GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU
(Chủ biên)

# BẤT ĐẲNG THỨC
## và một số vấn đề liên quan

(Tài liệu dùng cho lớp bồi dưỡng giáo viên THPT Chuyên - Hè 2005)

# MỤC LỤC


Lời nói đầu ........................................................ 3

Bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình,
*Nguyễn Văn Mậu* ........................................................ 5

Hàm tựa đơn điệu, tựa lồi, lõm,
*Nguyễn Văn Mậu* ........................................................ 18

Về bất phương trình hàm cơ bản,
*Nguyễn Văn Mậu* ........................................................ 33

Một phương pháp làm chặt bất đẳng thức,
*Trịnh Đào Chiến* ........................................................ 39

Mixing variables,
*Trần Nam Dũng, Gabriel Dospinescu* ........................................ 41

Chứng minh các bất đẳng thức cơ bản bằng đạo hàm,
*Lê Đình Thịnh* ........................................................ 54

Một số bất đẳng thức liên quan đến tích phân xác định,
*Lê Đình Thịnh* ........................................................ 69

Xây dựng bất đẳng thức một biến nhờ bất đẳng thức giữa trung bình cộng và nhân và áp dụngbất đẳng thức,
*Nguyễn Vũ Lương* ........................................................ 74

Một số phương pháp xây dựng bất đẳng thức bậc hai,
*Nguyễn Vũ Lương* ........................................................ 81

Một cách chứng minh bất đẳng thức dạng phân thức,
*Phạm Văn Hùng* ........................................................ 102

Phương pháp dồn biến,
*Nguyễn Văn Thông* .................................... 114

Bài toán cực trị trong hình học,
*Đặng Huy Ruận* .................................... 120

Một số đẳng thức và bất đẳng thức liên quan,
*Dương Châu Dinh* .................................... 134

Sử dụng Định lý Lagrange trong bất đẳng thức và cực trị của hàm số và dãy số,
*Đỗ Thị Hồng Anh* .................................... 140

Bất đẳng thức hình học,
*Đỗ Thanh Sơn* .................................... 146

Nguyên lý Dirichlet và bất đẳng thức hình học,
*Vũ Đình Hoà* .................................... 149

# Lời nói đầu

Chương trình đào tạo và bồi học sinh năng khiếu toán bậc phổ thông hiện đã bước sang năm thứ 40. Bốn mươi năm đã qua là một chu trình đặc biệt gắn với sự khởi đầu, trưởng thành và ngày càng hoàn thiện một mô hình đào tạo năng khiếu đặc biệt. Đó là hướng đào tạo mũi nhọn có tính đột phá, đào tạo các thế hệ học sinh có năng khiếu trong lĩnh vực toán học, tin học và khoa học tự nhiên: Vật lý, Hoá học và Sinh học. Trong điều kiện thiếu thốn và đầy thách thức, chúng ta đã dũng cảm tìm hướng đi phù hợp, đã đi lên được trong tìm tòi, tích luỹ kinh nghiệm và sáng tạo. Các thế hệ Thầy và Trò đã định hình và tiếp cận với thế giới văn minh tiên tiến và khoa học hiện đại, cập nhật thông tin, sáng tạo phương pháp và tập dượt nghiên cứu. Gắn với việc tích cực đổi mới phương pháp dạy và học, chương trình đào tạo chuyên Toán đang hướng tới xây dựng hệ thống chuyên đề, đang nỗ lực và tích cực khởi động chuẩn bị cho việc tổ chức Kỳ thi Olympic Toán quốc tế năm 2007 tại Việt Nam, kỷ niệm 40 năm các Hệ đào tạo năng khiếu toán học phổ thông.

Sau 40 năm, có thể nói, giáo dục mũi nhọn phổ thông (giáo dục năng khiếu) đã thu được những thành tựu rực rỡ, được Nhà nước đầu tư có hiệu quả, xã hội thừa nhận và bạn bè quốc tế khâm phục. Các đội tuyển quốc gia tham dự các kỳ thi Olympic quốc tế có bề dày thành tích mang tính ổn định và có tính kế thừa. Đặc biệt, năm nay, các Đội tuyển Toán và Tin quốc gia tham dự thi Olympic quốc tế đã đạt được thành tích nổi bật.

Từ nhiều năm nay, Các Hệ năng khiếu Toán học và các Trường THPT Chuyên thường sử dụng song song các sách giáo khoa đại trà kết hợp với sách giáo khoa chuyên biệt và sách chuyên đề cho các Hệ THPT Chuyên. Học sinh các lớp năng khiếu đã tiếp thu tốt các kiến thức cơ bản theo thời lượng hiện hành do Bộ GD và ĐT ban hành.

Hiện nay, chương trình cải cách giáo dục đang bước vào giai đoạn hoàn chỉnh bộ SGK mới. Thời lượng kiến thức cũng như trật tự kiến thức cơ bản có những thay đổi đáng kể. Các kiến thức này đang được cân nhắc để nó vẫn nằm trong khuôn khổ hiện hành của các kiến thức nâng cao đối với các lớp chuyên toán. Vì lẽ đó, việc tiến hành viết hệ thống các sách chuyên đề cho các lớp năng khiếu cần được tiến hành khẩn trương và được xem xét toàn diện từ phía các chuyên gia giáo dục và các cô giáo, thầy giáo đang trực tiếp giảng dạy các lớp chuyên.

Được sự cho phép của Bộ GD và ĐT, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN phối hợp cùng với các chuyên gia, các nhà khoa học, các cô giáo, thầy giáo thuộc ĐHSPHN, ĐHQG TpHCM, ĐH Vinh, Viện Toán Học, Hội Toán Học Hà Nội, NXBGD, Tạp Chí Toán Học và Tuổi Trẻ, các Trường THPT Chuyên, Các

Sở GD và ĐT,... tổ chức bồi dưỡng các chuyên đề sau đại học nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi các môn Toán học và khối kiến thức khoa học tự nhiên như là một tủ sách đặc biệt phục vụ bồi dưỡng học sinh giỏi.

Chúng tôi xin giới thiệu cuốn sách của nhóm các chuyên gia, các thầy giáo với sự tham gia đông đảo của các đồng nghiệp tham dự Trường hè 2005 về chuyên đề "Bất đẳng thức và các bài toán cực trị".

Cuốn sách này nhằm cung cấp một số kiến thức chuyên đề bất đẳng thức ở mức độ khó về đại số, số học, hình học và giải tích. Đây cũng là chuyên đề và bài giảng mà các tác giả đã giảng dạy cho học sinh các đội tuyển thi Olympíc Toán học quốc gia và quốc tế.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn các bạn đọc cho những ý kiến đóng góp để cuốn sách ngày càng hoàn chỉnh.

T/M Tập thể tác giả

GS TSKH Nguyễn Văn Mậu

# Bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình

Nguyễn Văn Mậu
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Trong bài này chúng ta đề cập đến một số phương pháp chứng minh truyền thống Bất đẳng thức giữa các giá trị trung bình cộng và trung bình nhân theo ý tưởng của các toán học nổi tiếng và một số cách chứng minh đưa ra trong thời gian gần đây.

**Định lý 1.** *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{0}$$

*Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*

## 1 Quy nạp kiểu Cauchy

Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất vào năm 1821 (*Cauchy A.L., Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, $I^{re}$ partie, Analyse alge'brique, Paris, Debure, 1821*) để chứng minh Định lý 1. Một số người đã lợi dụng tình huống này để gọi tên bất đẳng thức (0) là Bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên, cho đến nay, theo thông lệ quốc tế và theo các gọi của các nhà toán học thì (0) là Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng (trung bình số học) và trung bình nhân (trung bình hình học).

Từ hệ thức bậc hai

$$u_1^2 + u_2^2 \geqslant 2u_1u_2, \ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

ta suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2}, \ \forall x_1, x_2 \text{ không âm.} \tag{1}$$

Thay $x_1, x_2$ lần lượt bằng các biến mới $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ và $\dfrac{x_3+x_4}{2}$, từ (1) ta nhận được

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqslant \left[\frac{x_1+x_2}{2}\frac{x_3+x_4}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant [(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}. \qquad (2)$$

ư Tiếp tục quá trình như trên ta thấy bất đẳng thức (0) đúng với $n = 1, 2.4, \ldots$ và nói chung, đúng với $n$ là luỹ thừa của 2. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

Bây giờ ta thực hiện quy trình quy nạp theo hướng xuống phía dưới. Ta chứng minh rằng, khi bất đẳng thức (0) đúng với $n$ $(n > 1)$ thì nó cũng đúng với $n-1$. Thay $x_n$ trong (0) bởi

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

và giữ nguyên các biến $x_i$ khác, từ (0) ta thu được

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

hay

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

Từ kết quả đã chứng minh theo cặp hướng (lên-xuống), ta thu được phép chứng minh quy nạp của Định lý 1.

Tiếp theo, theo đúng cách chứng minh quy nạp kiểu Cauchy, ta dễ dàng chứng minh Bất đẳng thức Ky Fan sau đây.

**Định lý 2.** *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương trong $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Khi đó*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)\right]^n}. \qquad (3)$$

*Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

## 2 Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp Vieete

Đa thức $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với bộ $n$ biến số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được hiểu là hàm số (biểu thức) có dạng

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{N} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

trong đó

$$M_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=k} a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \ \ j_i \in \mathbb{N} \ (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (1)$$

Trong mục này ta quan tâm chủ yếu đến các dạng đa thức đồng bậc (1) biến số thực và nhận giá trị thực, đặc biệt là các đa thức đối xứng sơ cấp quen biết liên quan đến các hằng đẳng thức đáng nhớ trong chương trình toán trung học phổ thông.

Trước hết, ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(x + a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.$$

Nếu ta coi $(x + a)^n$ như là tích của $n$ thừa số: $(x + a)(x + a) \cdots (x + a)$, thì khi đó tích

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)$$

cũng có thể viết dưới dạng một biểu thức tương tự như công thức khai triển nhị thức Newton như sau:

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} p_j^{n-k} x^k,$$

trong đó

$$\begin{cases} p_1 & = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \\ p_2^2 & = \frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j}{\binom{n}{2}}, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_n^n & = a_1 a_2 \cdots a_n. \end{cases} \quad (2)$$

Vậy nên, nếu các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đều dương (hoặc không âm và không đồng thời bằng 0) thì không mất tính tổng quát, ta có thể coi các số $p_1, p_2, \ldots, p_n$ đều là số dương (không âm). Từ (2), ta thu được

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \\ p_2 &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j}{\binom{n}{2}}}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \end{cases} \tag{3}$$

Ta thấy, $p_1$ chính là trung bình cộng, $p_n$ là trung bình nhân, và do đó, các $p_j$ khác cũng là các đại lượng trung bình cần đặt tên cho chúng như là những đối tượng cơ bản cần tập trung nghiên cứu.

**Định nghĩa 1.** *Cho $\overline{a}$ là bộ $n$ số dương $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$. Khi đó*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) \\ &= x^n + E_1(\overline{a})x^{n-1} + E_2(\overline{a})x^{n-2} + \ldots + E_n(\overline{a}), \end{aligned}$$

*trong đó*

$$E_1(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ \ E_2(\overline{a}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j, \ldots,\ \ E_n(\overline{a}) = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

*Đặt $E_0(\overline{a}) = 1$. Ta gọi $E_r(\overline{a})$ $(r \in \{1, \ldots, n\})$ là các hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp thứ $r$ ($E_r(\overline{a})$ là tổng của tất cả các tích $r$ số khác nhau của bộ số $\overline{a}$).*

Ký hiệu

$$P_r(\overline{a}) = \frac{r!(n-r)!}{n!} E_r(\overline{a}).$$

**Định nghĩa 2.** *Giả sử $x_1, x_2, \ldots x_n$ là bộ $n$ các số thực không âm (ký hiệu bởi $(\overline{x})$) và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là bộ các số thực không âm khác (được ký hiệu bởi $(\overline{y})$).*

*Hai dãy $(\overline{x})$ và $(\overline{y})$ được gọi là đồng dạng (và ký hiệu $(\overline{x}) \sim (\overline{y})$ nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ sao cho ta có $x_j = \lambda y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.*

**Bài toán 1.** *Cho $\overline{a}$ là bộ $(a_1 \dots a_n)$ các số thực dương. Đặt $P_0 = 1$, $P_k = P_k(\overline{a})$; $E_r = E_r(\overline{a})$. Chứng minh rằng*

$$P_{k-1}.P_{k+1} \leqslant P_k^2 \ \ (k = 1, 2, \dots n-1).$$

*(Nếu các $a_i$ đều dương và không đồng thời bằng nhau thì ta có dấu bất đẳng thức thực sự).*

**Chứng minh .**

Giả sử

$$f(x,y) = (x + a_1y)(x + a_2y)\dots(x + a_ny) = E_0x^n + E_1x^{n-1}y + \dots + E_ny^n,$$

$E_i$ là tổng tất cả các tích $i$ số khác nhau,

$$P_k = \frac{k!(n-k)!}{n!}E_k.$$

Vì tất cả các $a_i > 0$ và $\dfrac{x}{y} = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $f(x,y) = 0$ nên $\dfrac{x}{y} = 0$ không phải là nghiệm bội trong các phương trình nhận từ đạo hàm của nó.

Từ đó ta có thể kết luận rằng các số $P_i$ dương, tức là phương trình

$$P_{k-1}x^2 + 2P_kxy + P_{k+1}y^2 = 0$$

nhận được từ $f(x,y) = 0$ bằng cách lấy vi phân liên tiếp theo $x$ và $y$. Do phương trình này có nghiệm thực nên $P_{k-1}P_{k+1} \leqslant P_k^2$.

**Bài toán 2.** *Chứng minh bất đẳng thức*

$$E_{r-1}E_{r+1} \leqslant E_r^2.$$

**Chứng minh.**

Từ bất đẳng thức trong Bài toán 3 ta có

$$P_{k-1}P_{k+1} \leqslant P_k^2.$$

Suy ra

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!}E_{k-1}\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}E_{x+1} \leqslant \Big(\frac{k!(n-k)!}{n!}\Big)E_k^2$$

hay

$$\frac{(k-1)(n-k+1)}{k(n-k)}E_{k-1}.E_{k+1} \leqslant E_k^2 \ E_{k-1}.E_{k+1} \leqslant E_k^2.$$

**Bài toán 3.** *Cho các số $a_i > 0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ và không đồng thời bằng nhau. Chứng minh bất đẳng thức*

$$P_1 > P_2^{\frac{1}{2}} > P_3^{\frac{1}{3}} > \cdots > P_n^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

**Chứng minh.** Theo bất đẳng thức trong Bài toán 1, ta có

$$\begin{gathered} P_0P_2 < P_1^2 \\ (P_1P_3)^2 < P_2^4 \\ \dots\dots\dots \\ (P_{r-1}P_{r+1})^r < P_r^{2r} \end{gathered}$$

Suy ra

$$\begin{gathered} (P_0P_2)(P_1P_3)^2 \dots (P_{r-1}P_{r+1})^r < P_1^2P_2^4 \cdots P_r^{2r} \\ \Rightarrow P_{r+1}^r < P_r^{r+1} \Rightarrow P_r^{\frac{1}{r}} > P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}. \end{gathered}$$

**Nhận xét 1.** *Ta dễ dàng chứng minh $P_{r-1}P_{r+1} < P_r^2$ bằng phương pháp qui nạp.*

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức đúng với $n-1$ số dương $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ và đặt $E'_r, P'_r$ là các $E_r, P_r$ tạo bởi $n-1$ số ấy và giả sử tất cả các số đó không đồng thời bằng nhau.

Khi đó $E'_r = a_nE'_{r-1} \Rightarrow P_r = \dfrac{r}{n}P'_r + \dfrac{r}{n}a_nP'_{r-1}$.

Từ đó suy ra

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned} A =& \{(n-r)^2 - 1\}P'_{r-1}P'_{r+1} - (n-r)^2P'_r \\ B =& (n-r+1)(r+1).P'_{r-1}P'_{r+1} + (n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} - \\ & -2(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} \\ C =& (r^2-1)P'_{r-2}P'_r - r^2P^2_{r-1}. \end{aligned}$$

Vì các $a_i$ không đồng thời bằng nhau nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&P'_{r-1}P'_{r+1} < P'_r P'_{r-2} - P'_r < P'_{R-1}\\
&P'_{r-2}P'_{r+1} < P'_{r-1}P'_r \Rightarrow A < -P'_r, B < 2P'_{r-1}P'_r, C < P'_{r-1}\\
&n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P'_n) < -(P'_r - a_n P'_{r-1}) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Điều này vẫn đúng khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$. Khi đó $a_n \neq a_1$.

Từ bất đẳng thức (2), ta thu được bất đẳng thức sau:

**Hệ quả 1.**

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n,$$

*trong đó*

$$\begin{cases}
p_1 & = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\\
p_2 & = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j}{\binom{n}{2}}},\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
p_n & = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.
\end{cases}$$

*Đặc biệt, $p_1 \geqslant p_n$. Đó chính là Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân.*

## 3 Quy nạp kiểu Ehlers

Ta chứng minh Định lý 1 đối với bộ số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mà

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1. \tag{1}$$

Khi đó (0) có dạng

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n. \tag{2}$$

Giả thiết (2) đúng với bộ $n$ số thoả mãn (1). Giả thiết rằng ta có bộ $n+1$ số dương thoả mãn điều kiện:

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1.$$

Giả thiết rằng (không mất tổng quát) $x_1$ và $x_2$ là hai số từ bộ $n+1$ số trên có tính chất:

$$x_1 \geqslant 1,\ \ x_2 \leqslant 1.$$

Khi đó

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leqslant 0$$

hay

$$x_1x_2 + 1 \leqslant x_1 + x_2. \tag{3}$$

Từ (3) và do bộ $n$ số $x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ có tính chất

$$(x_1x_2)x_3x_4 \cdots x_{n+1} = 1,$$

suy ra

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geqslant 1 + x_1x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geqslant 1 + n.$$

Định lý được chứng minh.

