

I - MỞ ĐẦU.

1. Lý do chọn đề tài.

Ở trường THPT dạy toán là hoạt động toán học cho học sinh, trong đó giải toán là hình thức chủ yếu. Để rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh ngoài việc trang bị tốt kiến thức cơ bản cho các em giáo viên cần hướng dẫn học sinh phát triển, mở rộng kết quả các bài toán cơ bản có trong sách giáo khoa để các em có cơ hội suy nghĩ tìm tòi những kết quả mới sau mỗi bài toán. Thực tế, ở các nhà trường phổ thông hiện nay phần lớn giáo viên chưa có thói quen khai thác và phát triển một bài toán thành chuỗi các bài toán liên quan cho học sinh. Mà chủ yếu chỉ dừng lại ở các bài tập đơn lẻ làm cho học sinh thụ động, khó tìm được mối liên hệ giữa các kiến thức đã học. Cho nên khi gặp một bài toán mới các em không biết xuất phát từ đâu?. Những kiến thức cần sử dụng là gì?. Nó liên quan như thế nào với các bài toán đã học?. Trong thực tiễn giảng dạy của bản thân tôi thấy việc tìm tòi mở rộng các bài tập sách giáo khoa là phương pháp học khoa học, có hiệu quả nhất của một tiết bài tập. Phát triển từ dễ đến khó là con đường phù hợp cho học sinh khi rèn luyện kỹ năng giải toán. Việc tìm tòi để phát triển, mở rộng các bài toán làm tăng thêm hứng thú học tập, óc sáng tạo của học sinh. Từ đó giúp các em có cơ sở khoa học khi phân tích, phán đoán tìm lời giải cho các bài toán khác và ngày càng tự tin hơn vào khả năng giải toán của mình.

Trong quá trình giảng dạy bộ môn Toán, đặc biệt là bồi dưỡng học sinh giỏi đối với giáo viên gặp không ít khó khăn, nhất là nguồn tài liệu để phục vụ cho giảng dạy phải có tính hệ thống theo từng chuyên đề khai thác sâu từ những kiến thức cơ bản của sách giáo khoa. Để có được điều đó, đối với giáo viên không ngừng nghiên cứu và có ý thức tích lũy một cách có hệ thống theo từng mảng kiến thức trong suốt quá trình giảng dạy cũng như sắp xếp nó theo một hệ thống có tính logic cao. Đặc biệt là khai thác sâu từ những kiến thức nền trong sách giáo khoa.

Mặc dù có rất nhiều tài liệu viết về ứng dụng của phương pháp tỉ số thể tích, nhưng cũng chỉ dừng lại ở việc ứng dụng phương pháp tỉ số thể tích để tính thể tích, tính tỉ số thể tích, tính khoảng cách chứ chưa đi sâu vào ứng dụng nó để giải các bài toán mở rộng. Từ những lý do trên, tôi chọn đề tài nghiên cứu của mình là: ***“Hướng dẫn học sinh khai thác và vận dụng một bài tập sách giáo khoa hình học 12 nhằm rèn luyện năng lực tư duy logic cho học sinh”***.

2. Mục đích nghiên cứu.

- Nhằm mục đích đưa lại hiệu quả trong giảng dạy đặc biệt là ôn thi HSG và ĐH cho HS Khối 12 . Bên cạnh đó qua quá trình nghiên cứu trình độ chuyên môn của bản thân được nâng cao đưa lại hiệu quả tốt trong giảng dạy.
- Nhằm nâng cao năng lực tư duy logic cũng như chất lượng dạy học chủ đề hình học không gian cho học sinh trường THPT Như Thanh..

3. Đối tượng nghiên cứu.

Đối tượng nghiên cứu là các bài toán ứng dụng của tỉ số thể tích trong các bài toán tính thể tích và các bài toán hình học không gian có liên quan. Đề tài này áp dụng rộng rãi cho các em học sinh THPT, học sinh lớp 12 ôn thi Đại học, Cao đẳng, các em học sinh giỏi và tất cả giáo viên dạy Toán ở trường THPT tham khảo.

4. Phương pháp nghiên cứu.

- Nghiên cứu ứng dụng và phát triển bài tập 4 trang 25 SGK hình học 12 ban cơ bản.
- Nghiên cứu tài liệu liên quan đến đề tài.

II - NỘI DUNG CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.

1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.

Giải toán là quá trình suy luận, nhằm khám phá ra quan hệ logic giữa cái đã cho và cái chưa biết. Mỗi bài toán có một cách giải, cách suy luận riêng, nên khi đứng trước một bài toán học sinh thường không biết bắt đầu từ đâu? phải làm như thế nào?. Trong quá trình dạy học, chúng ta không thể dạy hết cho học sinh tất cả các bài tập cũng như các em cũng không thể làm hết các bài tập đó. Vì vậy, để tạo mối liên hệ giữa các bài tập, khi hướng dẫn cho học sinh giải một bài toán, giáo viên không nên dừng lại ở một bài toán cụ thể; mà sau khi giải bài toán này, học sinh phải giải quyết một loạt các vấn đề liên quan mà giáo viên đã định hướng. Quá trình này phải bắt đầu từ các bài tập đơn giản đến phức tạp để rèn luyện năng lực tư duy cho học sinh. Từ đó giúp các em có cơ sở khoa học khi phân tích, định hướng tìm tòi lời giải cho các bài toán khác và đặc biệt là cũng cố cho các em lòng tin vào khả năng giải toán của mình.

2. Thực trạng của vấn đề nghiên cứu.

Qua quá trình dạy học ở trường THPT Như Thanh nhiều năm nay tôi nhận thấy việc học môn toán của học sinh là rất khó khăn, đặc biệt là phần hình học không gian. Các em không biết bắt đầu từ đâu, vận dụng kiến thức liên quan nào.... Chính những khó khăn đó đã ảnh hưởng không nhỏ đến chất lượng học tập

môn Toán nói chung và phần hình học nói riêng, dẫn đến các em không hứng thú trong việc học môn Toán.

3. Giải pháp và tổ chức thực hiện.

Xuất phát từ bài toán trong SGK hình học 12 cơ bản và xem nó như là bài toán gốc cho trình tự nghiên cứu của sáng kiến kinh nghiệm này.

