$

Câu 7. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

Lời giải

Lời giải

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1})}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$$

Ta có:

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} < \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$$

Khi đó:

Suy ra: $u_{n+1} < u_n$

Vậy dãy (u_n) là dãy giảm.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

Lời giải

Lời giải

$$Ta\ có: u_n = \frac{167}{84}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84 \cdot (2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$$

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

Câu 9. Dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ bị chặn trên bởi a . Khi đó $a = ?$

Lời giải

Lời giải

Ta có: $u_n > 1$,

Giả sử tồn tại $u_n \geq 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} \geq 2 \Rightarrow u_{n-1} \geq 2$.

Nếu tồn tại $u_n \geq 2$ thì suy ra $u_{n-1} \geq 2$, từ đó suy ra được $u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_2, u_1 \geq 2$ vô lý

Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$. Nên điều giả sử là sai. Suy ra: $u_n < 2$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} > 0$$

Xét

Suy ra: $u_{n+1} > u_n$ nên u_n là dãy tăng.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

Câu 10. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau đây: Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

Lời giải

Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \geq 1$. Khi đó ta có:

$$u_2 - u_1 = 2$$

$$u_3 - u_2 = 2$$

$$u_4 - u_3 = 2$$

.....

$$u_n - u_{n-1} = 2$$

Cộng theo về các đẳng thức trên ta được:

$$u_n - u_1 = (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 1$$

Câu 11. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau đây: Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

Lời giải

Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1$ suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \forall n \geq 1$. Từ đó ta có:

$$\frac{u_2}{u_1} = 2; \frac{u_3}{u_2} = 2; \frac{u_4}{u_3} = 2; \dots; \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được: $\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm các giá trị của a để dãy số (u_n) tăng.

Lời giải

Lời giải

Xét hiệu: $u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + (1-a)u_n - u_{n+1} = (a-1)u_{n+1} + (1-a)u_n = (a-1)(u_{n+1} - u_n)$

Khi đó:

$$u_3 - u_2 = (a-1)(u_2 - u_1) = (a-1)(2-1) = a-1$$

$$u_4 - u_3 = (a-1)(u_3 - u_2) = (a-1)(a-1) = (a-1)^2$$

$$u_5 - u_4 = (a-1)(u_4 - u_3) = (a-1)(a-1)^2 = (a-1)^3$$

Suy ra: $u_{n+1} - u_n = (a-1)^{n-1}$.

Để dãy số (u_n) tăng thì $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Vậy $a > 1$ thì dãy số (u_n) tăng.

----HẾT---