## 4 Đồng nhất thức Hurwitz

Xét hàm số $n$ biến thực $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ký hiệu $Pf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tổng các $f$ theo tất cả $n!$ hoán vị của các đối số $x_i$. Với quy ước như vậy, ta có

$$\begin{cases} Px_1^n = (n-1)!(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n), \\ Px_1x_2 \ldots x_n = n!x_1x_2 \cdots x_n. \end{cases}$$

Xét các biểu thức $g_k$ xác định theo công thức sau đây

$$\begin{cases} g_1 & = P[(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2)], \\ g_2 & = P[(x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2)x_3], \\ g_3 & = P[(x_1^{n-3} - x_2^{n-3})(x_1 - x_2)x_3x_4], \\ & \cdots\cdots\cdots \\ g_{n-1} & = P[(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)x_3 \ldots x_n]. \end{cases}$$

Nhận xét rằng khi các $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ đều không âm thì các biểu thức $g_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, theo định nghĩa, cũng nhận giá trị không âm. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} g_k &= P[(x_1^{n-k} - x_2^{n-k})(x_1 - x_2)x_3x_4 \ldots x_{k+1}] \\ &= P[(x_1 - x_2)^2(x_1^{n-k-1} + \cdots + x_2^{n-k-1})x_3x_4 \ldots x_{k+1}] \end{aligned}$$

luôn luôn là một số không âm khi các $x_i \geqslant 0$.

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} g_1 &= Px_1^n + Px_2^n - Px_1^{n-1}x_2 - Px_2^{n-1}x_1 \\ &= 2Px_1^n - 2Px_1^{n-1}x_2. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\begin{cases} g_2 & = 2Px_1^{n-1}x_2 - 2Px_1^{n-2}x_2x_3, \\ g_3 & = 2Px_1^{n-2}x_2x_3 - 2Px_1^{n-3}x_2x_3x_4, \\ \dots\dots\dots & \\ g_{n-1} & = 2Px_1^2x_2\dots x_{n-1} - 2Px_1x_2\dots x_n. \end{cases}$$

Lấy tổng các $g_i$, ta thu được

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1} = 2Px_1^n - 2Px_1x_2\dots x_n. \tag{1}$$

Theo định nghĩa thì (1) chính là

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} - x_1x_2\cdots x_n = \frac{1}{2n!}(g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1}) \geqslant 0.$$

## 5 Phương trình hàm

Xét bài toán xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$$

với điều kiện

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Ký hiệu giá trị lớn nhất của $M$ là $f_n(a)$ ứng với $n \in \mathbb{N}$ và $a > 0$.

Ta cố định $x_n$ và như vậy cần chọn $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ thoả mãn điều kiện

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a - x_n$$

để tích $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ là lớn nhất.

Từ đây suy ra

$$f_n(a) = \max_{0 \leqslant x_n \leqslant a} [x_n f_{n-1}(a - x_n)],\ n = 2, 3, \ldots,$$

trong đó $f_1(a) = a$.

Thực hiện đổi biến $x_i = ay_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ta thu được

$$f_n(a) = a^n f_n(1).$$

Từ đây suy ra

$$f_n(1) = f_{n-1}(1)[\max_{0 \leqslant y \leqslant 1} y(1-y)^{n-1}] = \frac{f_{n-1}(1)(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Từ hệ thức $f_1(1) = 1$ ta thu được $f_n(1) = \frac{1}{n^n}$, chính là điều phải chứng minh của Định lý 1.

# 6 Đồng nhất thức Jacobsthal

Sử dụng hằng đẳng thức quen biết

$$t^n - nt + n - 1 = (t-1)[t^{n-1} + t^{n-1} + \cdots + t - (n-1)],\ n \in \mathbb{N}^*,$$

ta suy ra

$$t^n + n - 1 \geqslant nt,\ \forall t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Ký hiệu

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,\ G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Khi đó ta có đồng nhất thức (Jacobsthal) sau:

$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n} \Big[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \Big(\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big)^n\Big]. \tag{2}$$

Theo (1) thì

$$\Big(\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big)^n \geqslant n\frac{G_n}{G_{n-1}} + 1 - n. \tag{3}$$

Từ (3) và (2) ta thu được

$$A_n \geqslant \frac{G_{n-1}}{n}\Big[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} - (n-1) + n\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big]$$

hay

$$A_n - G_n \geqslant \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1},\ n > 1.$$

Từ đây suy ra $A_n \geqslant G_n$.

## 7 Cực trị của hàm số

Như ta đã thấy, phương pháp quy nạp "tiến-lùi" của Cauchy cho ta thuật toán hữu hiệu để chứng minh bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân. Phải chăng, ta có thể chứng minh bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân theo phương pháp quy nạp thông thường? Điều này thực hiện được thông qua các đồng nhất thức như đã thấy ở các mục trên. Sau đây, ta sử dụng phương pháp khảo sát hàm số một biến để thực hiện phép chứng minh quy nạp bất đẳng thức cực trên.

Xét dãy số dương $x_1, x_2, \ldots$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, cố định, ta ký hiệu

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Xét hàm số

$$f_n(t) := \frac{1}{n}\Big(x_n + t + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\Big) - \sqrt[n]{(x_n + t)\prod_{i=1}^{n-1} x_i}$$

trong khoảng $(-x_n, +\infty)$. Ta có $f_n(0) = A_n - G_n$ và

$$f_n'(t) == \frac{1}{n} - \frac{1}{n}(x_n + t)^{\frac{1-n}{n}} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i}.$$

Giải phương trình $f_n'(t) = 0$, ta thu được nghiệm duy nhất

$$t_n = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\Big)^{\frac{1}{n-1}} - x_n,$$

nên

$$f_n(t_n) = \min f_n(t)$$

và hiển nhiên, $f_n(0) \geqslant f_n(t_n)$.

Sử dụng giả thiết quy nạp: $A_{n-1} - G_{n-1} \geqslant 0$, ta thấy

$$f_n(t_n) = \frac{1}{n}\Big(x_n + t_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\Big) - \sqrt[n]{(x_n + t_n)\prod_{i=1}^{n-1} x_i}$$

$$= \frac{G_{n-1} + (n-1)A_{n-1}}{n} - G_{n-1} = \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}).$$

Vậy nên

$$A_n - G_n \geqslant \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}) \geqslant 0.$$

## 8 Hàm exponent tự nhiên

Một trong những tính chất cực kỳ quan trọng của hàm mũ (exponent) tự nhiên $f(x) = e^x$ là tính bất biến ( dừng) của nó đối với toán tử vi phân

$$(e^x)' = e^x.$$

Từ đó dễ dàng kiểm chứng bất đẳng thức quen thuộc

$$e^x \geqslant 1 + x \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{dấu } " = " \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó, ta nhận được hệ qủa

**Bài toán 4.**

$$e^{x-1} \geqslant x \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \textit{dấu } " = " \Leftrightarrow x = 0.$$

Gọi $A_n$ là trung bình cộng của các số $x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Giả sử $x_i > 0$ $\forall i$, khi đó ta có

$$\frac{x_1}{A_n} \leqslant e^{\frac{x_1}{A_n}} - 1$$

$$\ldots$$

$$\frac{x_n}{A_n} \leqslant e^{\frac{x_n}{A_n}} - 1$$

Suy ra

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{A_n^n} \leqslant e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{A_n}-n} = e^{n-n} = e^0 = 1$$

hay

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leqslant A_n^n \text{ hay } \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}.$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{A_n} = \cdots = \dfrac{x_n}{A_n} = 1$ hay $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

# 9 Hoán vị

Nhận xét rằng, nếu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là một hoán vị của bộ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, thì

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant n.$$

Thật vậy, không giảm tổng quát, ta coi

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n.$$

Khi đó, hiển nhiên rằng

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}.$$

Vì vậy

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_n} = n.$$

Tiếp theo, ta đặt

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},\ a_1 = \frac{x_1}{G_n},\ a_2 = \frac{x_1 x_2}{G_n^2}, \ldots, a_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{G_n^n} = 1.$$

Khi đó, theo nhận xét ở trên, thì

$$\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant n$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{G_n} + \frac{x_2}{G_n} + \cdots + \frac{x_n}{G_n} \geqslant n,$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

# Hàm tựa đơn điệu, tựa lồi, lõm

Nguyễn Văn Mậu
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Ta nhắc lại định nghĩa:

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và đơn điệu tăng trên $I(a,b)$ thì khi đó ứng với mọi $x_1, x_2 \in I(a,b)$, ta đều có

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2,$$

và ngược lại, ta có

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2; \ \forall x_1, x_2 \in I(a,b),$$

khi $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a,b)$.

Tuy nhiên, trong ứng dụng, có nhiều hàm số chỉ đòi hỏi có tính chất yếu hơn, chẳng hạn như:

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2, \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \text{ mà } \ x_1 + x_2 \leqslant 1,$$

thì không nhất thiết $f(x)$ phải là một hàm đơn điệu tăng trên $(0,1)$.

Ví dụ, với hàm số $f(x) = \sin \pi x$, ta luôn có khẳng định sau đây.

**Bài toán 1.** *Nếu $A, B, C$ là các góc của $\Delta ABC$ thì*

$$\sin A \leqslant \sin B \Leftrightarrow A \leqslant B. \tag{1}$$

Như vậy, mặc dù hàm $f(x) = \sin \pi x$ không đồng biến trong $(0,1)$, ta vẫn có bất đẳng thức (suy từ (1)), tương tự như đối với hàm số đồng biến trong $(0,1)$:

$$\sin \pi x_1 \leqslant \sin \pi x_2 \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2, \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \text{ mà } \ x_1 + x_2 < 1. \tag{2}$$

Ta đi đến định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 1.** *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ được gọi là hàm số tựa đồng biến trong khoảng đó, nếu*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2, \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \text{ mà } \ x_1 + x_2 < b. \tag{3}$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm tựa nghịch biến trong một khoảng cho trước.

**Định nghĩa 2.** *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ được gọi là hàm số tựa nghịch biến trong khoảng đó, nếu*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2, \ \forall x_1, x_2 > 0 \quad \text{mà} \quad x_1 + x_2 < b. \tag{4}$$

**Bài toán 2.** *Mọi hàm $f(x)$ tựa đồng biến trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ đều đồng biến trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right)$.*

**Chứng minh** được suy trực tiếp từ Định nghĩa 1. Thật vậy, khi $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ thì hiển nhiên, $x_1 + x_2 < b$ và ta thu được

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2, \ \forall x_1, x_2 \in \left(0, \frac{b}{2}\right). \tag{5}$$

Hệ thức (5) cho ta điều cần chứng minh.

**Bài toán 3.** *Giả thiết rằng hàm $h(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right]$. Khi đó hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ h(b-x), & \text{khi } x \in \left[\frac{b}{2}, b\right), \end{cases}$$

*là hàm số tựa đồng biến trong $(0,b)$.*

**Định lý 1.** *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ là hàm tựa đồng biến trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thoả mãn:*

*(i) $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right)$*

*(ii) $f(x) \geqslant f(b-x), \ \forall x \in \left[\frac{b}{2}, b\right)$.*

**Chứng minh.**

*Điều kiện cần.* Khi hàm $f(x)$ tựa đồng biến trong $(0,b)$ thì theo Bài toán 1, hàm $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Xét $x \in \left[\frac{b}{2}, b\right)$. Khi đó, để $x_1 \in (0,b)$ sao cho đồng thời $x_1 < x$ và $x_1 + x < b$, ta cần chọn $x_1 \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ và $x_1 < b - x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$. Do vậy, mọi $x_2 \in \left[\frac{b}{2}, b\right)$ ta đều có $x_1 < x_2$ và để

$x_1+x_2 < b$ thì dễ thấy $x_2 \in \left(\frac{b}{2}, b-x_1\right)$. Vì theo giả thiết, thì $f(x_1) < f(x_2)$ với mọi $x_2 \in \left(\frac{b}{2}, b-x_1\right)$, nên $f(x_2) > f(x)$ (do $x_1 < x$)

## 1 Hàm tựa lồi và hàm tựa lõm

Ta nhắc lại các tiêu chuẩn đơn giản để nhận biết tính lồi (lõm) của một hàm số.

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(a, b)$. Khi đó

(i) điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $(a, b)$ là

$$f''(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in (a, b).$$

(ii) điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lõm trên $(a, b)$ là

$$f''(x) \leqslant 0, \ \ \forall x \in (a, b).$$

Tuy nhiên, trong ứng dụng, ta nhận thấy, do đặc thù của dạng toán, có khi chỉ đòi hỏi hàm số đã cho có tính chất yếu hơn tính lồi (lõm), chẳng hạn như:

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \text{ mà } \ x_1+x_2 \leqslant 1,$$

thì không nhất thiết $f(x)$ phải là một hàm lồi trên $(0, 1)$.

Cũng vậy, đối với hàm số $f(x)$ mà

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \text{ mà } \ x_1+x_2 \leqslant 1,$$

thì không nhất thiết đòi hỏi $f(x)$ phải là một hàm lõm trên $(0, 1)$.

Ví dụ, với hàm số $f(x) = \cos \pi x$, ta luôn có khẳng định sau đây.

**Bài toán 1.** *Nếu $A, B, C$ là các góc của $\Delta ABC$ thì*

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \leqslant \cos \frac{A+B+C}{3}. \tag{1}$$

Như vậy, mặc dù hàm $f(x) = \cos(\pi x)$ không là hàm lõm trong $(0, 1)$, ta vẫn có bất đẳng thức ( suy từ (1)), tương tự như đối với hàm số lõm trong $(0, 1)$:

$$\frac{\cos(\pi x_1) + \cos(\pi x_2)}{2} \leqslant \cos \frac{(x_2+x_2)\pi}{2} \ \ \text{mà} \ \ x_1+x_2 < 1. \tag{2}$$

Ta đi đến định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 3.** *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ được gọi là hàm tựa lồi trong khoảng đó, nếu*

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 > 0 \quad \text{mà} \quad x_1+x_2 \leqslant b. \tag{3}$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm tựa lõm trong một khoảng cho trước.

**Định nghĩa 4.** *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ được gọi là hàm tựa lõm trong khoảng đó, nếu*

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 > 0 \quad \text{mà} \quad x_1+x_2 \leqslant b. \tag{4}$$

Từ định nghĩa, ta có ngay khẳng định:

**Nhận xét 1.** *Mọi hàm $f(x)$ lồi (lõm) trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ đều là hàm tựa lồi (lõm) trong khoảng đó.*

**Nhận xét 2.** *Nếu hàm $f(x)$ tựa lồi trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ thì nó là hàm tựa lồi trong mọi khoảng $(0,a)$ với $0 < a \leqslant b$.*

**Nhận xét 3.** *Mọi hàm $f(x)$ tựa lồi (lõm) trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ đều là hàm lồi (lõm) trong khoảng $(0,a)$ với $0 < a \leqslant \frac{b}{2}$.*

**Chứng minh.** Thật vậy, giả sử $f(x)$ tựa lồi trong $(0,b)$. Khi $x_1, x_2 \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big)$ thì hiển nhiên, $x_1 + x_2 < b$ và ta thu được

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big).$$

Hệ thức này chứng tỏ $f(x)$ là một hàm lồi trong khoảng $\Big(0, \frac{b}{2}\Big)$.

**Định lý 2.** *Giả thiết rằng hàm $h(x)$ có đạo hàm cấp hai và lồi trên $\Big(0, \frac{b}{2}\Big]$. Khi đó hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{khi} \quad x \in \Big(0, \dfrac{b}{2}\Big], \\ h(b-x), & \text{khi} \quad x \in \Big[\dfrac{b}{2}, b\Big), \end{cases}$$

*sẽ là một hàm tựa lồi trong $(0,b)$.*

**Chứng minh.** Thật vậy, theo giả thiết thì $f(x)$ có đạo hàm bậc hai trên $(0, b)$ và do $h''(x) \geqslant 0$ trên $\left(0, \frac{b}{2}\right]$, nên

$$f''(x) = \begin{cases} h''(x) \geqslant 0, & \text{khi } \ x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ h''(b-x) \geqslant 0, & \text{khi } \ x \in \left[\frac{b}{2}, b\right). \end{cases}$$

Vậy nên $f(x)$ là một hàm tựa lồi trên $(0, b)$.

**Nhận xét 4.** *Kết luận của nhận xét trên vẫn đúng đối với hàm $h(x)$ lồi tuỳ ý trên $\left(0, \frac{b}{2}\right]$.*

**Định lý 3.** *Cho hàm số $h(x)$ liên tục và lồi trong $\left(0, \frac{b}{2}\right]$. Xét hàm số $f(x)$ xác định theo công thức sau:*

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \textit{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right] \\ 2h\left(\frac{b}{2}\right) - h(b-x), & \textit{khi } x \in \left(\frac{b}{2}, b\right). \end{cases}$$

*Khi đó, $f(x)$ là một hàm tựa lồi trên $(0, b)$.*

**Chứng minh.**

Theo giả thiết, $h(x)$ lồi trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right]$ và $f(x)$ xác định và liên tục trong $(0, b)$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức (3):

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0, b) \ \text{ với } \ x_1 + x_2 < b.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0, b) \ \text{ với } \ x_1 + x_2 < b. \tag{5}$$

Coi $x_1 < x_2$. Khi đó, nếu $x_2 < \frac{b}{2}$ thì (5) có dạng

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{h(x_1) + h(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0, b) \ \text{ với } \ x_1 + x_2 < b.$$

Điều này là hiển nhiên.