Bài toán: Cho khối chóp S.ABC trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm

A', B', C' khác với S. Chứng minh rằng: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$. Trong đó

$V_{S.A'B'C'}$ và $V_{S.ABC}$ lần lượt là thể tích của khối chóp S.A'B'C' và S.ABC

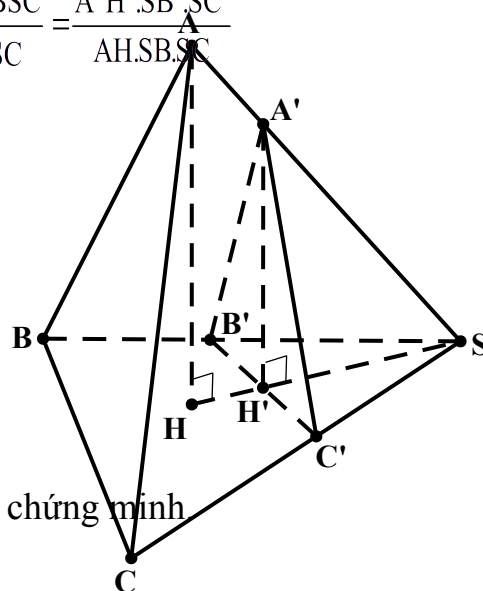
(Bài tập 4- Tr25 - SGK hình học 12 ban cơ bản)

Lời giải:

Gọi H' và H lần lượt là hình chiếu của A' và A lên mặt phẳng (SBC) khi đó ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3} A'H' \cdot S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3} AH \cdot S_{\Delta SAB}} = \frac{A'H' \cdot S_{\Delta SB'C'}}{AH \cdot S_{\Delta SAB}} = \frac{A'H' \cdot SB' \cdot SC' \sin \angle BSC}{AH \cdot SB \cdot SC \sin \angle BSC} = \frac{A'H' \cdot SB' \cdot SC'}{AH \cdot SB \cdot SC}$$

Ta có: $\Delta SH'A' \sim \Delta SHA$. Nên: $\frac{A'H'}{AH} = \frac{SA'}{SA}$



Do đó:

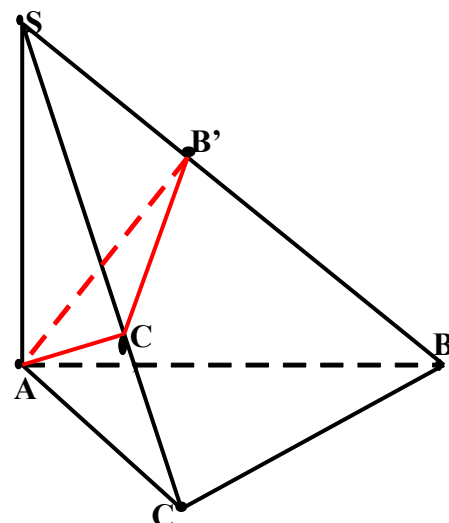
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh

Xem bài toán nêu trên là bài toán gốc, ta lần lượt khai thác bài toán trên dưới những góc độ khác nhau. Sau đây, tôi xin đưa ra bốn hướng khai thác bài toán trên để hướng dẫn học sinh giải quyết tốt các bài toán hình học không gian.

Hướng 1: Ứng dụng bài toán gốc để giải bài toán tìm tỷ số thể tích.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại C cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) có SA=AB. Mặt phẳng (α) qua A và



vuông góc với SB cắt SB tại B' cắt SC tại C' (B' và C' khác S). Tìm tỉ số thể tích hai phần của khối chóp cắt bởi (α)?

Lời giải:

Ta đặt: $CB = CA = a$; $AB = SA = a\sqrt{2}$;

$SB = 2a$; $SC = a\sqrt{3}$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Dễ dàng chứng minh được tam giác AC'B' vuông ở C'. Nên ta có:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB' \cdot SB}{SB^2} \cdot \frac{SC' \cdot SC}{SC^2} = \frac{(SA)^2}{(SB)^2} \cdot \frac{(SA)^2}{(SC)^2} = \frac{4a^2}{4a^2 \cdot 3a^2} = \frac{1}{3}$$

$$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} \Rightarrow V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} \quad \text{Hay} \quad \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm của SB và SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính tỉ

số thể tích $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{ABCD D'C'B'}}$.

Lời giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của SO và B'D'. Khi đó AI cắt SC tại C'.

Ta có:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

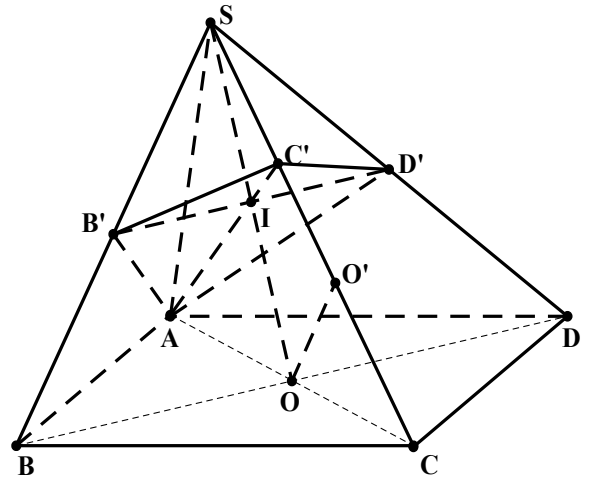
Suy ra:

$$V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} (V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V_{S.ABCD}$$

Kẻ $OO' \parallel AC'$ ($O' \in SC$). Ta có $SC' = C'O' = O'C$.

$$\text{Do đó: } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{S.ABCD} \quad \text{Hay} \quad \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$$

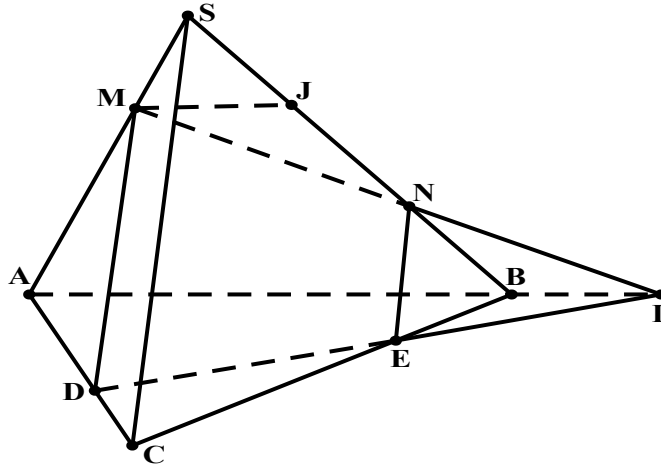
$$\text{Suy ra: } V_{ABCD D'C'B'} = \frac{5}{6} \cdot V_{S.ABCD} \quad \text{Vậy} \quad \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{ABCD D'C'B'}} = \frac{1}{5}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC lấy M và N lần lượt trên các cạnh SA và SB sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN song song với SC chia khối chóp thành hai phần, tìm tỉ số thể tích của hai phần đó.

Lời giải:

Kéo dài MN cắt AB tại I, kẻ MD song song SC ($D \in AC$); $E = DI \cap CB$. Khi đó tứ giác MNED là thiết diện khối chóp cắt bởi (α).



$$\text{Ta có: } \frac{V_{A.MDI}}{V_{A.SCB}} = \frac{AM}{AS} \cdot \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27} \quad \text{Vậy } V_{A.MDI} = \frac{16}{27} V_{A.SCB}$$

(Do kẻ $MJ \parallel AB$ ta có : $\triangle NMJ = \triangle NIB$, $BJ = NJ \Rightarrow BI = \frac{1}{3}AB$; $AI = \frac{4}{3}AB$)

$$\text{Ta lại có: } \frac{V_{IBNE}}{V_{IAMD}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IE}{ID} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Suy ra: } V_{I.BNE} = \frac{1}{16} V_{A.MDI} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{27} V_{S.ABC} = \frac{1}{27} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{AMDEN} = V_{AMDI} - V_{IBNE} = \frac{16}{27} V_{S.ABC} - \frac{1}{27} V_{S.ABC} = \frac{5}{9} V_{S.ABC}$$

Gọi $V_{S.MDCEN}$ là phần thể tích còn lại ta có :

$$V_{S.MDCEN} = V_{S.ABC} - V_{AMDEN} = \frac{4}{9} V_{S.ABC}$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_{AMDBNE}}{V_{S.MDCEN}} = \frac{\frac{5}{9} V_{S.ABC}}{\frac{4}{9} V_{S.ABC}} = \frac{5}{4}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh $2a$; $SA = SB = SC = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA; N là giao điểm của đường

thẳng SD và mặt phẳng (MBC). Gọi V , V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp S.ABCD và S.BCNM. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

(Trích đề thi HSG Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu - 2010)

Lời giải:

Do (MBC) chứa $BC \parallel (SAD)$ nên N là giao điểm của đường thẳng qua M song song với AD. Suy ra N là trung điểm SD.

$$\text{Ta có: } V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{V}{2}$$

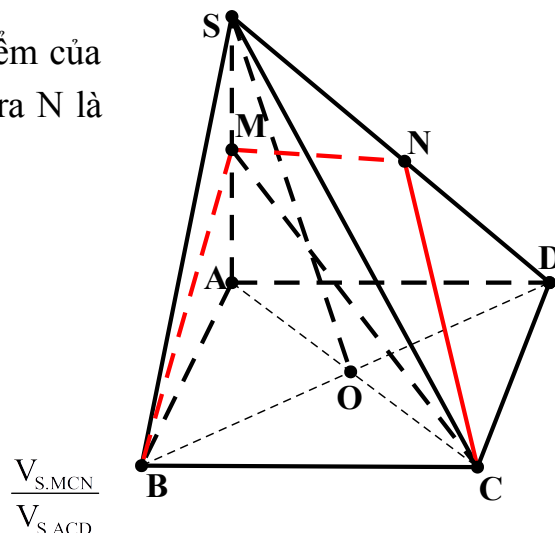
(Do ABCD là hình thoi nên $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$)

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SM}{SA} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{V}{4};$$

$$= \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MCN} = \frac{V}{8}$$

$$\text{Suy ra: } V_1 = V_{S.MBC} + V_{S.MCN} = \frac{3V}{8}. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V} = \frac{3}{8}.$$



Hướng 2: Ứng dụng bài toán gốc vào tính thể tích khối đa diện.

Trong quá trình giải bài toán tính thể tích của khối đa diện, không phải khi nào chúng ta cũng có thể tính trực tiếp được một cách dễ dàng. Việc vận dụng bài toán mở rộng trên để tính thể tích khối đa diện chúng ta gặp thường xuyên trong các đề thi nhất là các kỳ thi ĐH và các kỳ thi HSG. Sau đây tôi xin đưa ra một số ví dụ điển hình để hướng dẫn học sinh ứng dụng bài toán trên để tính thể tích khối đa diện.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$,

$AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và

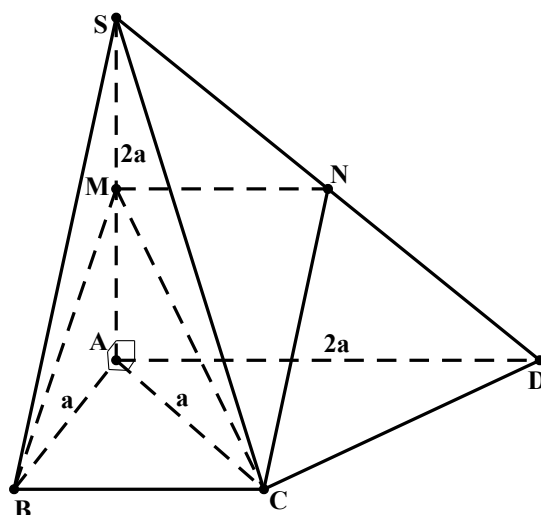
$SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a?