Xét trường hợp $x_2 > \dfrac{b}{2}$. Đặt $\dfrac{b}{2} = d$. Khi đó, (5) có dạng

$$h\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{h(x_1) + 2h(d) - h(b - x_2)}{2}.$$

Dễ dàng suy ra

$$b - x_2, x_1 + x_2 - d \in (0, d), \quad (b - x_2) + (x_1 + x_2 - d) = x_1 + d.$$

Không mất tổng quát, coi $x_1 + x_2 - \dfrac{b}{2} \leqslant b - x_2$. Khi đó

$$x_1 \leqslant x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leqslant b - x_2 \leqslant d$$

và theo Định lý Lagrange, ta có

$$h(d) - h(b - x_2) = h'(u)(d - -x_2), \quad u \in (b - x_2, d) \tag{6}$$

và

$$h(x_1 + x_2 - d) - h(x_1) = h'(v)(d - x_2), \quad v \in (x_1, x_1 + x_2 - d). \tag{7}$$

Vì $v \leqslant u$ nên $h'(v) \leqslant h'(u)$, từ (6) và (7), ta thu được

$$h(d) + h(x_1) \geqslant h(x_1 + x_2 - d) + h(b - x_2). \tag{8}$$

Do

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) = f\Big(\frac{x_1 + x_2 - d + d}{2}\Big) \leqslant \frac{f\Big(\frac{x_1 + x_2 - d}{2} + f(d)\Big)}{2},$$

nên

$$f\Big(x_1 + x_2 - d\Big) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) - f(d). \tag{9}$$

(8) và (9) cho ta

$$f(d) + f(x_1) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) - f(d) + f(b - x_2),$$

hay

$$2f(d) - f(b - x_2) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) - f(x_1). \tag{10}$$

Mặt khác, theo giả thiết, ta có

$$f(x_2) + f(b - x_2) \geqslant 2f(d),$$

hay

$$2f(d) - f(b - x_2) \leqslant f(x_2).$$

Hệ thức này và (10) cho ta (5).

**Định lý 4.** *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0,b)$ là một hàm tựa lồi trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thoả mãn:*

*(i)* $f(x)$ *lồi trong* $\left(0, \frac{b}{2}\right]$,

*(ii)* $f(x) + f(b-x) \geqslant 2f\left(\frac{b}{2}\right), \ \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$.

**Chứng minh.**

*Điều kiện cần* là hiển nhiên.

*Điều kiện đủ.* Giả sử $f(x)$ lồi trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right]$ và

$$f(x) + f(b-x) \geqslant 2f\left(\frac{b}{2}\right), \ \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right).$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0,b) \text{ với } \ x_1 + x_2 < b. \tag{11}$$

Coi $x_1 < x_2$. Khi đó, hiển nhiên $x_2 < \frac{b}{2}$. Nếu $x_2 \leqslant \frac{b}{2}$ thì (11) là hiển nhiên.

Xét $x_2 > \frac{b}{2}$. Khi đó, dễ dàng suy ra

$$b - x_2, x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \in \left(0, \frac{b}{2}\right), \ (b - x_2) + (x_1 + x_2 - \frac{b}{2}) = x_1 + \frac{b}{2}.$$

Không mất tổng quát, coi $x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leqslant b - x_2$. Khi đó

$$x_1 \leqslant x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leqslant b - x_2 \leqslant \frac{b}{2}$$

và theo Định lý Lagrange, ta có

$$f\left(\frac{b}{2}\right) - f(b - x_2) = f'(u)\left(\frac{b}{2} - x_2\right), \ u \in \left(b - x_2, \frac{b}{2}\right) \tag{12}$$

và

$$f\left(x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\right) - f(x_1) = f'(v)\left(\frac{b}{2} - x_2\right), \ v \in \left(x_1, x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\right). \tag{13}$$

Vì $v \leqslant u$ nên $f'(v) \leqslant f'(u)$, từ (12) và (13), ta thu được

$$f\left(\frac{b}{2}\right) + f(x_1) \geqslant f\left(x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\right) + f(b - x_2). \tag{14}$$

Do

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) = f\Big(\frac{x_1+x_2-\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{2}\Big) \leqslant \frac{f\Big(\frac{x_1+x_2-\frac{b}{2}}{2}+f\Big(\frac{b}{2}\Big)\Big)}{2},$$

nên

$$f\Big(x_1+x_2-\frac{b}{2}\Big) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) - f\Big(\frac{b}{2}\Big). \qquad (15)$$

(14) và (15) cho ta

$$f\Big(\frac{b}{2}\Big) + f(x_1) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) - f\Big(\frac{b}{2}\Big) + f(b-x_2),$$

hay

$$2f\Big(\frac{b}{2}\Big) - f(b-x_2) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) - f(x_1). \qquad (16)$$

Mặt khác, theo giả thiết, ta có

$$f(x_2) + f(b-x_2) \geqslant 2f\Big(\frac{b}{2}\Big),$$

hay

$$2f\Big(\frac{b}{2}\Big) - f(b-x_2) \leqslant f(x_2). \qquad (17)$$

Hệ thức (16) và (17) cho ta điều cần chứng minh.

Tương tự, ta có tiêu chuẩn để nhận biết hàm tựa lõm trên một khoảng cho trước.

**Định lý 5.** *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0,b)$ là một hàm tựa lõm trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thoả mãn:*

*(i)* *$f(x)$ lõm trong $\Big(0,\dfrac{b}{2}\Big]$,*

*(ii)* $f(x) + f(b-x) \leqslant 2f\Big(\dfrac{b}{2}\Big),\ \forall x \in \Big(0,\dfrac{b}{2}\Big)$.

Từ Định lý 3 và 4, ta có thu được phương pháp dựng các hàm tựa lồi trên $(0,b)$ như sau.

**Hệ quả 1.** *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0,b)$ là một hàm tựa lồi trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm số $h_0(x)$ liên tục và lồi trong $\Big(0,\dfrac{b}{2}\Big]$ sao cho*

$$f(x) = \begin{cases} h_0(x), & \textit{khi } x \in \Big(0,\dfrac{b}{2}\Big] \\ h_1(x), & \textit{khi } x \in \Big(\dfrac{b}{2},b\Big), \end{cases}$$

*trong đó*

$$h_1(x) \geqslant 2h\Big(\frac{b}{2}\Big) - h(b-x),\ \ \forall x \in \Big(\frac{b}{2}, b\Big).$$

Tương tự, ta có cách xây dựng hàm tựa lõm trên một khoảng cho trước.

**Hệ quả 2.** *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lõm trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm số $h_0(x)$ liên tục và lõm trong $\Big(0, \frac{b}{2}\Big]$ sao cho*

$$f(x) = \begin{cases} h_0(x), & \textit{khi } x \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big] \\ h_1(x), & \textit{khi } x \in \Big(\frac{b}{2}, b\Big), \end{cases}$$

*trong đó*

$$h_1(x) \leqslant 2h\Big(\frac{b}{2}\Big) - h(b-x),\ \ \forall x \in \Big(\frac{b}{2}, b\Big).$$

Các định lý sau đây cho ta mối liên hệ chặt chẽ giữa hàm các tựa đồng biến (nghịch biến) với hàm tựa lồi (tựa lõm).

**Định lý 6.** *Hàm khả vi $f(x)$ là tựa đồng biến trên tập $(0, b)$ khi và chỉ khi mọi nguyên hàm $F(x)$ của nó đều là hàm tựa lồi trên tập đó.*

**Định lý 7.** *Hàm khả vi $f(x)$ là tựa nghịch biến trên tập $(0, b)$ khi và chỉ khi mọi nguyên hàm $F(x)$ của nó đều là hàm tựa lõm trên tập đó.*

## 2 Sắp thứ tự các trung bình $M_h(x, \alpha)$

Như đã thấy ở phần trên, bất bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân chỉ là sự sắp được của hai phần tử trong một dãy biểu thức sắp được thứ tự. Các biểu thức này là những hàm đối xứng sơ cấp. Tiếp theo, ta xét một số mở rộng các dạng trung bình sinh bởi các đa thức đối xứng. Các mở rộng này, chủ yếu dựa trên các tính chất của hàm số như tính đơn điệu (tựa đơn điệu) để so sánh , tính lồi, lõm (tựa lồi, lõm) để sắp thứ tự theo các đặc trưng cho trước.

Xét bộ $n$ số dương tuỳ ý

$$(x) := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

và bộ hệ số dương (thường được gọi là trọng đơn vị)

$$(\alpha) := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

**Định nghĩa 5.** *Xét các số thực $h \neq 0$. Khi đó tổng $M_h(x, \alpha)$ xác định theo công thức*

$$M_h(x, \alpha) = \Big( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \Big)^{\frac{1}{h}},$$

*được gọi là trung bình bậc $h$ (theo trọng $(\alpha)$).*

Nhận xét rằng, ứng với $h = -1$, $h = 1$ và $h = 2$, ta lần lượt nhận được các trung bình điều hoà, trung bình cộng và trung bình nhân.

**Bài toán 1.** *Với mỗi bộ $n$ số dương $(x)$ và trọng $(\alpha)$, ta đều có*

$$\lim_{h \to 0} M_h(x, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \tag{1}$$

*tức là, giới hạn là một trung bình nhân suy rộng.*

*Chứng minh.* Trước hết, ta tính giới hạn

$$\lim_{h \to 0} \ln(M_h(x, \alpha)) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h}{h}.$$

Theo quy tắc L'Hospital, ta tính được

$$\lim_{h \to 0} \ln(M_h(x, \alpha)) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i = \ln \Big( \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \Big).$$

Từ đây, dễ dàng suy ra (1). $\square$

**Bài toán 2.** *Với mỗi bộ $n$ số dương $(x)$ trọng $(\alpha)$, ta đều có*

$$\lim_{h \to +\infty} M_h(x, \alpha) = \max\{x_i; \ i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{2}$$

*Chứng minh.* Thật vậy, nếu đặt

$$x_s = \max\{x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

thì với mọi $h > 0$, ta có

$$\alpha_s^{\frac{1}{h}} x_s \leqslant M_h(x, \alpha) \leqslant x_s.$$

Từ đây, chuyển qua giới hạn ta thu được (2). □

Hoàn toàn tương tự, bằng cách đặt chuyển qua giới hạn khi $h \to -\infty$, ta có

**Bài toán 3.** *Với mỗi bộ n số dương* $(x)$ *trọng* $(\alpha)$, *ta đều có*

$$\lim_{h \to -\infty} M_h(x, \alpha) = \min\{x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{3}$$

*Chứng minh.* Thật vậy, để ý rằng

$$M_{-h}(x, \alpha) = \frac{1}{M_h\left(\dfrac{1}{x}, \alpha\right)}, \quad \forall h < 0.$$

Từ đây, chuyển qua giới hạn ta có ngay (3). □

Từ các kết qủa trên, ta quy ước:

$$M_0(x, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

$$M_{-\infty}(x, \alpha) = \min\{x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$
$$M_{+\infty}(x, \alpha) = \max\{x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Từ thứ tự sắp được

$$\min\{x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \max\{x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

ta có thứ tự sắp được

$$M_{-\infty}(x, \alpha) \leqslant M_0(x, \alpha) \leqslant M_{+\infty}(x, \alpha),$$

ứng với sự sắp thứ tự tự nhiên theo chiều tăng dần

$$-\infty,\ 0,\ +\infty.$$

Bây giờ ta có thể chứng minh một kết qủa mạnh hơn rằng, dãy $M_h(x, \alpha)$ là sắp được theo $h$ như là một hàm đồng biến của hàm số biến $h \in \mathbb{R}$.

**Bài toán 4.** *Với mỗi bộ n số dương* $(x)$ *trọng* $(\alpha)$*, ta đều có*

$$\frac{dM_h(x,\alpha)}{dh} \geqslant 0, \ \ \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

*Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

*Chứng minh.* Thật vậy, để ý rằng

$$\frac{h^2}{M_h(x,\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \frac{dM_h(x,\alpha)}{dh} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i^h - \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big) \ln\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big). \tag{4}$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra tính lồi của hàm số $g(x) := x\ln x$ trong $(0, +\infty)$. Thật vậy, ta có $g''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ ứng với mọi $x > 0$. Do vậy, với $g(x)$ (là hàm lồi), ta thu được

$$g(x_i) \geqslant f(x) + (x_i - x)g'(x), \ \ \forall x, x_i > 0.$$

Từ đây, chọn $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i) \geqslant g\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big)$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ln x_i \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \ln\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big). \tag{5}$$

Dấu đẳng thức trong (5) xảy ra khi và chỉ khi các số $x_i$ đều nhận giá trị bằng nhau. Từ (4) và (5) ta suy ra

$$\frac{dM_h(x,\alpha)}{dh} \geqslant 0, \ \ \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Như vậy, nếu các số $x_i$ không nhận giá trị bằng nhau thì $M_h(x,\alpha)$ là một hàm đồng biến theo biến $h \in \mathbb{R}$. Đồ thì của hàm $y = M_h(x,\alpha)$ có hai tiệm cận ngang $y = \min\{x_i;\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ và $y = \max\{x_i;\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

**Bài toán 5.** *Với mỗi bộ n số dương $(x)$ trọng $(\alpha)$, ta đều có*

$$f(h) = h \ln M_h(x, \alpha)$$

*là một hàm lồi trên* $\mathbb{R}$.

*Chứng minh.* Vì $f(h)$ là hàm khả vi, nên ta kiểm tra tính lồi trực tiếp thông qua tính đạo hàm của hàm số

$$f(h) = \ln\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big).$$

Ta có

$$f'(h) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h},$$

$$f''(h) = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h (\ln x_i)^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i\Big)^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)^2}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h (\ln x_i)^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i\Big)^2 \geqslant 0,$$

nên kéo theo $f''(h) \geqslant 0$. □

Từ đây, ta nhận được kết qủa của một bài toán tìm giá trị nhỏ nhất liên quan đến dạng trung bình bậc $h$ có trọng.

**Bài toán 6.** *Với mỗi bộ n số dương $(x)$ trọng $(\alpha)$, xét bộ các số $h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ với tổng*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = S,$$

*không đổi. Khi đó*

$$\prod_{i=1}^{n} M_{h_i}^{\alpha_i h_i} \geqslant M_S^S. \tag{6}$$

*Chứng minh.* Theo Bài toán 5 thì hàm số

$$f(h) = \ln\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)$$

là hàm lồi khả vi bậc hai nên

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big).$$

Từ đây, ta có ngay (6), đpcm. □

## 3 Sắp thứ tự các tổng $S_h(x)$

Xét bộ $n$ số dương tuỳ ý

$$(x) := (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Cũng tương tự như đối với trung bình $M_h(x, \alpha)$ trong mục trước, ta xét tổng bậc $h$ đối với bộ $(x)$.

**Định nghĩa 6.** *Xét các số thực $h \neq 0$. Khi đó tổng $S_h(x)$ xác định theo công thức*

$$S_h(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^h\Big)^{\frac{1}{h}}, \tag{1}$$

*được gọi là tổng bậc $h$ của bộ số $(x)$.*

Tính đơn điệu của tổng $S_h(x)$ được phát biểu dưới dạng sau.

**Bài toán 1.** *Với mỗi bộ $n$ số dương $(x)$, tổng $S_h(x)$ nghịch biến trong $(-\infty, 0)$ và trong $(0, +\infty)$. Ngoài ra,*

$$\lim_{h\to-\infty} S_h(x) = \min\{x_i;\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

*và*

$$\lim_{h\to+\infty} S_h(x) = \max\{x_i;\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

*Chứng minh.* Vì $S_h(x)$ khả vi trong các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$, nên ta kiểm tra tính đơn điệu trực tiếp bằng tính đạo hàm và xét dấu của nó trong các khoảng tương ứng. Sử dụng đẳng thức

$$h \ln S_h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^h$$

để tính đạo hàm hai vế theo $h$, ta dễ dàng suy ra kết luận của bài toán. $\square$

**Bài toán 2.** *Với mỗi bộ $n$ số dương $(x)$, hàm số sau: $f(h) := h \ln S_h(x)$, là một hàm lồi theo $h$.*

*Chứng minh.* Chứng minh được suy ra từ tính chất lồi của hàm số (xem Bài toán 5 ở mục trên) ư$F(h) := h \ln M_h(x, \alpha)$. $\square$

Tương tự, dễ dàng kiểm tra tính lồi của các hàm số $g_1(h) = S_h(x)$ và $g_2(h) := \ln S_h(x)$ trong $(0, +\infty)$. Từ đây, ta thu được

**Hệ quả 3.** *Với mỗi bộ $n$ số dương $(x)$ và bộ số dương $(\alpha)$, xét các bộ số $(h) = h_1, h_2, \ldots, h_n$ sao cho tổng*

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_n h_n = M$$

*không đổi. Khi đó*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_{h_i}^{\alpha_i} \geqslant S_M(x).$$

**Hệ quả 4.** *Với mỗi bộ $n$ số dương $(x)$ và bộ số dương $(\alpha)$, xét các bộ số $(h) = h_1, h_2, \ldots, h_n$ sao cho tổng*

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_n h_n = M$$

*không đổi. Khi đó*

$$\prod_{i=1}^{n} S_{h_i}^{\alpha_i} \geqslant S_M(x).$$

# VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN

Nguyễn Văn Mậu

*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Hiện nay, nhiều bài toán của Đại số và Giải tích trong chương trình phổ thông đã bắt đầu tiếp cận đến các đặc trưng cơ bản của hàm số gắn với các phép biến hình sơ cấp như tịnh tiến, phản xạ, đồng dạng, phép quay và phép nghịch đảo. Một số dạng toán khác liên quan đến các khái niệm cơ bản của hình học như khoảng cách, chu vi, diện tích,... Xin phép được giới thiệu với các bạn một số hàm số có tính chất tương tự như hàm khoảng cách, chu vi,...

## 1 Hàm khoảng cách

Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ ta đặt tương ứng một điểm $A(x, 0)$ trên trục hoành của mặt phẳng toạ độ Đề-các. Nhận xét rằng phép tương ứng đó là một-một và khoảng cách từ $A$ đến gốc toạ độ $O(0,0)$ được tính bằng công thức $\rho(OA) = \rho(x) = |x|$. Khi đó, hàm $\rho(x)$ có các tính chất sau:

(i) $\rho(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \rho(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$

(ii) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Trong mục này, ta sẽ khảo sát các hàm số có tính chất như hàm $\rho(x)$ và một số hàm số liên quan.