Lời giải :

Áp dụng công thức ta có:

$$\frac{V_{S.BCM}}{V_{S.BCA}} = \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{4}.$$



$$V_{S.BCNM} = V_{S.BCM} + V_{S.CNM} = \frac{1}{2} V_{S.BCA} + \frac{1}{4} V_{S.CAD}.$$

Ta có:
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC}$$

$$= \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{3} a^3$$

và:
$$V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ACD}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} CA \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{2} \cdot a \sqrt{2} = \frac{2}{3} a^3$$

Vậy:
$$V_{S.BCNM} = V_{S.BCM} + V_{S.CNM} = \frac{1}{2} V_{S.BCA} + \frac{1}{4} V_{S.CAD} = \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{2a^3}{4 \cdot 3} = \frac{a^3}{3}$$

Nên:
$$V_{S.BCNM} = V_{S.BCM} + V_{S.CNM} = \frac{1}{2} V_{S.BCA} + \frac{1}{4} V_{S.CAD} = \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{2a^3}{4 \cdot 3} = \frac{a^3}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Tính thể tích khối tứ diện CMNP theo a

Lời giải :

Ta có:
$$\frac{V_{CMNP}}{V_{CMBD}} = \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{V_{CMBD}}{V_{CSBD}} = \frac{V_{M.BCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

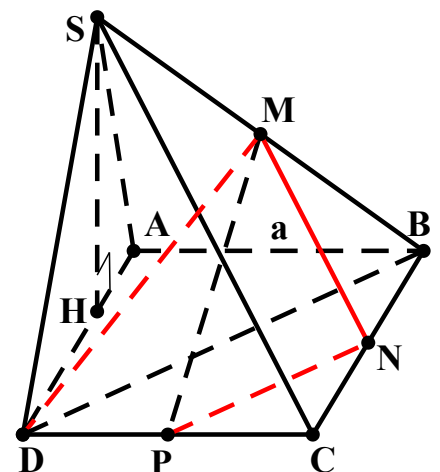
Nhân theo vế (1) với (2) ta có:

$$\frac{V_{CMNP}}{V_{S.BCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.BCD}$$

Gọi H là trung điểm của AD ta có $SH \perp AD$ mà $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Do đó:
$$V_{S.BCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Vậy:
$$V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96} \text{ (đvtt)}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a; $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC và cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D' theo a .

(Trích đề thi HSG Tỉnh Hải Dương 2012)

Lời giải :

Ta có: $BC \perp AB$; $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$;

$SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \Rightarrow (SBC)$.

Tương tự ta cũng có: $AD' \perp SD$

Lại có: $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'}$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB \cdot SB' \cdot SC \cdot SC'}{SB^2 \cdot SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SD \cdot SD' \cdot SC \cdot SC'}{SD^2 \cdot SC^2} = \frac{SA^2}{SD^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

$$\text{Do: } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Khi đó cộng theo về (1) và (2) ta có:

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} + \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.AB'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}} + \frac{V_{S.AD'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}} = \frac{9}{20} + \frac{9}{20} = \frac{9}{10} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{9}{10} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^3}{20}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = b$. Gọi M là trung điểm SD , N là trung điểm AD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua BM và cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM . Chứng minh rằng: $AC \perp (BMN)$ và tính thể tích khối đa diện $S.KMHB$.

Lời giải : Dễ CM được $AC \perp BN$ (1)

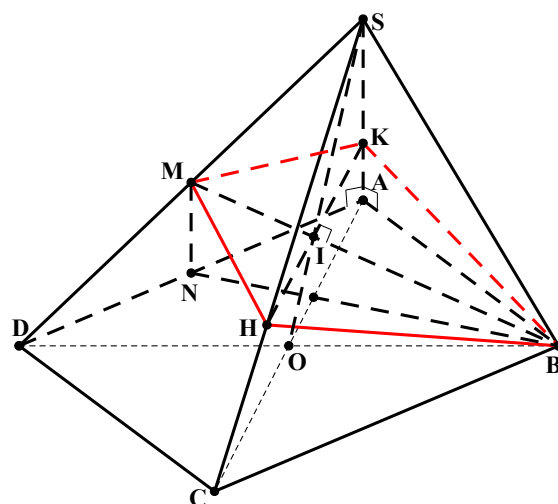
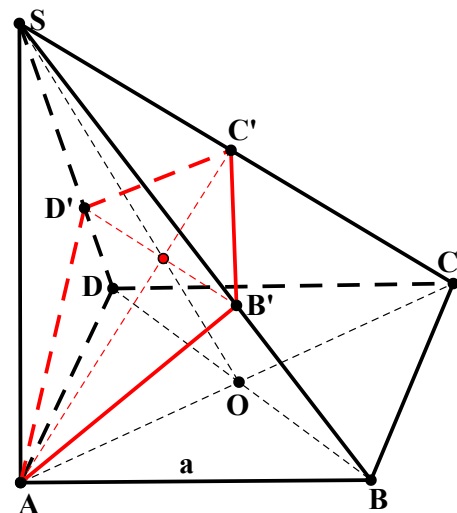
Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AC \perp (BMN)$

Giả sử (P) cắt (SAC) theo giao tuyến $(d) \perp BM$. Mà do (d) và AC đồng phẳng $\Rightarrow (d) \parallel (AC)$. Gọi: $O = (AC) \cap (BD)$.

Trong mặt phẳng (SBD) : SO cắt BM tại I .

Qua I kẻ đường thẳng $(d) \parallel (AC)$ cắt SA , SC lần lượt tại H , $K \Rightarrow$ Mặt phẳng $(MHBK)$ là mặt phẳng (P) cần dựng. Lại vì I là trọng tâm ΔSDC và $HK \parallel AC$ nên:



$$\frac{SH}{SC} = \frac{SK}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

Theo công thức tính tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{SMBK}}{V_{SDBA}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SK}{SA} = \frac{1}{3}; \quad \frac{V_{SMHB}}{V_{SDCB}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SH}{SC} \cdot \frac{SB}{SB} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{SKMHB} = V_{SKMB} + V_{SMHB} = \frac{1}{3}(V_{S,DBC} + V_{S,DBA}) = \frac{1}{3} \cdot V_{S,ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \cdot a^2 b \quad (\text{đvtt})$$

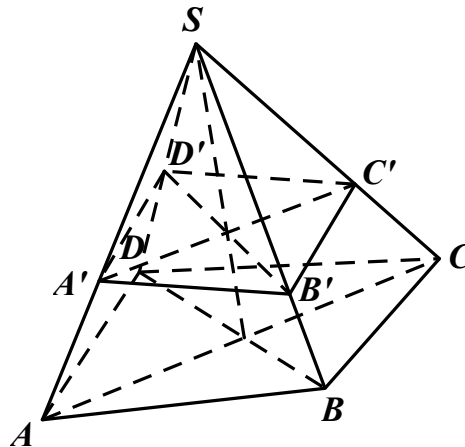
Hướng 3: Ứng dụng bài toán gốc vào chứng minh các đẳng thức hình học.