**Định nghĩa 1.** Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ được gọi là hàm khoảng cách nếu nó thoả mãn đồng thời các tính chất sau:

$$(i)\ f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0, \tag{1}$$

$$(ii)\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $\alpha \in (0, 1]$.

**Bài giải.** Nhận xét rằng hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ thoả mãn điều kiện (1) khi và chỉ khi $\alpha > 0$. Xét điều kiện (2). Với $x + y = 0$ thì (2) luôn luôn thoả mãn.

Xét trường hợp $x+y>0$. Khi đó

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| = 1.$$

Vì vậy

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|^{\alpha} + \left|\frac{y}{x+y}\right|^{\alpha} \geqslant 1, \ \forall \alpha \in (0,1]$$

và

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|^{\alpha} + \left|\frac{y}{x+y}\right|^{\alpha} \leqslant 1, \ \forall \alpha \in (1,+\infty).$$

Vậy, khi $\alpha > 1$ thì hàm số $f(x) = |x|^{\alpha}$ không thoả mãn điều kiện (2).

Xét trường hợp $x+y<0$. Khi đó

$$|x+y| \leqslant \max\{|x|,|y|\}$$

nên

$$|x+y|^{\alpha} \leqslant |x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}, \ \forall \alpha > 0.$$

Vậy, hàm số $f(x) = |x|^{\alpha}$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $\alpha \in (0,1]$.

Tương tự, đối với trường hợp hai chiều, ứng với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ ta đặt tương ứng một điểm $A(x,y)$ trên mặt phẳng toạ độ Đề-các $(Oxy)$. Nhận xét rằng phép tương ứng đó là một-một và khoảng cách từ $A$ đến điểm $B(x_1,y_1)$ được tính bằng công thức

$$\rho(AB) = \rho(x-x_1, y-y_1) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Trường hợp riêng, khoảng cách từ $A$ đến gốc toạ độ $O(0,0)$ được tính bằng công thức

$$\rho(OA) = \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Khi đó, hàm $\rho(x)$ có các tính chất sau:

(i) $\rho(x,y) \geqslant 0, \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \ \rho(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x,y) = (0,0)$,

(ii) $\rho(AC) \leqslant \rho(AB) + \rho(BA), \ \forall A,B,C$.

Tiếp theo, ta sẽ khảo sát các hàm số có tính chất tương tự như hàm $\rho(x,y)$ và một số hàm số liên quan.

**Định nghĩa 2.** Hàm số $f(x,y)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ được gọi là hàm khoảng cách nếu nó thoả mãn đồng thời các tính chất sau:

$$f(x,y) = f(y,x), \ f(x,y) \geqslant 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \ f(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x,y) = (0,0), \quad (3)$$

$$f(x_1-x_3,y_1-y_3)\leqslant f(x_1-x_2,y_1-y_2)+f(x_2-x_3,y_2-y_3),\ \ \forall x_1,x_2,x_3;y_1,y_2,y_3\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

**Bài toán 2.** Cho $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện

(i) $f(x,y)=f(y,x)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$,

(ii) $f(x,ky_1+y_2)=k(f(x,y_1)+f(x,y_2)$ với mọi $k,x,y_1,y_2\in\mathbb{R}$,

(iii) $f(x,x)\geqslant 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(x,x)=0$ khi và chỉ khi $x=0$.

Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)$ thoả mãn điều kiện

a) $|f(x,y)|^2=f(x,x)f(y,y)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$,

b) $\sqrt{f(x+y,x+y)}\leqslant\sqrt{f(x,x)}+\sqrt{f(y,y)}$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

**Bài giải.** Từ điều kiện (ii) với $y_1=y_2=y$, ta được

$$f(x,(k+1)y)=(k+1)f(x,y)$$

hay

$$f(x,ky)=kf(x,y),\ \ \forall k,x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$f(x,y)=f(x,y1)=yf(x,1)=yf(1,x)=xyf(1,1). \tag{1}$$

Vậy nên

$$f(x,x)=x^2f(1,1),\ \ f(y,y)=y^2f(1,1). \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta thu được

$$|f(x,y)|^2=f(x,x)f(y,y)\quad\text{với mọi }\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ (1) ta được

$$f(x+y,x+y)=(x+y)^2f(1,1). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) ta có ngay đpcm.

**Bài toán 3.** Cho $p>1$. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=f(x_1,\dots,x_n)=\Big(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

thoả mãn điều kiện

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\ \ \forall x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

**Bài giải.** Nhận xét rằng (5) chính là hệ quả của bất đẳng thức Mincovski. Thật vậy, ta có

$$f(x+y)=\Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\Big]^{\frac{1}{p}}$$

Theo bất đẳng thức Mincovski thì

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}=f(x)+f(y).$$

Vậy nên

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $p\geqslant 1$.

**Bài giải.** Nhận xét rằng hàm số $f(x,y)=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$ thoả mãn điều kiện (3) khi và chỉ khi $p>0$. Xét điều kiện (4).

Với $p=1$ thì (4) hiển nhiên thoả mãn. Xét trường hợp $p>1$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Holder cho cặp số $(p,q)$ với $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ta thu được

$$(|x_1-x_3|^p+|y_1-y_3|^p)=(|(x_1-x_2)+(x_2-x_3)|^p+|(y_1-y_2)+(y_2-y_3)|^p)$$

## 2 Bất phương trình hàm với cặp biến tự do

**Bài toán 1.** Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

**Bài giải.** Thay $x=0$ vào điều kiện đầu bài, ta thu được

$$\begin{cases} f(0)\geqslant 0\\ f(0)\geqslant 2f(0)\end{cases}\quad\text{hay}\quad f(0)=0.$$

Vậy nên
$$f(0) = f(x + (-x)) \geqslant f(x) + f(-x) \geqslant 0.$$
Suy ra $f(x) \equiv 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv 0$ thoả mãn điều kiện bài ra.

**Bài toán 2.** Cho trước hàm số $h(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $f(x) \geqslant ax, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Bài giải.** Để ý rằng $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Đặt $f(x) = h(x) + g(x)$. Khi đó ta thu được các điều kiện (i) $g(x) \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g(x+y) \geqslant g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lặp lại cách giải Bài toán 1. Thay $x = 0$ vào điều kiện đầu bài, ta thu được
$$\begin{cases} g(0) \geqslant 0 \\ g(0) \leqslant 0 \end{cases} \text{hay} \quad g(0) = 0.$$
Vậy nên
$$g(0) = g(x + (-x)) \geqslant g(x) + g(-x) \geqslant 0.$$
Điều này kéo theo $g(x) \equiv 0$ hay $f(x) = ax$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax$ thoả mãn điều kiện bài ra.

**Bài toán 3.** Cho số dương $a$. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $f(x) \geqslant a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Bài giải.** Để ý rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể logarit hoá hai vế các bất đẳng thức của điều kiện đã cho.

(i) $\ln f(x) \geqslant (\ln a)x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\ln f(x+y) \geqslant \ln f(x) \ln f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $\ln f(x) = \varphi(x)$, ta thu được

(i) $\varphi(x) \geqslant (\ln a)x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\varphi(x+y) \geqslant \varphi(x)\varphi(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ta nhận được Bài toán 2. Bằng cách đặt $\varphi(x) = g(x) + (\ln a)x$, ta thu được các điều kiện

(i) $g(x) \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g(x+y) \geqslant g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

và $g(x) \equiv 0$ hay $\varphi(x) = (\ln a)x$. Suy ra $f(x) = a^x$ Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = a^x$ thoả mãn điều kiện bài ra.

**Bài toán 4.** Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện sau:

$$f(x) \geqslant f(0),\ f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

**Bài giải.** Đặt $f(0) = a$ và $f(x) - a = g(x)$. Khi đó (1) có dạng

$$g(x) \geqslant 0,\ g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{g(x)+g(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

với $g(0) = 0$.

Thay $y = 0$ vào (2), ta thu được

$$g\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \frac{g(x)}{2} \text{ hay } g(x) \geqslant 2g\Big(\frac{x}{2}\Big),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta suy ra

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{y}{2}\Big),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay

$$g(0) = 0,\ g(x) \geqslant 0,\ g(x+y) \geqslant g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Tiếp theo, ta nhận được Bài toán 1. Suy ra $g(x) \equiv 0$ và $f(x) = \text{const}$.

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv c$ thoả mãn điều kiện bài ra.

# MỘT PHƯƠNG PHÁP LÀM "CHẶT" BẤT ĐẲNG THỨC

Trịnh Đào Chiến
*Sở Giáo dục và Đào tạo Gia Lai*

Bất đẳng thức là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Việc sáng tạo các bất đẳng thức là một việc làm cần thiết trong quá trình dạy và học toán. Dưới đây là một trong những phương pháp sáng tạo đó: phương pháp làm "chặt" bất đẳng thức.

Giả sử ta có bất đẳng thức dạng $A < B$. Nếu có $C$ sao cho $A < C < B$, thì ta nói rằng bất đẳng thức thứ nhất đã được làm "chặt" hơn bởi bất đẳng thức thứ hai. Điều này đươực tương tự đối với dạng bất đẳng thức $A \leqslant C \leqslant B$.

Trước hết, ta nhắc lại những định nghĩa sau về hàm số lồi, lõm, trong chương trình toán phổ thông:

**Định nghĩa 1.** *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a, b)$.*

*- Hàm số $f(x)$ được gọi là lồi trên khoảng đó nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$, ta đều có:*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big). \tag{1}$$

*Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.*

Hàm số $f(x)$ được gọi là lõm trên khoảng đó nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$, ta đều có:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqslant f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big), \tag{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Từ đồ thị của các hàm số lồi, lõm ta thấy rằng , có thể làm "chặt" hơn nữa các bất đẳng thức (1) và (2) bởi bất đẳng thức dưới đây, chẳng hạn:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqslant \frac{f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon)}{2} \geqslant f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big), \tag{3}$$

với $\epsilon$ dương và đủ nhỏ.

Cụ thể hơn, ta có định lí sau:

**Định lý 1.** *Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$. Giả sử rằng $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Thế thì với $x_1, x_2 \in (a,b)$ xác định trước và $x_1 < x_2$, ta có:*

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon),$$

*trong đó $0 \leqslant \epsilon \leqslant x_2 - x_1$.*

*Chứng minh.* a) Nếu $0 \leqslant \epsilon \leqslant \dfrac{x_2 - x_1}{2}$ thì $x_1 \leqslant x_1 + \epsilon \leqslant x_2 - \epsilon \leqslant x_2$. Theo Định lý Lagrange thì

$$f(x_1 + \epsilon) - f(x_1) = f'(\theta_1)\epsilon, \text{với } \theta_1 \in (x_1, x_1 + \epsilon),$$

$$f(x_2) - f(x_2 - \epsilon) = f'(\theta_2)\epsilon, \text{với } \theta_2 \in (x_2 - \epsilon, x_2).$$

Vì $\theta_1 < \theta_2$ và $f''(x) > 0$ nên $f'(\theta_1) < f'(\theta_2)$.

Mặt khác, do $\epsilon \geqslant 0$ nên

$$f(x_2) - f(x_2 - \epsilon) - f(x_1) \geqslant f(x_1 + \epsilon) - f(x_1)$$

hay

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon).$$

b) Nếu $\leqslant \dfrac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \epsilon < x_2 - x_1$ thì $x_1 \leqslant x_2 - \epsilon \leqslant x_1 + \epsilon \leqslant x_2$.

Theo Định lý Lagrange thì

$$f(x_2 - \epsilon) - f(x_1) = f'(\theta_3)(x_2 - x_1 - \epsilon), \text{với } \theta_3 \in (x_1, x_2 - \epsilon),$$

$$f(x_2) - f(x_1 - \epsilon) = f'(\theta_4)(x_2 - x_1 - \epsilon), \text{với } \theta_4 \in (x_1 + \epsilon, x_2).$$

Vì $\theta_3 < \theta_4$ và $f''(x) > 0$ nên $f'(\theta_3) < f'(\theta_4)$.

Mặt khác, do $x_2 - x_1 - \epsilon \geqslant 0$ nên

$$f(x_2) - f(x_1 + \epsilon) - f(x_1) \geqslant f(x_2 - \epsilon) - f(x_1)$$

hay

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon).$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Tương tự, ta có kết quả sau:

**Định lý 2.** *Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$. Giả sử rằng $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Thế thì với $x_1, x_2 \in (a,b)$ xác định trước và $x_1 < x_2$, ta có:*

$$f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon),$$

*trong đó $0 \leqslant \epsilon < x_2 - x_1$.*

Cụ thể hóa các kết quả trên, ta có thể làm "chặt" một số bất đẳng thức và từ đó có thể sáng tác ra một số bài tập về bất đẳng thức.

Giả sử $f(x)$ là hàm lõm trên khoảng $(a,b)$. Với mỗi cặp $x_1, x_2 \in (a,b)$ với $x_1 \leqslant x_2$, ta đặt

$$\epsilon_r = r(x_2 - x_1), \ \ 0 < r < 1.$$

Rõ ràng $\epsilon_r \geqslant 0$.

Nhận xét rằng, với $x_1, x_2$ xác định, $\epsilon_r$ là hàm tăng theo $r$ .

Ngoài ra, $\epsilon_r \to 0$ khi $r \to 0$ và $\epsilon_r \to x_2 - x_1$ khi $r \to 1$.

Đặt

$$F(r) = f(x_1 + \epsilon_r) + f(x_2 - \epsilon_r).$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra được rằng:

1- Nếu $r_1, r_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $r_1 \leqslant r_2$ thì $F(r_1) \geqslant F(r_2)$;

2- Nếu $r_1, r_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $r_1 \leqslant r_2$ thì $F(r_1) \leqslant F(r_2)$;

3- Nếu $r_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $r_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, thì

$$F(r_1) \leqslant F(r_2) \ \text{nếu}\ r_1 \leqslant 1 - r_2,$$

$$F(r_1) \geqslant F(r_2) \ \text{nếu}\ r_1 \geqslant 1 - r_2,.$$

Tương tự, ta cũng thu được kết quả với $f(x)$ là hàm lồi trên khoảng $(a,b)$.

Bây giờ ta thử minh họa các ý tưởng trên đối với một hàm đơn giản, chẳng hạn với hàm $f(x) = x^2$, hàm lõm trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

- Cho $r$ lần lượt nhận các giá trị $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, theo trường hợp 1, ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(\frac{4x_1 + x_2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x_1 + x_2}{5}\right)^2 \geqslant \left(\frac{2x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x_1 + x_2}{3}\right)^2$$

$$\geqslant 2\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)^2,\ \ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

- Cho $r$ lần lượt nhận các giá trị $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$, theo trường hợp 2, ta có bất đẳng thức sau:

$$\Big(\frac{x_1+2x_2}{3}\Big)^2+\Big(\frac{2x_1+x_2}{3}\Big)^2\geqslant\Big(\frac{2x_1+3x_2}{5}\Big)^2+\Big(\frac{3x_1+2x_2}{5}\Big)^2$$

$$\geqslant 2\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)^2,\ \ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

- Cho $r$ lần lượt nhận các giá trị $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$, theo trường hợp 3, ta có bất đẳng thức sau:

$$\Big(\frac{2x_1+x_2}{3}\Big)^2+\Big(\frac{x_1+2x_2}{3}\Big)^2\geqslant\Big(\frac{2x_1+3x_2}{5}\Big)^2+\Big(\frac{3x_1+2x_2}{5}\Big)^2,\ \ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

Bây giờ, chẳng hạn, xét hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, hàm lõm trên khoảng $(0,+\infty)$. Tương tự, với những giá trị của lần lượt như trên, ta được những bất đẳng thức sau, với mọi $x_1,x_2>0$:

a) $$\sqrt{5}\Big(\frac{1}{\sqrt{4x_1+x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_1+4x_2}}\Big)\geqslant\sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{2x_1+x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_1+2x_2}}\Big)$$
$$\geqslant\sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{x_1+x_2}},$$

b) $$\sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{x_1+2x_2}}+\frac{1}{\sqrt{2x_1+x_2}}\Big)\geqslant\sqrt{5}\Big(\frac{1}{\sqrt{2x_1+3x_2}}+\frac{1}{\sqrt{3x_1+2x_2}}\Big)$$
$$\geqslant\sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{x_1+x_2}},$$

Trên đây chỉ là những ví dụ minh họa đơn giản nhất. Bạn đọc có thể tiếp tục mở rộng vấn đề này theo các hướng sau đây:

- Xây dựng hệ thống bài tập theo các hàm số khác nhau cho trước.
- Tổng quát hóa cho trường hợp $n$ biến số $x_1,x_2,\ldots,x_n$.
- Thiết lập các bài toán tương tự bằng cách thay $x_1+\epsilon$ bởi $x_1+\epsilon_1$ và $x_2-\epsilon$ bởi $x_2-\epsilon_2$, với $\epsilon_1\geqslant 0$, $\epsilon_2\geqslant 0$, $\epsilon_1\neq\epsilon_2$,...

Tuy nhiên, vấn đề còn là ở chỗ, phải tìm kiếm các cách chứng minh phù hợp với chương trình phổ thông, sau khi đã dùng công cụ "cao cấp" để sáng tác bài tập về bất đẳng thức.

---

# Mixing variables

Tran Nam Dung [(1)] - Gabriel Dospinescu [(2)]

One of the main properties of most inequalities, especially polynomial ones is the fact that equality holds when all or some variables are equal. Mixing variables method is based on this property and its purpose is to decrease the number of variables, reducing the problem to an easier form, which can be proved using factorization, AM-GM, one-variable calculus or by mathematical induction.

To prove the inequality

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0 \tag{1}$$

we can try to show that

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f((x_1+x_2)/2, (x_1+x_2)/2, \dots, x_n) \tag{2}$$

or that

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f\left(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, \dots, x_n\right). \tag{3}$$

And then, if we succeded in proving this, we reduce proving (1) to proving the inequality

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0, \tag{4}$$

which has one less variables. Of ,course, inequalities (2) and (3) can be totally wrong or can be true only with some additional condition. In (2) and (3) we change only two variables, so usually it is not hard to verify them.

The following example will show that this technique can be used both for easy inequalities and hard ones.

**Example 1** (Kwant). Let $a, b, c > 0$. Show that we have following inequality:

$$2(a^2+b^2+c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geqslant (a+b+c)^2.$$

***Solution.***

Let's consider the function

$$f(a,b,c) = 2(a^2+b^2+c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - (a+b+c)^2.$$

The expression of $f$ itself suggests us to mix two variables into their geometric mean (to keep $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ unchanged). We have

$$f(a,b,c) - f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) = 2(b^2+c^2-2bc) + (a+2\sqrt{bc})^2 - (a+b+c)^2$$
$$= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2[(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - 2a].$$

So, if $a = \min\{a,b,c\}$ (and we can obviously suppose that) then we have

$$f(a,b,c) \geqslant f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}).$$

Thus, to prove the initial inequality, it is sufficient to show that $f(a,b,b) \geqslant 0$ for all $a$ and $b$. But this inequality is equivalent to

$$2(a^2+2b^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^4} \geqslant (a+2b)^2,$$

or

$$a^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^4} \geqslant 4ab,$$

which is true by AM-GM for $a^2$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$.

The following example is much more difficult.

**Example 2** (Vietnamese IMO Team selection Test, 1996).
Let $a,b,c$ be arbitrary real numbers. Prove that

$$F(a,b,c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4) \geqslant 0.$$

***Solution***
We will show that with some additional condition

$$F(a,b,c) \geqslant F(a,(b+c)/2,(b+c)/2).$$

Indeed, long but easy computations show that we have

$$F(a,b,c) - F(a,(b+c)/2,(b+c)/2) =$$

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-(a^4+b^4+c^4)-2(a+(b+c)/2)^4-(b+c)^4+(a^4+2((b+c)/2)^4)$$
$$= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2(a+(b+c)/2)^4 + c((b+c)^4/8 - b^4 - c^4)$$
$$= a(4b^3+4c^3-(b+c)^3) + 3a^2(2b^2+c^2-(b+c)^2) + (b^4+c^4-(b+c)^4/8)$$

$$= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + (3/56)(b-c)^2[7b^2+7c^2+10bc]$$
$$= 3a(a+b+c)(b-c)^2 + (b-c)^2[7b^2+7c^2+10bc].$$

The last term is nonnegative. If $a, b, c$ have the same sign, then the initial inequality is trivial. If $a, b, c$ have different signs then at least one from $a, b, c$ has the same sign as $a+b+c$. WLOG, suppose that it is $a$. From the last equality we have $F(a,b,c) \geqslant F(a,(b+c)/2,(b+c)/2)$. Thus, it is now sufficient to show that $F(a,b,b) \geqslant 0$ for all $a, b$, or

$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - (a^4 + 2b^4) \geqslant 0.$$

If$b = 0$ then inequality is trivial. If $b \neq 0$, then dividing the two sides of the inequality by $b^4$ and putting $x = a/b$, we reduce it to the equivalent form:

$$2(x+1)^4 + 16 - (x^4 + 2) \geqslant 0.$$

The last one can be proved by one-variable calculus. Consider $f(x) = 2(x+1)^4 + 16 - (x^4+2)$. We have $f'(x) = 8(x+1)^3 - x^3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}x \Leftrightarrow x = -2.9294$. Thus

$$f_{\min} = f(-2.9294) = 2(-1.9294)^4 + 16 - (4/7)(-2.9294)^4 - 8/7 = 0.4924.$$

For free of conditions inequalities in general we can mix variables into whatever we want: arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, quadratic mean ... and in some cases, we can even define special means. A beautiful example is the following famous (due to its difficulty) problem.

**Example 3** (Iranian Mathematical Olympiad 1996).
Let $a, b, c$ be positive reals. Prove that

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

***Analysis***: We can mix $a, b$ into $(a+b)/2$, but then both terms in L.S.H will be changed and the result will be very bulky.

Naturally, we want to keep one term unchanged. For example, we will keep $ab+bc+ca$ unchanged. For this goal, we mix $b$ and $c$ into $t$ such that $ab+bc+ca = at+t^2+ta$.

If we solve this equation (in $t$) we get

$$t = -a + \sqrt{(a+c)((a+b)}.$$

Let

$$f(a,b,c) = 1/(a+b)2 + 1/(b+c)2 + 1/(c+a)2.$$

Our goal is to show that $f(a,b,c) \geqslant f(a,t,t)$. Investigating this inequality, we see that it holds only with some assumption, for example for $a = \min\{a,b,c\}$.

***Solution.***

WLOG, we can assume that $a = \min\{a,b,c\}$. Let $t = -a + \sqrt{(a+c)((a+b)}$, $g(a,b,c) = ab + bc + ca$ and

$$f(a,b,c) = 1/(a+b)^2 + 1/(b+c)^2 + 1/(c+a)^2.$$

Then $g(a,b,c) = g(a,t,t)$. We will show that

$$f(a,b,c) \geqslant f(a,t,t). \qquad (*)$$

Note that $a+t = \sqrt{(a+c)(a+b)}$, $\sqrt{(a+c)(a+b)} \leqslant t \leqslant (b+c)/2$. Also, $(*)$ is equivalent to

$$(1/(a+b) - 1/(a+c))^2 \geqslant 1/4t^2 - 1/(b+c)^2,$$

which can also be written

$$(b-c)^2/(a+b)^2(a+c)^2 \geqslant (b+c-2t)(b+c+2t)/4t^2(b+c)^2.$$

Now,

$$b+c-2t = (a+b)+(a+c) - 2\sqrt{(a+c)(a+b)} =$$
$$= (\sqrt{a+b} - \sqrt{a+c})^2 = (b-c)^2/(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2$$

and it sufficient to show that

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2 4t^2(b+c)^2 \geqslant (a+b)^2(a+c)^2(b+c+2t).$$

But this is trivial because $\sqrt{(a+c)(a+b)} \leqslant t \leqslant 2t \leqslant b+c$.

Thus, all we have to do now is to prove that

$$g(a,t,t)f(a,t,t) \geqslant 9/4.$$

This can be done by easy computation:

$$g(a,t,t)f(a,t,t) \geqslant 9/4 \Leftrightarrow 4(2at+t^2)(2/(a+t)^2 + 1/4t^2) \geqslant 9$$

$$\Leftrightarrow (2at+t^2)(8t^2 + (a+t)^2) \geqslant 9t^2(a+t)^2$$

$$\Leftrightarrow (2at + t^2)(9t^2 + a^2 + 2at) \geqslant 9t^2(a^2 + 2at + t^2) \Leftrightarrow at(a - t)^2 \geqslant 0.$$

Mixing variables can be used not only for free of conditions inequalities, but also for inequalities with additional conditions. In these cases, when we mix variables, we have to be sure that the conditions still hold. So, we have less variants to choose.

**Example 4** (Vietnamese Mathematical Olympiad 2002).
Prove that for arbitrary real numbers $x, y, z$, satisfying

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

the inequality

$$2(x + y + z) \leqslant xyz + 10$$

holds.

***Solution.***

Let $f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz$. We have to show that $f(x, y, z) \leqslant 10$ when $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

To leave the condition $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ unchanged, we will mix two variables into their quadratic mean.

Consider

$$f(x, \sqrt{(y^2 + z^2)/2}, \sqrt{(y^2 + z^2)/2}) - f(x, y, z) =$$

$$= 2(x + 2\sqrt{(y^2 + z^2)/2}) - x(y^2 + z^2)/2 - 2(x + y + z) + xyz =$$

$$= 2(-y - z) - x(y - z)2/2 = (y - z)2[2/(+y + z) - x/2].$$

If $x, y, z > 0$, we consider two cases.
The first one: $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$. Then

$$2(x + y + z) - xyz \leqslant 2\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 < 10.$$

The second one: $0 < x \leqslant 1$. Then

$$2(x+y+z)-xyz < 2(x+y+z) \leqslant 2x+2\sqrt{2(y^2 + z^2)} = 2x+2\sqrt{2(9 - x^2)} = g(x).$$

We have $g'(x) = 2 - 2 > 0$, so it follows that $g(x) \leqslant g(1) = 10$.

If among numbers $x, y, z$ there is a negative number, WLOG, suppose that $x < 0$. Then

$$f(x, \sqrt{(y^2 + z^2)/2}, \sqrt{(y^2 + z^2)/2}) - f(x, y, z) \geqslant 0$$

and we reduce our problem to proving that $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) \leqslant 10$, or

$$2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} - x(9-x^2)/2 \leqslant 10,$$

or

$$h(x) = x^3 - 5x + 4\sqrt{2(9-x^2)} \leqslant 20.$$

We have: $h'(x) = 3x^2 - 5 - 4x\sqrt{2/(9-x^2)}$. Solving the equation $h'(x) = 0$ (where $x < 0$), we get $x = -1$. It is maximal point of $h$, thus $h(x) \leqslant h(-1) = 20$.

**Example 5** (Gabriel Dospinescu).
Prove that if $a, b, c > 0$ verify $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ , then

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) \leqslant 6.$$

***Solution.***
Again, the purpose it to preserve the relation given in the problem. That is why we study the difference

$$f(a,b,c) - f(a,t,t),$$

where $t = \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}$.

It is easy to compute the difference. It is

$$-a^2(2t-b-c) + a(b^3+c^3-2t^3) + t^2(2bc-2t^2).$$

Let us take $a = \min\{a,b,c\}$. Then

$$b^3+c^3-2t^3 = (b+c)(b^2-bc+c^2)-2t^3)+t^2 \leqslant 2t(b^2-bc+c^2)-2t^3 = t(b-c)^2.$$

So, the difference is at most

$$-a^3(2t-b-c) + at(b-c)^2 - t^2(b-c)^2 \leqslant 0,$$

since $2t-b-c \geqslant 0$ and $a \leqslant t$. Thus, it remains to prove that if $a^2+2t^2 = 3$ , then $f(a,t,t) \leqslant 6$. This can be written

$$a^3t + at^3 + t^4 \leqslant 3 \Leftrightarrow at(3-t^2) \leqslant 3 - t^4$$

$$\Leftrightarrow (3-2t^2)t^2(3-t^2)^2 \leqslant (3-t^4)^2$$

and this one is true since it is equivalent to

$$3(t^2-1)^2(t^4-3t^2+3) \geqslant 0.$$

Thus, it isn't always trivial to show the inequality for two numbers. We will see that there is an easier solution for this problem, thought this is the most natural solution.

We finish with an inequality proposed for the final round of the Romanian mathematical olympiad in 2003:

**Example 6** (Mircea Lascu and Marian Tetiva).
Prove that if $a, b, c > 0$ have product 1, then the following inequality holds:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant a + b + c + ab + bc + ca.$$

***Solution.***
Now it's obvious that we should consider the function:

$$f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3 - a - b - c - ab - bc - ca.$$

It is also easy to deduce that

$$f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2\Big((\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 1 - a\Big).$$

So, we would like to have the last term positive. Naturally, we choose $a = \min\{a, b, c\}$. By AM-GM we have that

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \geqslant 4\sqrt{bc} = \frac{4}{\sqrt{a}} \geqslant 4 \geqslant 1 + a,$$

since $a \leqslant 1$. Thus, it is enough to prove that $f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) \geqslant 0$ and this is in fact

$$a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)^2 + 2 \geqslant a + 2\sqrt{a}$$

and it is obviously true since $a + 2\sqrt{a} \leqslant 2a + 1 \leqslant a^2 + 2$.

In considered examples, we mix variables into their means. We do so, because equality holds when these two variables are equal. But for some inequalities, this property does not hold, and we have to choose other expression to mix into, rather means. Usually, in these cases we use boundary values (look at the ends priciple).

**Example 7** (Gabriel Dospinescu, Gheorghe Vranceanu Contest, 2003).
Let $n$ be a natural number, $n \geqslant 2$. Find the greatest value of the expression

$$\frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - b - c} + \frac{(ca)^n}{1 - ca},$$

when $a, b, c$ are arbitrary nonnegative reals satisfying $a+b+c=1$.

***Analysis***:

The investigation of the easiest case ($n=2$) shows that the maximum value is not achieved in the point $(1/3, 1/3, 1/3)$, but in the point $(1/2, 1/2, 0)$. This fact suggests that we should mix $a$ and $b$ into $a+b$ and 0. But in additional condition that $c=\max\{a, b, c\}$. When one variable is equal to 0, the function becomes a simple one-variable function.

***Solution.***

Let's assume that $a \leqslant b \leqslant c$. Put

$$f(a, b, c)=\frac{(ab)^n}{1-ab}+\frac{(bc)^n}{1-b-c}+\frac{(ca)^n}{1-ca}.$$

We will show that

$$f(a, b, c) \leqslant f(0, a+b, c).$$

This is equivalent to

$$\frac{(ab)^n}{1-ab}+\frac{(bc)^n}{1-b-c}+\frac{(ca)^n}{1-ca} \leqslant \frac{(a+b)^n c^n}{1-ac-bc}. \qquad (*)$$

We write consequently

$$\frac{(a+b)^n c^n}{1-ac-bc} \geqslant \frac{(a^n+nab^{n-1}+b^n)c^n}{1-ab-bc} \geqslant \frac{a^n c^n}{1-ac-bc}+\frac{a^n b^n}{1-ac-bc}+\frac{b^n c^n}{1-ac-bc}$$
$$\geqslant \frac{a^n b^n}{1-ab}+\frac{a^n c^n}{1-ac}+\frac{b^n c^n}{1-bc}$$

and we get $(*)$.

All we have to do now is to find the maximum value of $f(0, b, c)=\dfrac{(bc)^n}{1-bc}$, where $b+c=1$. This is an easy exercise, since the function $h(x)=x^n/(1-x)$ is an increasing function on (0, 1) and $bc \leqslant (b+c)^2/4=1/4$, so

$$\max f=h(1/4)=1/(3.4n-1).$$

This is the answer to the problem, since the value is attained for example when $a=b=\dfrac{1}{2}$ and $c=0$.

As it can be easily deduced from the above, mixing variables is most useful for 3-variable inequalities. The reason is simple: if we can mix variables for a 3-variable inequality, then we get 2-variable one, which, in most of cases can easily reduce to 1-variable (for example, a homogenus 2-variable is equivalent to 1-variable inequality).

When the expression which needs to be evaluated has more than 3 variables, using this method meets more difficulty, because every mixing does the expression more complicated. Especially in the case of a general inequality (with $n$ variables), the difficulties are more than obvious: mixing variables change the general form and we cannot use induction, which is the most appropriate approach. Mixing variables will be more effective if we use it together with other arguments, for example, the properties of continuous functions on a compact.

**Example 8** (Gabriel Dospinescu). Prove that for positive reals $x_1, x_2, \ldots, x_n$, whose product is 1 we have

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n}{4}.$$

***Analysis.***

Let

$$f(x) = \frac{x+1}{4} - \frac{1}{x+1}.$$

We have to show that if $x_1.x_2 \cdots x_n = 1$ then

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqslant 0.$$

The condition $x_1.x_2 \cdots x_n = 1$ forces us to mix $x_1, x_2$ into $\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}$. But after that? We can mix some pairs of variables, but if the number of variables is odd? More detailed consideration shows that mixing variables brings us to result iff $n = 2^k$. What we can do in other cases? We can work backward!

If $\min\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\} = f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)$, we will show that $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^* = 1$, and we get that min $= 0$. It is trivial if we can prove that if $x_1^* \neq x_2^*$ then $f(x_1^*) + f(x_2^*) > 2f(\sqrt{x_1^*x_2^*})$. But why does this minimum exist? Sometimes, we ignore this fact, considering it trivial. But it is one of main question in this problem. Some properties of continuous functions will help us.

***Solution.***

Let

$$f(x) = \frac{x+1}{4} - \frac{1}{x+1}.$$

We will show that if $x_1, x_2, \ldots, x_n = 1$ then $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqslant 0$. First, we will show that there exists a minimal value of $S(x_1, \ldots, x_n) =$

$f(x_1) + f(x_2) + \cdots . + f(x_n)$ on the surface

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \Big| x_1.x_2 \cdots x_n = 1\}.$$

Note that $f(1)+\cdots+f(1) = 0$ and $1/(1+x_1)+1/(1+x_2)+\cdots+1/(1+x_n) < n$. So, if $x_i > 3n$ for some $i$ then $S(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Similarly, if $x_i < 1/(3n)n$ then $x_1 \ldots x_n/x_i > (3n)n$, and

$$x_1 + \cdots + x_n - x_i > (n-1)(x_1 \cdots x_n/x_i)^{1/n-1} > 3n$$

and $S(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Thus, we can find the minimal value in the compact:

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n\} \Big| 1/(3n)^n \leqslant x_i \leqslant 3n,\ x_1 \cdots x_n = 1.$$

$S(x_1, \ldots, x_n)$ is continuous on $C$, so the first thing is done.

Secondly, let

$$\min\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\} = f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*).$$

We will show that $x_1^* = x_2^* = \cdots . = x_n^* = 1$. Indeed, if it is not so, then we can find $x_1^* \neq x_2^*$. We will show that if $x \neq y$ then

$$f(x) + f(y) > 2f(\sqrt{xy}) \qquad (*),$$

which leads to a contradiction. But

$$(*) \Leftrightarrow (x + y - 2)/4 > 2/(1+) - 1/(1 + x) - 1/(1 + y)$$

$$\Leftrightarrow ()2 > [2(1 + x)(1 + y) - (1+)(2 + x + y)]/(1+)(1 + x)(1 + y)$$

$$\Leftrightarrow ()2/4 > ()2(1-)/(1+)(1 + x)(1 + y)$$

which is true. Finally, we conclude that

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqslant f(1) + \cdots + f(1) = 0.$$

## Problems for self-study

1 (After Kvant problem).