Việc chứng minh và ứng dụng các đẳng thức hình học không gian là rất quan trọng song không hề dễ dàng để chứng minh các đẳng thức đó. Sau đây tôi xin đưa ra một số đẳng thức quan trọng và việc chứng minh hết sức đơn giản bằng việc vận dụng bài toán gốc nói trên.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'.

Chứng minh rằng: $\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}$.

Lời giải :



Xét các hình chóp S.ABC và S.ADC ta có:

$$\frac{V_{S,A'B'C'}}{V_{S,ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (1)$$

$$\text{Và: } \frac{V_{S,A'D'C'}}{V_{S,ADC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (2)$$

Vì: $V_{S,ABC} = V_{S,ADC} = \frac{1}{2} V_{S,ABCD}$. Cộng theo vế (1) và (2) ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (3)$$

Tương tự xét các hình chóp S.ABD và S.BCD ta có: $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD}$ (4)

và: $\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD}$ (5)

vì: $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Cộng theo vế (4) và (5) ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \quad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} &= \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \\ \Leftrightarrow \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \left(\frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} \right) &= \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \left(\frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} &= \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'}. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC, SG lần lượt tại các điểm A', B', C', G' khác S.

Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$.

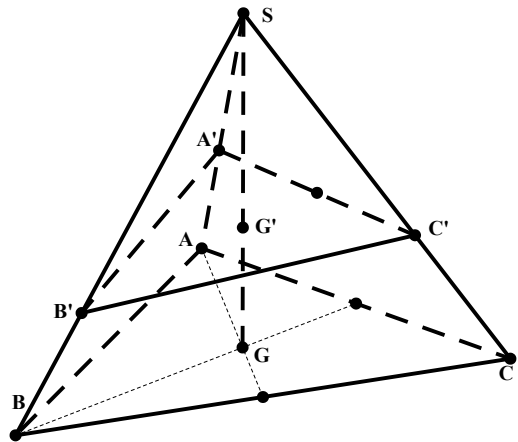
Lời giải : Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$V_{S.ABG} = V_{S.BCG} = V_{S.ACG} = \frac{1}{3}V_{S.ABC}$$

Ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ (1)

Mặt khác ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.A'B'G'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.A'C'G'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.B'C'G'}}{V_{S.ABC}} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left(\frac{V_{S.A'B'G'}}{V_{S.ABG}} + \frac{V_{S.A'C'G'}}{V_{S.ACG}} + \frac{V_{S.B'C'G'}}{V_{S.BCG}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{SA' \cdot SB' \cdot SG'}{SA \cdot SB \cdot SG} + \frac{SA' \cdot SC' \cdot SG'}{SA \cdot SC \cdot SG} + \frac{SB' \cdot SC' \cdot SG'}{SB \cdot SC \cdot SG} \right) \\
&= \frac{1}{3} \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SG'}{SA \cdot SB \cdot SC \cdot SG} \left(\frac{SC}{SC'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SA}{SA'} \right) \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.}$$

Ví dụ 3 : Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a ,AH là đường cao của tứ diện và O là trung điểm của AH. Một mặt phẳng qua O cắt các cạnh AB, AC, AD lần

$$\text{lượt tại M ,N ,P . CMR: } \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} = \frac{6}{a}.$$

Lời giải :

$$\text{Ta có : } \frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Mặt khác : } \frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} &= \frac{V_{A.MON} + V_{A.NOP} + V_{A.PON}}{V_{A.BCD}} \\
&= \frac{V_{A.MON}}{V_{A.BCD}} + \frac{V_{A.NOP}}{V_{A.BCD}} + \frac{V_{A.PON}}{V_{A.BCD}} \\
&= \frac{V_{A.MON}}{3V_{A.BCH}} + \frac{V_{A.NOP}}{3V_{A.CDH}} + \frac{V_{A.PON}}{3V_{A.BDH}} \quad (\text{Do } V_{A.BCH} = V_{A.CDH} = V_{A.BDH} = \frac{1}{3} V_{A.BCD}) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AO}{AH} + \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \frac{AO}{AH} + \frac{AP}{AD} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AO}{AH} \right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} + \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} + \frac{AP}{AD} \cdot \frac{AM}{AB} \right) \\
&= \frac{1}{6} \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \left(\frac{AD}{AP} + \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} \right) \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{6} \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \left(\frac{AD}{AP} + \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} \right)$$

$$1 = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{AM} + \frac{a}{AN} + \frac{a}{AP} \right)$$

$$\text{Hay ta có : } \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} = \frac{6}{a} . \text{ Suy ra điều phải chứng minh .}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$, Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt bên lần lượt tại các điểm A', B', C' . Chứng minh rằng: $\frac{V_{M.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$

Lời giải :

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng với A', B', C' qua M . Khi đó ta có:

$$V_{M.A'B'C'} = V_{M.A_1B_1C_1} \cdot \text{Trên các cạnh } SA, SB, SC$$

lấy lần lượt các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho:

$$SA_2 = MA'; SB_2 = MB'; SC_2 = MC'$$

Khi đó hình chóp $S.A_2B_2C_2$ là ảnh của hình chóp $M.A_1B_1C_1$ qua phép tịnh tiến theo véc tơ