Prove that for arbitrary real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ we have

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + n\sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2} \geqslant (x_1 + x_2 + \cdots . + x_n)^2.$$

2 (Talented Team selection test 2002).
Find all positive integer $k$ such that inequality

$$2(a^k + b^k + c^k) + 3\sqrt{abc} \geqslant 9$$

holds for all positive reals $a, b, c$ satisfying $a + b + c = 3$.

3 (Vasile Cartoaje, Gazeta Matematica A).
Let $x, y, z$ be positive reals satisfying $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Show that $x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4 \leqslant 3$.

4(Proposed for 2000 Moscow Olympiad).
Prove that if $x, y, z > 0$ have product 1 then:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geqslant 2(xy + yz + zx).$$

5 (1993 Imo Shortlist, proposed by Vietnam).
Prove that if $a, b, c, d$ are nonnegative reals which add up to 1, then

$$abc + bcd + cda + abd \leqslant \frac{1 + 176abcd}{27}.$$

6. Prove that for all $a, b, c > 0$ we have the following inequality:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 + abc \geqslant a + b + c + ab + bc + ca.$$

7. For positive real numbers $a, b, c$ prove that

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(ab + bc + ca)^2 \geqslant 8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

8 (Vietnamese Team selection test 2005).
For positive real numbers $a, b, c$ prove that

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

9 (Gabriel Dospinescu, After Vietnamese 1996 problem).
For arbitrary real numbers $a, b, c$, show that

$$(a + b)^6 + (b + c)^6 + (c + a)^6 \geqslant \frac{16}{63}(a^6 + b^6 + c^6).$$

---

(1) Lecturer of Mathematics and Informatics department, Hochiminh city University of natural science

(2) Romanian student, from 2004 does his study in France

# CHỨNG MINH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN BẰNG ĐẠO HÀM

Lê Đình Thịnh
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Bất đẳng thức cơ bản Cauchy (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân) và Cauchy - Bunhiacôpxki được sử dụng rất rộng rãi trong nhà trường, khi đó thi và sử dụng rất thuận tiện để giải các bài toán thực tiễn. Riêng bất đẳng thức Cauchy (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân) đã có nhiều cách khác nhau để chứng minh. Dưới đây là một cách chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng đạo hàm rất đẹp và chứng minh bất đẳng thức Cauchy suy rộng cũng rất đẹp bằng đạo hàm và từ đó suy ra các bất đẳng thức thường gặp như bất đẳng thức Ienxen, Ienxen suy rộng, bất đẳng thức Hônđe và bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacôpxki.

Trước hết ta chứng minh.

**Bổ đề 1.** *Nếu* $f'(x) > 0\ \forall x \geqslant x_0\, f(x_0) = 0$ *thì* $f(x) > 0\ \forall x > x_0$.

**Chứng minh.**

Do $f'(x) > 0\ \forall x \geqslant x_0$ nên $f(x)$ đồng biến khi $x \geqslant x_0$
$\Rightarrow f_{\min} = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0\ \forall x > x_0$.

**Bài toán 1.** *Chứng minh rằng* $e^{x-1} \geqslant x\ \forall x$, *dấu* $= \Leftrightarrow x = 1$.

**Giải.**

Xét $f(x) = e^{x-1} - x$, ta có $f'(x) = e^{e-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Vì $f'(x) < 0$ khi $x < 1$, $f'(x) > 0$ khi $x > 1 \Rightarrow f_{\min} = f(1) = 0$.
$\Rightarrow f(x) = e^{x-1} - x \geqslant f(1) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geqslant x$. Dấu $= \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra

$$x_1^{p_1} \leqslant s^{p_1} e^{(\frac{x_1}{s}-1)p_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n^{p_n} \leqslant s^{p_n} e^{(\frac{x_n}{s}-1)p_n}$$

Suy ra

$$x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \leqslant s^{p_1+\cdots+p_n}\cdot e^{\frac{x_1p_1+\cdots+x_np_n}{s}} - (p_1+\cdots+p_n) = s^{p_1+\cdots+p_n}.$$

Dấu $= \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{s} = \cdots = \dfrac{x_n}{s} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n$.

**Thí dụ 1.** (Đề thi học sinh giỏi Miền Bắc năm 1976).
Cho $k$ và $n$ là những số tự nhiên và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là những số thực dương sao cho $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$. Chứng minh rằng

$$x_1^{-n} + x_2^{-n} + \cdots + x_k^{-n} \geqslant k^{n+1}$$

**Giải.**

Vì $x_i > 0 \Rightarrow x_i^{-n} > 0\ \forall n \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{-n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i^n} \geqslant k\sqrt[k]{\pi_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^n}}, \qquad (*)$$

Hơn nữa $x_1x_2\cdots x_k \leqslant \left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^k = \left(\dfrac{1}{k}\right)^k$

Suy ra

$$\frac{1}{\pi_{i=1}^{k}} \geqslant k^{kn}. \qquad (**)$$

Từ (*) và (**), ta có

$\sum_{i=1}^{k} x_i^{-n} \geqslant k\sqrt[k]{k^{nk}} = k\cdot k^n = k^{n+1}$.

Dấu $= \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \dfrac{1}{k}$

**Thí dụ 2.** (Đề thi học sinh giỏi năm 1976).

Xác định dạng của $\Delta ABC$, nếu.

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = \frac{a+b+c}{9R}.$$

trong đó $a, b, c$ là độ dài 3 cạnh, $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

**Giải.**

Ta biến đổi tử số ở vế trái thành

$$R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C$$

(đã sử dụng định lý hàm sin).
Mẫu số ở vế trái.

$$\geqslant 3\sqrt[3]{abc \sin A \sin B \sin C} = 6R\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{vế trái} \leqslant \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}.\text{Cô si} \qquad (*)$$

Mặt khác, vế phải bằng.

$$\frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{9R} \geqslant \frac{2}{9} \cdot 3\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta ABC$ đều .

**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng $\forall a, b > 0$ ta đều có $2\sqrt[a+b]{a^{2b} \cdot b^{2a}} \leqslant a^2 + b^2$.

**Giải.**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow a^{2\frac{b}{a+b}} \cdot b^{2\frac{a}{a+b}} \leqslant \left(\frac{a \cdot 2\frac{b}{a+b} + b \cdot 2\frac{a}{a+b}}{2\frac{b}{a+b} + 2\frac{a}{a+b}}\right)^{2\frac{b}{a+b}+2\frac{a}{a+b}} =$$

$$= \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leqslant (\sqrt{ab})^2 \text{ (Cauchy )} = ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

**Thí dụ 4.**

1/ Chứng minh rằng dãy $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. tăng thực sự.

2/ Chứng minh rằng dãy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3\ \forall n \in Z^+$.

**Giải.**

1/ Theo bất đẳng thức Cauchy suy rộng ta có.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leqslant \left(\frac{(1+\frac{1}{n})n + 1\cdot 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

Dấu $= \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{n} = 1 \Rightarrow$ không đạt dấu $= \Longrightarrow x_n < x_{n+1}$, tức là dãy $x_n$ tăng thực sự.

2/ Theo công thức nhị thức Niutơn ta có.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots$$

Vì $C_n^k \cdot \dfrac{1}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\ k} =$

$= \left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2\cdots k} < \dfrac{1}{2^{k-1}}.$

$\Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \dfrac{1}{n} + \cdots + C_n^n \cdot \dfrac{1}{n^2} < 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} <$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

(áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô tận với $a = \dfrac{1}{2}$ ).

Từ 1/ và 2/ suy ra dãy $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ hội tụ, có giới hạn là

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045\cdots.$$

Giới hạn này gọi là giới hạn tuyệt diệu thứ hai.

**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng $\forall 0 < x < 2$ ta đều có $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} < \dfrac{4}{9}$.

**Giải.** Ta viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{9}{4} < 1 \Leftrightarrow \left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\frac{(1-\frac{x}{2})\cdot\frac{2}{x} + (1+\frac{1}{2})\cdot 2}{\frac{2}{x}+2}\right)^{\frac{2}{x}+2} = 1^{\frac{2}{x}+2} = 1.$$

Đặt $p = \dfrac{1}{r_1}$, $q = \dfrac{1}{r_2} \Rightarrow r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = p + q = 0$. áp dụng (4) với $x =$ tg $x$, $y =$ cotg $x$, ta được.

$$\frac{x^{r_1}}{r_1} + \frac{y^{r_2}}{r_2} \geqslant xy \Leftrightarrow \frac{1}{r_1} \operatorname{tg}^{r_1} x + \frac{1}{r_2} \operatorname{cotg}^{r_2} x \geqslant \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1.$$

**(3). Bất đẳng thức Hônđe.**

Giả sử rằng $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ; $y_1, y_2, \cdots, y_n > 0$, $p > 0$, $q > 0$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, khi đó ta có bất đẳng thức Hônđe.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Chứng minh.*
Đặt

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Khi đó, từ (4) $\Rightarrow \dfrac{x_i}{A} \cdot \dfrac{y_i}{B} \leqslant \dfrac{x_i^p}{pA^p} + \dfrac{y_i^q}{qB^q}, i = 1, \cdots, n.$
Lấy tổng theo $i$ từ 1 đến $n$ và chú ý $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = A^p$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^q = B^q$ ta được.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{AB} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{pA^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**(4).** Khi $p = q = 2$ ta được bất đẳng thức *Cauchy - Bunhiacôpxki.*

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

**(5). Bất đẳng thức Mincôpxki .**
Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0$ ; $b_1, b_2, \cdots, b_n \geqslant 0$, số $p > 1$ khi đó ta có .

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Chứng minh.*
Ta có đẳng thức hiểu nhiên.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=i}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

áp dụng bất đẳng Hônđe cho mỗi tổng ở vế phải. Nếu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, p > 1, q > 1$ thì $\dfrac{p-1}{q} = p\,,\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p}$. Bởi vậy

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left\{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\right\}$$

Chia 2 vế cho $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Thí dụ 7.** Để đỡ viết ta viết $\sum$ có nghĩa là $\sum_{i=1}^{n}$. Cho $3n$ số thực. $a_1, \cdots, a_n\,;\ b_1, \cdots, b_n\,;\ x_1, \cdots, x_n$ thoả mãn các điều kiện sau.

$$\sum a_i x_i = 0\,, \sum b_i x_i = 1.$$

Chứng minh rằng.

$$\sum x_i^2 \geqslant \frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2}.$$

**Giải.** Từ giả thiết $\Rightarrow \sum a_i x_i t = 0\ \ \forall t \in R \Rightarrow \sum(a_i t + b_i)x = 1$. áp dụng bất đẳng thức Cauchy -Bunhiacôpxki.

$$\left(\sum x_i^2)\left(\sum(a_i t + b_i)\right)^2 \geqslant \left(\sum x_i(a_i t + b_i)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sum x_i^2 \geqslant \frac{1}{(\sum a_i^2)t^2 + (\sum a_i b_i)t + \sum b_i^2} = \frac{1}{At^2 + 2Bt + C}.$$

Bất đẳng thức đúng $\forall t \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng với $k = -\dfrac{\sum a_i b_i}{\sum a_i^2} = -\dfrac{B}{A}$

Mẫu $= A\dfrac{B^2}{A^2} + 2B \cdot -BA + C = \dfrac{1}{A}(AC - B^2) \Rightarrow$

$$\sum x_i^2 \geqslant \frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2} \text{ ( đpcm).}$$

Đặt $p = \dfrac{1}{r_1}$, $q = \dfrac{1}{r_2} \Rightarrow r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = p + q = 0$. áp dụng (4) với $x =$ tg $x$, $y =$ cotg $x$, ta được.

$$\frac{x^{r_1}}{r_1} + \frac{y^{r_2}}{r_2} \geqslant xy \Leftrightarrow \frac{1}{r_1}\ \mathrm{tg}^{r_1} x + \frac{1}{r_2}\ \mathrm{cotg}^{r_2} x \geqslant\ \mathrm{tg}\, x\ \mathrm{cotg}\, x = 1.$$

**(3). Bất đẳng thức Hônđe.**

Giả sử rằng $x_1, x_2, \cdots, x_n\,;\ y_1, y_2, \cdots, y_n > 0$, $p > 0$, $q > 0$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, khi đó ta có bất đẳng thức Hônđe.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Chứng minh.*

Đặt

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}},\ B = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Khi đó, từ (4) $\Rightarrow \dfrac{x_i}{A} \cdot \dfrac{y_i}{B} \leqslant \dfrac{x_i^p}{pA^p} + \dfrac{y_i^q}{qB^q}$, $i = 1, \cdots, n$.

Lấy tổng theo $i$ từ 1 đến $n$ và chú ý $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = A^p$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^q = B^q$ ta được.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{AB} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{pA^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**(4).** Khi $p = q = 2$ ta được bất đẳng thức *Cauchy - Bunhiacôpxki.*

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

**(5). Bất đẳng thức Mincôpxki .**

Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0\,;\ b_1, b_2, \cdots, b_n \geqslant 0$, số $p > 1$ khi đó ta có .

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Chứng minh.*

Ta có đẳng thức hiển nhiên.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=i}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}.$$

áp dụng bất đẳng Hônđe cho mỗi tổng ở vế phải. Nếu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, p > 1, q > 1$ thì $\dfrac{p-1}{q} = p$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p}$. Bởi vậy

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left\{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\right\}$$

Chia 2 vế cho $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Thí dụ 7.** Để đỡ viết ta viết $\sum$ có nghĩa là $\sum_{i=1}^{n}$. Cho $3n$ số thực. $a_1, \cdots, a_n$ ; $b_1, \cdots, b_n$ ; $x_1, \cdots, x_n$ thoả mãn các điều kiện sau.

$$\sum a_i x_i = 0, \sum b_i x_i = 1.$$

Chứng minh rằng.

$$\sum x_i^2 \geqslant \frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2}.$$

**Giải.** Từ giả thiết $\Rightarrow \sum a_i x_i t = 0 \ \forall t \in R \Rightarrow \sum(a_i t + b_i)x = 1$. áp dụng bất đẳng thức Cauchy -Bunhiacôpxki.

$$\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum(a_i t + b_i)\right)^2 \geqslant \left(\sum x_i(a_i t + b_i)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sum x_i^2 \geqslant \frac{1}{(\sum a_i^2)t^2 + (\sum a_i b_i)t + \sum b_i^2} = \frac{1}{At^2 + 2Bt + C}.$$

Bất đẳng thức đúng $\forall t \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng với $k = -\dfrac{\sum a_i b_i}{\sum a_i^2} = -\dfrac{B}{A}$

Mẫu $= A\dfrac{B^2}{A^2} + 2B \cdot -BA + C = \dfrac{1}{A}(AC - B^2) \Rightarrow$

$$\sum x_i^2 \geqslant \frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2} \text{ ( đpcm).}$$

**Thí dụ 8.** Chứng minh rằng $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ ta có bất đẳng thức.

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}.$$

**Giải.**

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy -Bunhiacốpxki.

$$\sum x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2} \Leftrightarrow (\sum x_i y_i)^2 \leqslant \sum x_i^2 \cdots \sum y_i^2$$

với $x_k = \sqrt{a_k(a_{k+1} + a_{k+2})}, y_k = \sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}}}$, ta được

$$\left(\sum a_i\right)^2 = \left(\sum x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum x_i^2 \sum y_i^2 = \left[a_1(a_2 + a_3) + \cdots + a_n(a_1 + a_2)\right] \cdots$$

$$\left[\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right] = (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_n a_1 + a_n a_2)\left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right.$$

$$\leqslant (\text{Cauchy })\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_3^2}{2} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{2} + \frac{a_n^2 + a_2^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right.$$

$$2(a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right) \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu $= \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

## 3 Mở rộng phạm vi ứng dụng bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacốpxki .

Sau đây là một trong các hướng mở rộng bất đẳng thức Cauchy -Bunhiacốpxki. Xét hai dãy số $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $c_1, c_2, \cdots, c_n$ có các số hạng khác 0. Theo bất đẳng thức Cauchy -Bunhiacốpxki ta có.

$$\left(\sum a_i\right)^2 = \left(\sum a_i c_i \frac{1}{c_i}\right)^2 \leqslant \left(\sum a_i^2 c_i^2\right)^2 \left(\sum \frac{1}{c_i^2}\right)^2.$$

Đặt $\sum \frac{1}{c_i^2} = C_n$ ta được $\left(\sum a_i\right)^2 \leqslant C_n \sum a_i^2 c_i^2$.

Dấu = đạt được $\Leftrightarrow$ các dãy $\{a_i c_i\}$ và $\left\{\frac{1}{c_i}\right\}$ tỉ lệ.

$$\Rightarrow \left(\sum a_i\right)^2 < \frac{\pi}{2}\left(tP + \frac{1}{t}Q\right) \ \forall t > 0.$$

Lấy $t = \sqrt{\dfrac{Q}{P}} \Rightarrow tP + \dfrac{1}{t}Q = 2\sqrt{PQ}$, ta được bất đẳng thức Cacxơn.

$$\left(\sum a_i\right)^4 < \pi^2\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum (ia_i)^2\right).$$

## 4 Các đại lượng trung bình

Giả sử $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. Trong thực tiễn thường dùng các đại lượng trung bình sau.

(1). Trung bình cộng. $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$,

(2). Trung bình nhân. $M_2 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$,

(3). Trung bình điều hoà . $M_3 = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$,

(4). Trung bình bình phương. $M_4 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2}$,

Ta có hệ thức sau giữa các đại lượng trung bình.

**Định lý 1.** $M_3 \leqslant M_2 \leqslant M_1 \leqslant M_4$.

Trong trường hợp $n = 2$, ý nghĩa hình học của định lý như sau.

Xét nửa đường tròn đường kính $BC$, tâm $O$. Giả sử $OD \perp BC$ tại $O$. Từ điểm $E$ bất kỳ $\neq D, B, C$ ta kẻ tiếp tuyến với đường tròn, $ctBC$ kéo dài ở $A$. Kẻ $EF \perp BC$, $F \in BC$.

Đặt $AB = a_1 > O$, $AC = a_2 > O(a_1 \neq a_2)$. Khi đó. $AO = \dfrac{a_1 + a_2}{2} > AE$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông), mà

$$AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{(AO + OE)(AO - OE)} = \sqrt{AB \cdot AC} = \sqrt{a_1 a_2}.$$

$\Rightarrow M_3 = AO > AE = M_2$. hoặc $AE^2 = AC \cdot AB \Rightarrow AE = \sqrt{AB \cdot AC}$ (hệ thức lượng trong vòng tròn ) .

Theo công thức $2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$ ta có

$$AD=\sqrt{AO^2+OD^2}+\sqrt{\frac{(AO-OD)^2+(AO+OD)^2}{2}}=\sqrt{\frac{AC^2+AB^2}{2}}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2}{2}}=$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông. $AF\cdot AO=AE^2\Rightarrow$

$$AF=\frac{AE^2}{AO}=\frac{a_1a_2}{\frac{a_1+a_2}{2}}=2\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=M_3$$

Vì $AD>AO>AE>AF\Rightarrow M_4>M_1>M_2>M_3.$

**Chứng minh định lý.**

**(1).** Theo bất đẳng thức Cauchy .

$$\sqrt[n]{\prod\frac{1}{a_i}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\frac{1}{a_i}\Rightarrow\frac{n}{\sum\frac{1}{a_i}}=M_3\leqslant\sqrt[n]{\prod a_i}=M_2.$$

**(2).** Theo bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacôpxki.

$$\sum a_i=\sum 1\cdot a_i\leqslant\sqrt{\sum 1^2}\sqrt{\sum a_i^2}=\sqrt{n}\sqrt{\sum a_i^2}\Rightarrow\frac{1}{n}\sum a_i=M_1\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum a_i^2}=M_4$$

**(3).** Theo bất đẳng thức Cauchy . $M_2\leqslant M_1$

**(4).** Vậy $M_3\leqslant M_2\leqslant M_1\leqslant M_4$.

**Thí dụ 9.** (Đề thi học sinh giỏi năm 1980)

Gọi $T=\sum_{i=1}^k m_i, m_i>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{k}\left(m_i+\frac{1}{m_i}\right)^2\geqslant k\left(\frac{k}{T}+\frac{T}{k}\right)^2\qquad(1)$$

**Giải.**

$$(1)\ \Leftrightarrow\sum_{i=1}^{k}m_i^2+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i^2}\geqslant k\left(\frac{k^2}{T^2}+\frac{T^2}{k^2}\right).$$

Ta có $\dfrac{T}{k} = M_1 \leqslant M_4 = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^k m_i^2} \Leftrightarrow \dfrac{T^2}{k^2} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k m_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^k m_i^2 \geqslant k\dfrac{T^2}{k^2}$.

Lại có $\dfrac{k}{\sum \frac{1}{m_i^2}} = M_3 \leqslant M_2 = \sqrt[k]{\prod m_i^2} =$

$$= \sqrt[k]{\prod m_i} \cdot \sqrt[k]{\prod m_i} \leqslant \frac{1}{k}\sum m_i \cdot \frac{1}{k}\sum m_i = \frac{T^2}{k^2} \Rightarrow \sum \frac{1}{m_i^2} \geqslant k\frac{k^2}{T^2}.$$

Bởi vậy $\sum m_i^2 + \sum \dfrac{1}{m_i^2} \geqslant k\left(\dfrac{T^2}{k^2} + \dfrac{k^2}{T^2}\right)$ (đpcm) .

## Bài tập

**(1).** (Đề thi học sinh giỏi năm 1976).

Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm $M$ nào nằm trong tam giác $ABC$ ta đều có

$$d_a \cdot d_b \cdot d_c \leqslant \frac{8S^3}{27abc}. \tag{1}$$

trong đó $d_a$, $d_b$, $d_c$ là khoảng cách từ $M$ lần lượt đến các cạnh $BC, CA, AB$ ; $a, b, c$ là độ dài các cạnh và $S$ là diện tích của tam giác. Hãy mở rộng (1) cho tứ diện trong không gian.

**(2).** (Đề thi học sinh giỏi Liên Xô năm 1976).

Cho $x_1 = 2$ ; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 1}{5x_n}$ , $n = 1, 2, \cdots$. Chứng minh rằng $\forall n > 1$ ta có $\dfrac{1}{5} \leqslant x_n < 2$.

**(3).** Chứng minh rằng $\forall a, b, x > 0$ ta đều có $\left(\dfrac{a+bx}{1+x}\right)^{1+x} \geqslant ab^x$

**(4).** Chứng minh rằng dãy số $v_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ thực sự tăng.

**(5).** Chứng minh rằng, nếu $x_i > 0$ và $\sum_{i=1}^n x_i = p$ , $n \in Z^+$

thì $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{x_i+1} \leqslant n+1$ .

**(6)**. Chứng minh rằng $\forall a > 1$ , $b > 0$ ta đều có $\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^{a} \cdot \left(1-\dfrac{1}{b}\right)^{b} \leqslant 1.$

**(7)**. (Đề thi học sinh giỏi Hungari).

Chứng minh rằng nếu $\alpha$ là góc nhọn thì

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5.$$

**(8)**. Chứng minh rằng, nếu $\alpha$ là góc nhọn thì

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) \geqslant 3+2\sqrt{2},$$

dấu = đạt được $\Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

**(9)**. Cho $a_1, \cdots, a_n$ ; $b_1, \cdots, b_n$ là các số thực. Chứng minh rằng

1/ $\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2} \geqslant \sqrt{\sum (a_i+b_i)^2}$.

2/ $\left|\sqrt{\sum a_i^2} - \sqrt{\sum b_i^2}\right| \leqslant \sum |a_i + b_i|$.

**(10)**. Giả sử $m_k = \dfrac{1^k}{2} + \dfrac{2^k}{3} + \dfrac{3^k}{4} + \cdots + \dfrac{100^k}{101}, k\ k = 1, 2, \cdots$
Chứng minh rằng $m_k^2 \leqslant m_{k+1} \cdot m_{k-1}$.

**Chú ý.** Bất đẳng thức đúng $\forall m_k = \dfrac{1^k}{2} + \dfrac{2^k}{3} + \dfrac{3^k}{4} + \cdots + \dfrac{n^k}{n+1} \forall n \in Z^+$.

**(11)**.Chứng minh rằng $\forall x_i > 0$ và $\forall n \in Z^+$ ta đều có $\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} \geqslant n^2$.

**(12)**. (Đề thi học sinh giỏi năm 1981).

Cho $n$ số thực $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sao cho $0 < p \leqslant t_k \leqslant q$ với $k = 1, 2, \cdots, n$. Biết rằng $A = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_k$ và $B = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_k^2$. Chứng minh rằng $\dfrac{A^2}{B} \geqslant$

$\dfrac{4pq}{(p+q)^2}$ và tìm điều kiện cần và đủ để có dấu đẳng thức.

## Chỉ dẫn

(1). $S = \dfrac{1}{2}(ad_a + bd_b + cd_c)$. Ăp dụng bất đẳng thức Cauchy .

Mở rộng $d_A d_B d_C d_D \leqslant \dfrac{81V^4}{256 S_A S_B S_C S_D}$.

(2). Ăp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái. Vế phải. Tìm điều kiện đơn điệu của $x_n$ .

(3). Ăp dụng bất đẳng thức Cauchy mở rộng, cho $a_1 = a,\ a_2 = b,\ p_1 = 1,\ p_2 = x$.

(4). Sử dụng kết quả bài 3, hoặc làm như thí dụ 4.

(5). Ăp dụng bất đẳng thức Cauchy mở rộng với chú ý $\sqrt[p]{x_i+1} = \sqrt[p]{(x_i+1)\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{p-1}}$.

Bất đẳng thức Cauchy

(6). Sử dụng bất đẳng thức Cauchy mở rộng, cho ta $a_1 = 1 - a^{-1}$ , $, a_2 = 1 + b^{-1}$
$p_1 = a$ , $p_2 = b$.

(7). Sử dụng bất đẳng thức Cauchy .

(8). Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacôpxki.

(9). Bình phương hai vế rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacôpxki.

(10). Chứng minh rằng $m_{k+1}x^2 - 2m_k x + m_{k-1} \geqslant 0 \forall x \Rightarrow \Delta' \leqslant 0$.

(11). Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacốpxki.

(12). Chú ý $0 < p \leqslant t_k \leqslant q \Leftrightarrow (t_k - p)(t_k - q) \leqslant 0 \Leftrightarrow t_k^2 - (p-q)t_k + pq \leqslant 0$. Lấy tổng theo $k$ từ 1 đến $n$. Lưu ý $A = M_1$ , $B = M_4^2$ .

# Một số bất đẳng thức liên quan đến tích phân xác định

Lê Đình Thịnh
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Ngày nay tích phân xác định được dùng phổ biến ở bậc phổ thông, ta nên có một số bài toán liên quan đến tích phân xác định.

**Thí dụ 1 .** (Đề thi học sinh giỏi Belarútsia, 1994).
Trên đồ thị hàm $y = ax^3$, $(a > 0)$ cho các điểm $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (với hoành độ dương). Nối các điểm này với góc toạ độ. Kẻ các đường vuông góc $A_ix_i$ với $Ox$. Tô màu trắng đen theo quy tắc bàn cờ. Chứng minh rằng diện tích các ô trắng bằng diện tích các ô đen.

**Giải.**
Ta chứng minh rằng diện tích tam giác cong $OA_iA_{i+1}$ bằng diện tích hình thang cong $x_iA_iA_{i+1}x_{i+1}$. Ký hiệu $S_i$ là diện tích giới hạn bởi cung $Ox_i$ và dây cung $Ox_i, T_i$ là diện tích tam giác cong $Ox_iA_i$ ; $R_i$ là diện tích tam giác thẳng $Ox_iA_i$, khi đó

$$S_i + T_i = R_i$$

Ta có: $\quad R_i = \frac{1}{2}Ox_i \cdot x_iA_i = \frac{1}{2}x_i \cdot ax_i^3 = \frac{1}{2}ax_i^4$

$$T_i = \int_0^{x_i} ax^3dx = \frac{1}{4}ax_i^4 \Rightarrow S_i = R_i - T_i = \frac{1}{4}ax_1^4 = T_i.$$

**Thí dụ 2.** ( Đề 106 câu IVa, Bộ đề thi Đại học) .
Chứng minh rằng, nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm liên tục, xác định trên $[a, b]$ thì ta có:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

(Bất đẳng thức Cauchy -Bunhiacôpxki).

**Giải.**

$\forall t \in \mathbb{R}$ ta có $0 \le \left[tf(x) + g(x)\right]^2 = t^2 f^2(x) + 2tf(x)g(x) + g^2(x)$

$\Rightarrow 0 \le t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx.$

Vế phải là tam thức bậc hai không âm $\forall t \Rightarrow$ biệt thức thu gọn $\Delta' \le 0 \Rightarrow$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \le 0 \Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

**Thí dụ 3.** ( Bất đẳng thức Hônđe ) .

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm tuỳ ý, khả tích trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $p$ và $q$ là hai số lớn hơn 1 sao cho $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức Hônđe:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Chứng minh.** Do tính thuần nhất của bất đẳng thức, tức là nếu bất đẳng thức đúng với $f(x), g(x)$ thì cũng đúng với $tf(x), kg(x) \Rightarrow$ xét trường hợp $\int_a^b \left|f(x)g(x)dx\right| \le 1$ và $\int_a^b \left|g(x)\right|^q dx \le 1$ là đủ, và ta chứng minh bất đẳng thức

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le 1.$$

Ta viết bất đẳng thức Ienxen tại điểm $x$ bất kỳ $\in [a, b]$ đối với $f(x)$ và $g(x)$ :

$$\left|f(x)\right| \cdot \left|g(x)\right| \le \frac{1}{p}\left|f(x)\right|^p + \frac{1}{q}\left|g(x)\right|^q.$$

Tích phân hai vế

$$\to \int_a^b \left|f(x)\right| \cdot \left|g(x)\right| dx \le \frac{1}{p}\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx + \frac{1}{q}\int_a^b \left|g(x)\right|^q dx \le 1.$$

Vì $\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|f(x)g(x)dx\right| \Rightarrow$ (đpcm).

**Chú ý:** Khi $p = q = 2$ ta nhận được bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacôpxki.

**Thí dụ 4** ( Bất đẳng thức Trebưsép). Nhắc lại bất đẳng thức Trebưsép đối với các dãy số $0 < y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n ; , z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq_i > 0$ là :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Bất đẳng thức Trebưsép đối với tích phân:

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ xác định liên tục trên $[a, b]$, $f(x)$ đồng biến, $g(x)$ nghịch biến, thì

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \qquad (1)$$

**Chứng minh.**

Chia $[a, b]$ thành $n$ phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i$; đặt

$$f(x_i) = y_i\,, g(x_i) = z_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\,;$$

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty ty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i\,; \int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty ty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

Bây giờ (1) nhận được từ bất đẳng thức Trebrisép bằng cách chuyển qua giới hạn. Tôi đề xuất sáng tác các bài toán bất đẳng thức dựa vào ý nghĩa hình học của tích phân xác định và phương pháp tính gần đúng tích phân xác định như sau:

Biết $\int\limits_a^b f(x)dx = S(x)$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = f(x)\,,\, y = 0\,,\, x = a\,,\, x = b$ (với giả thiết $f(x) \geq 0$ trên [a , b ] ).

Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài $\dfrac{b-a}{n} = h$ bởi các điểm $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ khi đó:

**Công thức hình chữ nhật:**

$$S_1 = h\big[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big] \tag{1}$$

$$S_2 = h\big[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big]. \tag{2}$$

**Công thức thang:**

$$S_3 = \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right] \cdot h. \tag{3}$$

**(1).** Nếu ta chọn $f(x)$ liên tục, là hàm lồi, đồng biến thì:

$$S_3 < \int_a^b f(x)dx < S_2.$$

**(2).** Nếu ta chọn $f(x)$ liên tục, là hàm liên tục , lồi, nghịch biến thì:

$$S_2 < \int_a^b f(x)dx < S_1.$$

**(3).** Nếu ta chọn $f(x)$ liên tục, là hàm lõm, đồng biến thì:

$$S_1 < \int_a^b f(x)dx < S_3.$$

**(4).** Nếu ta chọn $f(x)$ liên tục, là hàm lõm, nghịch biến thì:

$$S_2 < \int_a^b f(x)dx < S_3.$$

**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}, \forall n \in Z^+.$$

**Giải.**

Xét hàm $y = \sqrt{x}$ trên $[0, n]$ (là hàm lồi, liên tục, đơn điệu tăng)

$$\Rightarrow S = \int_0^n \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

$$S_3 = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right) - \frac{\sqrt{n}}{2},$$

$$S_2 = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$$

Do $f(x) = \sqrt{x}$ là hàm liên tục, lồi và đồng biến $\Rightarrow S_3\frac{2}{3}n\sqrt{n} < S_2$ (x . 1. trang 2)

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} < \frac{2}{3}n\sqrt{n} < 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}.$$

$$S_2 - \frac{\sqrt{n}}{2} < S \Rightarrow S_2 < \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{2}{3}n\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

Vậy $\frac{2}{3}n\sqrt{n} < 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$

**Thí dụ 6.** Chứng minh rằng

$$n! < n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+1}, \forall n \in Z^+.$$

**Giải.**

Xét hàm $y = lnx$ trên đoạn $[1, n]$ liên tục, là hàm lồi, đồng biến . Suy ra

$$S_3 < \int_1^n lnxdx = nlnn - n + 1 < S_2 .$$

$$\begin{aligned}
S_3 =& \frac{ln1 + lnn}{2} + ln2 + ln3 + \cdots + ln(n-1)\\
=& ln1 + ln2 + \cdots + lnn - \frac{1}{2}lnn (\text{do } ln1 = 0)\\
=& nn! - \frac{1}{2}lnn < nlnn - n + 1\\
\Rightarrow& lnn! < \left(n + \frac{1}{2}\right)lnn + lne^{-n+1}\\
=& lnn^{n+1} + lne^{-n+1} = lnn^{n+1} \cdot e^{-n+1}\\
\Rightarrow& n! < n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+1}
\end{aligned}$$

# Xây dựng bất đẳng thức một biến nhờ bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân và áp dụng

Nguyễn Vũ Lương
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

**Bài 1.** Với $0 \leq a \leq 1$ , chứng minh rằng: $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$

**Giải.**
Ta có: $a^2 + \frac{1}{4} \geqslant a \leftrightarrow a(1-a) \leq \frac{1}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{1}{2}$.

## 1 Một số áp dụng

**Bài 2.** Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh trong ba đẳng thức

$$a(1-b) > \frac{1}{4}$$

$$b(1-c) > \frac{1}{4}$$

$$c(1-a) > \frac{1}{4}$$

có ít nhất một bất đẳng thức sai.

**Giải.** Giả sử 3 bất đẳng thức đều đúng. Suy ra:

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64} \tag{1}$$

Mặt khác ta có:

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4}$$
$$b(1-b) \leq \frac{1}{4}$$
$$c(1-c) \leq \frac{1}{4}$$

Nhân các bất đẳng thức trên ta thu được:

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{64} \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra mâu thuẫn, bài toán được chứng minh.