$\vec{MS}$

Nên ta có:

$$V_{M.A'B'C'} = V_{M.A_1B_1C_1} = V_{S.A_2B_2C_2} \cdot$$

$$\text{Khi đó: } \frac{V_{M.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.A_2B_2C_2}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA_2}{SA} \cdot \frac{SB_2}{SB} \cdot \frac{SC_2}{SC}.$$

$$\text{Hay: } \frac{V_{M.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}.$$

Ví dụ 5 : Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) là α . Một mặt phẳng đi qua A vuông

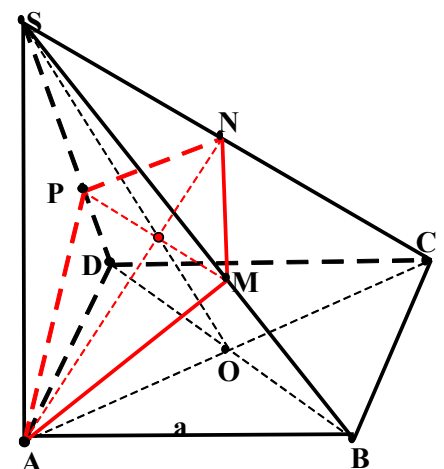
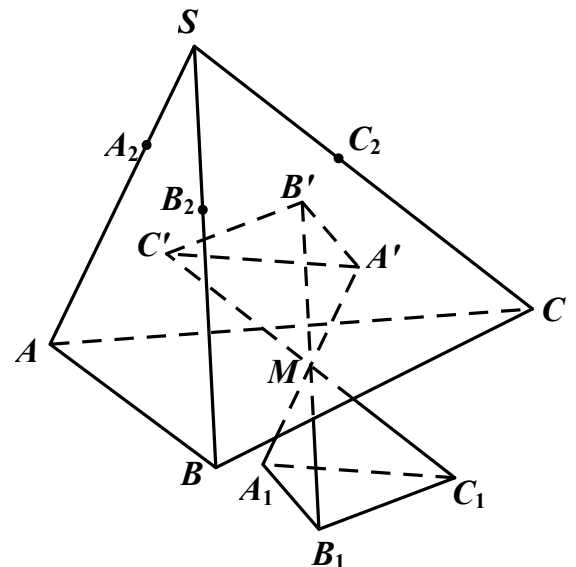
góc với SC và cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P .

$$\text{CMR: } \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \right)^2.$$

Lời giải :

Ta có: từ (gt) suy ra $\angle BSC = \alpha$, $BC \perp SB$, $SC \perp AN$

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} &= \frac{2V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \\ &= \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} \cdot \frac{SN \cdot SC}{SC^2} \\ &= \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} \end{aligned} \quad (1)$$



Mặt khác ta có: $SB = a \cdot \cot \alpha$, $SC = \frac{a}{\sin \alpha}$.

$$\text{Nên } SA^2 = SB^2 - AB^2 = a^2 \cdot \cot^2 \alpha - a^2 = a^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = a^2 \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Do đó:

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = a^2 \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (2)$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = a^2 \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} = \cos 2\alpha \quad (3)$$

Lấy (2) và (3) thay vào (1) ta có: $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \right)^2$. Vậy ta có điều phải CM.

Hướng 4: Vận dụng bài toán gốc vào giải bài toán cực trị trong hình học không gian.

Đối với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của một đại lượng biến thiên là không hề dễ dàng. Bởi vậy việc tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của một đại lượng biến thiên đối với hình học không gian lại càng khó khăn. Sau đây tôi xin đưa ra một số bài toán hay và khó mà việc vận dụng bài toán gốc để giải quyết thì thực sự thuận lợi và đơn giản.

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = b$, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MBC). Tìm x theo a để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

(Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Thanh Hóa -2014)

Lời giải :

Thiết diện là hình thang vuông MNCB, vuông tại B và M.

Tính diện tích thiết diện:

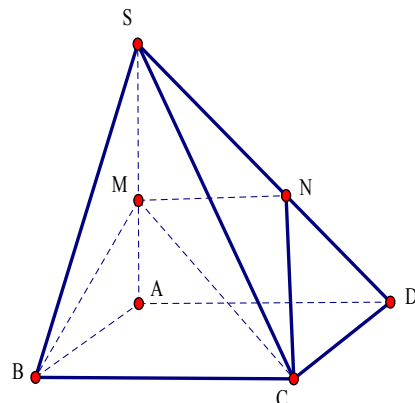
$$S_{MNCB} = \frac{1}{2}(MN + CB)MB;$$

$$BM = \sqrt{BA^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$$

ΔSMN đồng dạng ΔSAD

$$\Rightarrow MN = \frac{SM \cdot AD}{SA} = \frac{(2a - x) \cdot b}{2a}$$

$$\text{Vậy } S_{MNCB} = \frac{1}{2} \left[\frac{2ab - bx}{2a} + b \right] \sqrt{a^2 + x^2}.$$



Gọi V là thể tích của khối chóp S.ABCD $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{2a^2b}{3} = V$

Gọi V_1 là thể tích của khối SMNCB: $V_1 = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$

Ta có $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SB.SC}{SA.SB.SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a-x}{2a}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA.S_{ABC} = \frac{1}{6} . 2a^2b = \frac{V}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{2a-x}{2a} . \frac{V}{2} = \frac{2a-x}{2a} . \frac{ab^2}{3} = \frac{(2a-x)}{6} . ab .$$

Ta có $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM.SN.SC}{SA.SC.SD} = \frac{SM}{SA} . \frac{SN}{SD} = \left(\frac{MN}{AD} \right)^2 = \left(\frac{2a-x}{2a} \right)^2$

$$\Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{V}{2} = \frac{a^2b}{3} \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{(2a-x)^2}{4a^2} . \frac{a^2b}{3} = \frac{(2a-x)^2}{12} . b$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow V_1 = \frac{V}{2} = \frac{a^2b}{3} \Leftrightarrow \frac{(2a-x).ab}{6} + \frac{(2a-x)^2.b}{12} = \frac{a^2b}{3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a(3 + \sqrt{5}) > 2a \text{ (loại)} \\ x = a(3 - \sqrt{5}) \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Vậy với $x = a(3 - \sqrt{5})$ thì mp(MBC) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Ví dụ 2: Cho hình chóp đều S.ABC có SA = a.. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (P) đi qua AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N. Gọi V_1 , V lần lượt là thể tích khối chóp S.AMN và S.ABC.

Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V}{V_1}$.

Lời giải :

Gọi J là giao điểm của SG và BC $\Rightarrow J$ là trung

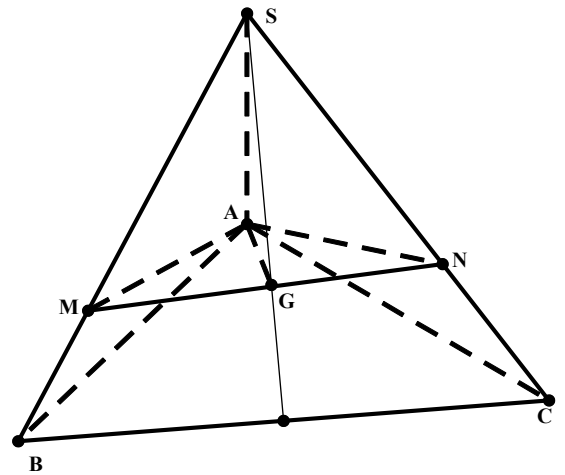
điểm BC. Suy ra: $S_{\triangle ABJ} = S_{\triangle ACJ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

$$\Rightarrow V_{S.ABJ} = V_{S.ACJ} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{V}{2}$$

Đặt: $x = \frac{SM}{SB}, y = \frac{SN}{SC}$ ($x, y \in (0;1]$)

$$\frac{V_{S.AMG}}{V_{S.ABJ}} = \frac{SA}{SA} . \frac{SM}{SB} . \frac{SG}{SJ} = \frac{2x}{3} \Rightarrow V_{S.AMG} = \frac{V}{2} . \frac{2x}{3}$$

Tương tự: $V_{S.AGN} = \frac{2y}{3} \frac{V}{2} \Rightarrow V_1 = V_{S.AMG} + V_{S.AGN} = \frac{V}{3} (y + x) \quad (1)$



$$\frac{V_1}{V} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} =_{xy} \Rightarrow V_1 = V_{xy} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x + y = 3xy$ (*)

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Từ (*) ta có: $3xy \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \geq \frac{4}{9}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = \frac{2}{3}$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1}{x y} \leq \frac{9}{4}. \text{ Dấu “=” xảy ra } x = y = \frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{V}{V_1} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng (α) qua AK cắt SB và SD lần lượt tại M và N.

Đặt $V_1 = V_{S.AMKN}$; $V = V_{S.ABCD}$. Khi mặt phẳng (α) song song BD tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

Đặt $x = \frac{SM}{SB}$, $y = \frac{SN}{SD}$. Tính $\frac{V_1}{V}$ theo x và y . CMR: $\frac{1}{3} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{3}{8}$.

Lời giải :

a) Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD và I là giao điểm của AK và SO;

Qua I kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB và SD lần lượt ở M và N.

Ta có: $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$; $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Vì S.ABCD có đáy là hình bình hành nên: $V_{S.ABC} =$

$$V_{S.ADC} = \frac{1}{2} V.$$

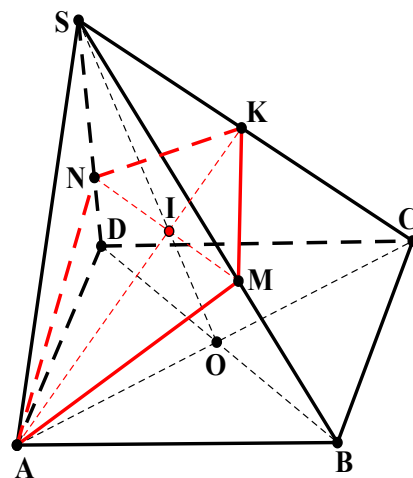
Ta có: $\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{S.AMK} = \frac{1}{6}V \Rightarrow V_{S.ANK} = \frac{1}{6}V$$

Mà: $V = V_{S.ABC} + V_{S.ADC}$. Vậy $V_1 = V_{S.AMK} + V_{S.ANK}$.

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}.$$

b) Ta có: $\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{1}{2} \times \Rightarrow V_{S.AMK} = \frac{x}{4} V.$



Tương tự ta có: $V_{S.ANK} = \frac{y}{4}V$. Suy ra: $\frac{V_1}{V} = \frac{x+y}{4}$ (1)

Do: $V_1 = V_{S.AMN} + V_{S.MNK}$ và $V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2}V$.

Mà: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = xy \Rightarrow V_{S.AMK} = \frac{xy}{2}V$

$\Rightarrow \frac{V_{S.KMN}}{V_{S.CBD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SK}{SC} = xy \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.KMK} = \frac{xy}{4}V$.

$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4}$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$y = \frac{x}{3x-1}$. Do $x > 0$; $y > 0$ nên suy ra $x > \frac{1}{3}$.

Mặt khác: $y \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Vậy ta có: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

Vậy: $\frac{1}{3} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{3}{8}$.

Khi: $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$ thì M là trung điểm SB hoặc M trùng B;

Khi: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ thì .

Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AG và cắt các cạnh AB, AC, AD tại các điểm (khác A). Gọi h_A , h_B , h_C , h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến

mặt phẳng (α). Chứng minh rằng: $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$.

Lời giải :

Gọi B' , C' , D' lần lượt giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AB , AC , AD .

$$\text{Ta có: } V_{AGBC} = V_{AGCD} = V_{AGDB} = \frac{1}{3} V_{ABCD}. (*)$$

$$\text{Vì: } V_{AB'C'D'} = V_{AIB'C'} + V_{AIC'D'} + V_{AID'B'} \quad \text{và } (*)$$

nên:

$$\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{AIB'C'}}{3V_{AGBC}} + \frac{V_{AIC'D'}}{3V_{AGCD}} + \frac{V_{AID'B'}}{3V_{AGDB}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{AI \cdot AB' \cdot AC'}{3 \cdot AG \cdot AB \cdot AC} + \frac{AI \cdot AC' \cdot AD'}{3 \cdot AG \cdot AC \cdot AD} + \frac{AI \cdot AD' \cdot AB'}{3 \cdot AG \cdot AD \cdot AB}$$

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 3 \cdot \frac{AG}{AI} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} + \frac{DD'}{AD'} = 3. \text{ Mặt khác ta có:}$$

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{h_B}{h_A}, \frac{CC'}{AC'} = \frac{h_C}{h_A}, \frac{DD'}{AD'} = \frac{h_D}{h_A}.$$

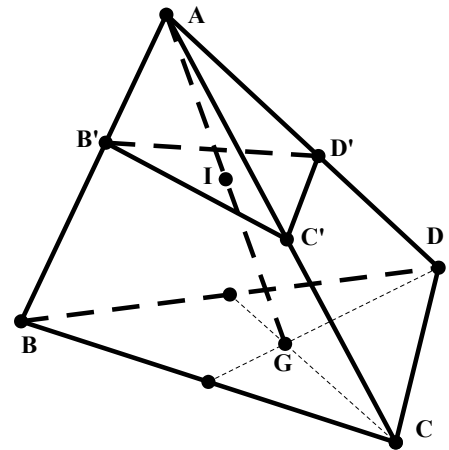
$$\text{Suy ra: } \frac{h_B}{h_A} + \frac{h_C}{h_A} + \frac{h_D}{h_A} = 3 \Leftrightarrow h_B + h_C + h_D = 3h_A$$

$$\text{Ta có: } (h_B + h_C + h_D)^2 \leq 3(h_B^2 + h_C^2 + h_D^2). \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (h_B - h_C)^2 + (h_C - h_D)^2 + (h_D - h_B)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Kết hợp với } (**) \text{ ta được: } (3h_A)^2 \leq 3(h_B^2 + h_C^2 + h_D^2)$$

$$\text{hay: } \frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2. \text{ Vậy ta có điều phải chứng minh.}$$



3.3. Một số bài tập vận dụng :

Bài tập 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$; $SA = 2a$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB , SC . Tính thể tích khối chóp $A.BCNM$ theo a .

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn $AD = 2a$, $AB = BC = a$, $SB = 2a$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm O của AD . Trên các cạnh SC , SD lấy các điểm M , N sao cho

$SM = 2 MC$, $SN = DN$. Mặt phẳng (α) qua MN song song với BC cắt SA , SB lần lượt tại P và Q . Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ theo a .

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$; $SA = SB = SC = 2a$. Gọi M là trung điểm của SA ; N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MBC) . Gọi V , V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.BCNM$.

a) Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$

b) Chứng minh $V \leq 2a^3$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ACD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a góc $\angle BAD = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC mặt phẳng (P) qua của AC' và song song với BD cắt SB , SD lần lượt tại B' và D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$

Bài tập 5. Cho tứ diện $ABCD$ cạnh bằng a . AH là đường cao của tứ diện và O là trung điểm của AH . Một mặt phẳng đi qua O cắt AB , AC , AD lần lượt tại M , N , P . CMR: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} = \frac{6}{a}$

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

SKKN này đã được tôi thực hiện giảng dạy trong năm học 2015-2016 khi tôi tham gia dạy đội tuyển HSG nhà trường, các em HSG lớp 11A1 và Luyện thi Đại học. Trong quá trình hướng dẫn học sinh học chuyên đề này, các em rất hứng thú và tự tin, biết vận dụng khi gặp các bài toán liên quan, tạo cho học sinh niềm đam mê, yêu thích môn hình học nói riêng và môn toán nói chung. Mở ra cho học sinh cách nhìn nhận, vận dụng, linh hoạt, sáng tạo các kiến thức đã học. Kết quả đạt được có thể nói là rất khả quan, khi đội tuyển học sinh giỏi nhà trường gồm 5 em tham dự kì thi cấp tỉnh thì cả 5 em đều làm được câu V.1 trong đề thi. Các giải đạt được cũng rất ấn tượng một giải Nhì, hai giải ba và 2 giải KK.

III. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ.

1. Kết luận.

Các bài toán hình học không gian là một nội dung quan trọng và khó trong chương trình môn toán bậc THPT. Sáng kiến này đã hướng dẫn học sinh vận dụng kết quả của bài tập SGK vào giải các bài toán hình học không gian và tập trung chủ yếu vào các dạng bài tập sau : Tính thể tích, tỉ số thể tích, chứng minh các đẳng thức hình học và đặc biệt là các bài toán cực trị trong hình học không gian.

Thông qua dạy học chuyên đề đã gây được sự hứng thú trong học tập cho học sinh, nâng cao khả năng tư duy lô gic và khả năng sáng tạo của học sinh. Sáng kiến này có tác dụng tốt trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi và ôn luyện thi THPT QG. Mặc dù cố gắng tìm tòi, nghiên cứu song chắc chắn còn có nhiều thiếu sót và hạn chế. Rất mong được sự quan tâm của tất cả các đồng nghiệp bổ sung và góp ý cho tôi. Tôi xin chân thành cảm ơn.

2. Kiến nghị.

Trong dạy học giải bài tập toán, giáo viên cần quan tâm đến việc khai thác và mở rộng các bài tập SGK. Phát triển và nhân rộng những đề tài có ứng dụng thực tiễn cao, đồng thời có thể viết thành những tài liệu tham khảo cho học sinh và giáo viên.

Sở GD&ĐT nên gửi các SKKN đạt giải về các trường THPT để giáo viên có thể tham khảo trong quá trình giảng dạy .

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Như Thanh, ngày 10 tháng 05 năm 2016</i> <i>Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,</i> <i>không sao chép nội dung của người khác.</i> <i>Nguyễn Khắc Sâm</i>
---	---

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

1. SGK Hình học 12 ban cơ bản - Nhà XBGD năm 2008
2. SGK Hình học 12 nâng cao - Nhà XBGD năm 2008.
3. Các dạng Toán LT ĐH của Phan Huy Khải- NXB Hà Nội năm 2002
4. Các bài viết trên tạp chí TH&TT
5. Các đề thi ĐH & CĐ, đề thi HSG các tỉnh
6. Trần Văn Tấn -Các chuyên đề hình học 12
7. Đề thi HSG các tỉnh- Nguồn Internet.