**Bài 3.** Với $0 \leq a \leq 1$, chứng minh rằng :

1) $a(1-a^2) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

2) $a(1-a^3) \leq \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

3) $a(1-a^n) \leq \dfrac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}$

**Giải.**

1) Ta có :

$$a^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant 3 \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = a$$

Suy ra:

$$a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

2) Ta có:

$$a^4 + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} \geqslant a$$

Suy ra: $\quad a(1-a^3) \leq \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

3) Ta có:

$$a^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}}_{\text{n số hạng}} \geqslant a$$

Suy ra:

$$a(1-a^n) \leq \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}$$

## Một số bài tập áp dụng

__Bài 4.__ Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Giải.**
Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{a}{1-a^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\leftrightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{(đã chứng minh )}$$

__Bài 5.__ Với $a, b, c, d$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = 1.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^3+c^3+d^3} + \frac{b^2}{c^3+d^3+a^3} + \frac{c^2}{d^3+a^3+b^3} + \frac{d^2}{a^3+b^3+c^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3} \qquad (3)$$

**Giải.**
Ta có:

$$(3) \leftrightarrow \frac{a^2}{1-a^3} + \frac{b^2}{1-b^3} + \frac{c^2}{1-c^3} + \frac{d^2}{1-d^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}(a^3+b^3+c^3+d^3)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{1-a^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}a^3 \leftrightarrow a(1-a^3) \leq \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

Dấu đẳng thức xẩy ra $\leftrightarrow a = b = c = d = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

**Bài 6.** Với $a > 0$, chứng minh rằng:

$$1) \qquad a^2(1-2a) \leq \frac{1}{27}$$

$$2) \qquad a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256}$$

**Giải.**
1) Ta có:

$$a^3 + a^3 + \frac{1}{27} \geqslant a^2 \leftrightarrow a^2(1-2a) \leq \frac{1}{27}$$

Dấu đẳng thức xẩy ra $\leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$
2) Ta có:

$$a^4 + a^4 + a^4 + \frac{1}{256} \geqslant a^3 \leftrightarrow a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256}$$

Dấu đẳng thức xẩy ra $\leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$

## Một số bài tập áp dụng

**Bài 7.** Với $0 < a, b, c < \dfrac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{a(2b+2c-1)} + \frac{1}{b(2c+2a-1)} + \frac{1}{c(2a+2b-1)} \geqslant 27$$

**Giải.**
Ta có:

$$a^2(1-2a) \leq \frac{1}{27} \quad \leftrightarrow \frac{1}{a^2(1-2a)} \geqslant 27$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{a(1-2a)} \geqslant 27a \quad \leftrightarrow \frac{1}{a(2b+2c-1)} \geqslant 27a$$

Suy ra: $\qquad P \geqslant 27(a+b+c) = 27 \qquad$ (đpcm)

**Bài 8.** Với $0 < a, b, c, d \leq \dfrac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{a^2(3b + 3c + 3d - 2)} + \frac{1}{b^2(3c + 3d + 3a - 2)} +$$
$$+ \frac{1}{c^2(3d + 3a + 3b - 2)} + \frac{1}{d^2(3a + 3b + 3c - 2)} \geqslant 256$$

**Giải.**

Ta có:

$$a^3(1 - 3a) \leq \frac{1}{256} \quad \leftrightarrow \frac{1}{a^3(1 - 3a)} \geqslant 256$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{a^2(1 - 3a)} \geqslant 256a \quad \leftrightarrow \frac{1}{a^2(3b + 3c + 3d - 2)} \geqslant 256a$$

Suy ra: $\quad P \geqslant 256(a + b + c + d) = 256$

**Bài 9.** Chứng minh rằng:

1) $\dfrac{\sqrt{2a - 1}}{a} \leq 1$

2) $\dfrac{\sqrt[3]{3a - 2}}{a} \leq 1$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{na - n + 1}}{a} \leq 1$

**Giải.**

1) Ta có:

$$\frac{\sqrt{2a - 1}}{a} \leq \frac{2a - 1 + 1}{2a} = 1$$

(Dấu đẳng thức xảy ra $\leftrightarrow a = 1$)

2) Ta có:

$$\frac{\sqrt[3]{3a - 2}}{a} \leq \frac{3a - 2 + 1 + 1}{3a} = 1$$

(Dấu đẳng thức xảy ra $\leftrightarrow a = 1$)

3) Ta có:

$$\frac{\sqrt[n]{na - (n - 1)}}{a} \leq \frac{na - (n - 1) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{n - 1 số}}}{na} = 1$$

(Dấu đẳng thức xảy ra $\leftrightarrow a = 1$)

**Bài 10.** Với $a, b, c > \frac{1}{2}$; $\quad a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{5-2(b+c)}} + \frac{b^2}{\sqrt{5-2(c+a)}} + \frac{c^2}{\sqrt{5-2(a+b)}} \geqslant 3$$

**Giải.**
Ta có:

$$\frac{\sqrt{2a-1}}{a} \leq 1$$
$$\leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2a-1}} \leq 1$$
$$\leftrightarrow \frac{a^2}{\sqrt{5-2(b+c)}} \geqslant a$$

Suy ra : $\quad P \geqslant a + b + c = 3$

**Bài 11.** Với $a, b, c \geqslant \frac{1}{2}$, chứng minh rằng:

$$P = \frac{\sqrt{2a-1}}{a} + \frac{\sqrt[3]{3b-2}}{b} + \frac{\sqrt[4]{4c-3}}{c} \leq 3$$

**Giải.**
Ta có:

$$\frac{\sqrt{2a-1}}{a} \leq 1$$
$$\frac{\sqrt[3]{3b-2}}{b} \leq 1$$
$$\frac{\sqrt[4]{4c-3}}{c} \leq 1$$

Cộng tất cả các đẳng thức trên suy ra: $\qquad P \leq 3 \qquad$ (đpcm)

## Một số bài tập và hướng dẫn

**Bài 1.** Với $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$, chứng minh rằng trong 3 bất đẳng thức:

$$a^2(1-2b) > \frac{1}{27}, \quad b^2(1-2c) > \frac{1}{27}, \quad c^2(1-2a) > \frac{1}{27}$$

có ít nhất một đẳng thức sai.

**Hướng dẫn.** Nếu cả ba bất đẳng thức trên đúng, suy ra:

$$a^2b^2c^2(1-2a)(1-2b)(1-2c) > (\frac{1}{27})^3$$

Mặt khác: $a^2b^2c^2(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq (\frac{1}{27})^3$ suy ra mâu thuẫn.

**Bài 2.** Với $0 < a, b, c \leq \frac{1}{3}$, $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{3}{64}$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{1-3a} + \frac{1}{1-3b} + \frac{1}{1-3c} \geqslant 12$$

**Hướng dẫn.** Từ $a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256} \leftrightarrow \frac{1}{1-3a} \geqslant 256a^3$

Thu được: $P \geqslant 256 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) = 256 \cdot \frac{3}{64} = 12$

**Bài 3.** Với $a, b, c \geqslant \frac{1}{2}, abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2a-1} \cdot \sqrt[3]{3b-2} \cdot \sqrt[4]{4c-3} \leq 1$$

**Hướng dẫn.** Suy ra từ: $\sqrt{2a-1} \leq a$, $\sqrt[3]{3b-2} \leq b$, $\sqrt[4]{4c-3} \leq c$

**Bài 4.** Với $a, b, c, d > 0$, thoả mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^4+c^4+d^4+e^4} + \frac{b^4}{c^4+d^4+e^4+a^4} + \frac{c^4}{d^4+e^4+a^4+b^4} +$$

$$+ \frac{d^4}{e^4+a^4+b^4+c^4} + \frac{e^4}{a^4+b^4+c^4+d^4} \geqslant \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$$

# Một số phương pháp xây dựng bất đẳng thức bậc 2

Nguyễn Vũ Lương
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

## Mở đầu

Bất đẳng thức Bunhiacôpski là bất đẳng thức được xây dựng nhờ tính chất của tam thức bậc 2. Khá nhiều bài tập hay trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế được xây dựng nhờ bất đẳng thức này. Tuy nhiên độ phức tạp của các bài tập phụ thuộc nhiều vào các phép biến đổi đặc biệt. Các phép biến đổi bậc 2 khác nhau sẽ thu được các dạng bài tập khác nhau. Các bất đẳng thức thu được chúng ta gọi là các bất đẳng thức bậc 2. Trong bài viết này chúng tôi trình bày một số dạng cụ thể như sau:

1. Bất đẳng thức bậc 2 trong tam giác,
2. Bình phương một bất đẳng thức,
3. Phép biến đổi thuận Bunhiacôpski,
4. Phép biến đổi nghịch Bunhiacôpski,
5. Bất đẳng thức thứ tự xây dựng từ bất đẳng thức Bunhiacôpski,
6. Hằng đẳng thức và bất đẳng thức Bunhiacôpski,

Bài viết chỉ quan tâm đến một phạm vi nhỏ mà chúng tôi tổng kết hay xây dựng được nên các kết quả thu được là bước đầu, rất mong các ý kiến góp ý từ các bạn đọc.

## 1 Hằng đẳng thức và một dạng hệ quả của bất đẳng thức Bunhiacốpski

Từ hằng đẳng thức:

$$(2x+2y-z)^2+(2y+2z-x)^2+(2z+2x-y)^2=9(x^2+y^2+z^2)$$

Ta xây dựng bất đẳng thức

**Ví dụ 1.1.** Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z)$$

*Bài giải.*
Ta có $\quad c(2x + 2y - z) + a(2y + 2z - x) + b(2z + 2x - y)$
$= c(2x + 2y + 2z - 3z) + a(2y + 2z + 2x - 3x) + b(2z + 2x + 2y - 3y)$
$= 2(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)$
Suy ra:
$\Big(2(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)\Big)^2 \leq 9(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$
$\leftrightarrow 2(a+b+c)(x+y+z) - 3(ax+by+cz) \leq 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$
$\leftrightarrow \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z) \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} + (ax + by + cz)$
(đpcm)
Từ hằng đẳng thức:
$(x + y + z - t)^2 + (y + z + t - x)^2 + (z + t + x - y)^2 + (t + x + y - z)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$
Ta xây dựng bất đẳng thức:

**Ví dụ 1.2.** Với $a, b, c, d, x, y, z, t \in R$ Chứng minh rằng:

$$(ax + by + cz + dt) + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)}$$
$$\geq \frac{1}{2}(a + b + c + d)(x + y + z + t).$$

*Bài giải.*
Ta có: $\quad d(x+y+z-t)+a(y+z+t-x)+b(z+t+x-y)+c(t+x+y-z) =$
$= d(x+y+z+t-2t)+a(y+z+t+x-2x)+b(z+x+t+y-2y)+c(t+x+y+z-2z)$
$= (a + b + c + d)(x + y + z + t) - 2(ax + by + cz + dt)$
suy ra:

$$\Big((a + b + c + d)(x + y + z + t) - 2(ax + by + cz + dt)\Big)^2$$
$$\leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$$
$$\leftrightarrow (a + b + c + d)(x + y + z + t) - 2(ax + by + cz + dt)$$
$$\leftrightarrow 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)}$$
$$\leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)} + (ax + by + cz + dt)$$
$$\geq \frac{1}{2}(a + b + c + d)(x + y + z + t)$$

Sử dụng các bất đẳng thức thu được chúng ta chứng minh một số bất đẳng thức sau:
**Ví dụ 1.3.** Với $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng:

$$a + d + bc + 3\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + c^2 + d^2)} \geq 2(1 + c + d) + 2(ac + ad + bd)$$

*Bài giải.*
Bất đẳng thức đã cho viết lại dưới dạng cơ bản.

$$(1, a, d)$$
$$(a, b, 1)$$

như sau: $a + bc + d + \sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + c^2 + d^2)} \geq \frac{2}{3}(1 + a + b)(1 + c + d)$
(suy ra từ ví dụ 1.1). Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$.
**Ví dụ 1.4.** Với $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng:

$$(a + 2b + 3c + 4d) + \sqrt{30(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} \geq 5(a + b + c + d)$$

(suy ra từ ví dụ 1.2).
**Ví dụ 1.5.** Với $A, B, C$ là 3 góc của một tam giác, chứng minh rằng:

$$(3\sin A + 4\sin B + 5\sin C) + 5\sqrt{2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} \geq 8(\sin A + \sin B + \sin C)$$

## 2 Bất đẳng thức bậc 2 trong tam giác

Ta xét phương pháp sử dụng tam thức bậc 2 để chứng minh một bất đẳng thức đơn giản sau:

$$F = \cos A + \cos B + \cos C \leftrightarrow \frac{3}{2}$$

Ta có: $F = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$\leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + F - 1 = 0.$$

Suy ra: $\Delta' = \cos^2\frac{B-C}{2} - 2F + 2 \geq 0$

$$\rightarrow F \leq 1 + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} B = C \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hoàn toàn tương tự chúng ta chứng minh được các bất đẳng thức sau:
**Ví dụ 2.1.** $A, B, C$ là 3 góc của một tam giác, chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
&a/ \quad \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \\
&b/ \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{3}{2} \\
&c/ \quad \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

**Nhận xét 1.** *Phương pháp tam thức bậc 2 cho phép chúng ta thu được các bất đẳng thức mạnh hơn.*

**Ví dụ 2.2.** $A, B, C$ là 3 góc của một tam giác, chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2}}{6}.$$

*Bài giải.* Cộng ba bất đẳng thức:

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &\leq 1 + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{2} \\
\cos A + \cos B + \cos C &\leq 1 + \frac{\cos^2\frac{C-A}{2}}{2} \\
\cos A + \cos B + \cos C &\leq 1 + \frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{2}
\end{aligned}$$

**Ví dụ 2.3.** $A, B, C$ là 3 góc của một tam giác, chứng minh rằng:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{\cos^2(A-B) + \cos^2(B-C) + \cos^2(C-A)}{12}.$$

*Bài giải.* Cộng ba bất đẳng thức:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{1}{4}\cos^2(A - B)$$
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{1}{4}\cos^2(B - C)$$
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{1}{4}\cos^2(C - A)$$

**Ví dụ 2.4.** $A, B, C$ là 3 góc của một tam giác, chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{B-C}{2}.$$

**Nhận xét 2.** *Sử dụng một số đẳng thức:*

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{l_a}$$
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$
$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$$

Chúng ta thu được một số bất đẳng thức của các yếu tố độ dài sau:
**Ví dụ 2.5.** Chứng minh rằng :

$$\frac{h_a^2}{l_a^2} + \frac{h_b^2}{l_b^2} + \frac{h_c^2}{l_c^2} \geq \frac{6r}{R}.$$

**Ví dụ 2.6.** Chứng minh rằng :

$$\frac{h_a^2}{l_a^2} \geq \frac{2r}{R}.$$

**Nhận xét 3.** *Ta có một bất đẳng thức đơn giản:*

$$\left|\frac{A-B}{\alpha}\right| \geq \left|\frac{A-B}{\beta}\right|; 1 < \alpha < \beta.$$
$$\rightarrow \cos\left|\frac{A-B}{\alpha}\right| \leq \cos\left|\frac{A-B}{\beta}\right|$$
$$\leftrightarrow \cos\frac{A-B}{\alpha} \leq \cos\frac{A-B}{\beta}$$

Sử dụng ước lượng đơn giản trên chúng ta thu được một số bất đẳng thức sau:

**Ví dụ 2.7.** Chứng minh rằng:

$$3\Big(\frac{a^2+b^2+c^2}{R^2}\Big) \leq 24 + \frac{h_a^2}{l_a^2} + \frac{h_b^2}{l_b^2} + \frac{h_c^2}{l_c^2}.$$

*Bài giải.* Ta có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{\cos^2(A-B) + \cos^2(B-C) + \cos^2(C-A)}{12}$$
$$\leq 2 + \frac{\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2}}{12}.$$

suy ra: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} \leq 2 + \dfrac{1}{12}\Big(\dfrac{h_a^2}{l_a^2} + \dfrac{h_b^2}{l_b^2} + \dfrac{h_c^2}{l_c^2}\Big).$

**Ví dụ 2.8.** Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{3} + \cos^2\frac{C-A}{4}}{6}.$$

**Ví dụ 2.9.** Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{6}\Big(\cos\frac{A-B}{2} + \sqrt{\cos^3\frac{B-C}{3}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C-A}{2}}\Big).$$

**Nhận xét 4.** *Thay thế bất đẳng thức* $\cos\dfrac{B-C}{2} \leq 1$ *trong cách giải bằng bất đẳng thức* $cos(\alpha B - \gamma C) \leq 1$ *chúng ta thu được một số bất đẳng thức:*

**Ví dụ 2.10.** Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos(B - \frac{C}{2}) + \cos\frac{3C}{2} \le \frac{3}{2}.$$

*Bài giải.* Ta có

$$\cos A + \cos(B - \frac{C}{2}) + \cos\frac{3C}{2} = \cos A + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-2C}{2}.$$

$$\le \cos A + 2\sin\frac{A}{2} \le \frac{3}{2} \quad (\text{ đặt } t = \sin\frac{A}{2}).$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \\ B = 2C \end{cases}$

**Ví dụ 2.11.** Chứng minh rằng:

$$F = \sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)\sin\frac{3C}{4} \le \frac{1}{8}.$$

*Bài giải.* Ta có:

$$F = \frac{1}{2}\sin A2\Big(\cos\frac{B-2C}{2} - \sin\frac{A}{2}\Big) \le \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\Big(1 - \sin\frac{A}{2}\Big) \le \frac{1}{4}.$$

**Nhận xét 5.** *Đưa tham số vào các bất đẳng thức bậc 2 chúng ta thu được các bất đẳng thức:*

**Ví dụ 2.12.** Chứng minh rằng:
*Bài giải.* Ta có:

$$F = \cos A + 2m\sin A2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \le \cos A + 2m\sin\frac{A}{2}.$$

$$F \le -2\sin^2 A2 + 2m\sin\frac{A}{2} + 1 \le 1 + \frac{m^2}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự :

**Ví dụ 2.13.** Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2} + m\Big(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\Big) \le 1 + \frac{m^2}{2}.$$

**Ví dụ 2.14.** Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\Big(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\Big).$$

*Bài giải.*

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\Big(\sin\frac{A+C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\Big)\\
&+\Big(\sin(\frac{A+B}{2})-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\Big)\le 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A}{2}.\\
&\leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\Big(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Big)\\
&\le 1+\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{2}.\quad (\text{ Chọn } m=\cos\frac{A}{2}).
\end{aligned}$$

**Nhận xét 6.** *Xét các điều kiện hạn chế đối với góc A chúng ta thu được các bất đẳng thức.*

**Ví dụ 2.15.** Với $A, B, C$ là ba góc của một tam giác không nhọn, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F=\cos A+\cos B+\cos C$$

*Bài giải.* Ta có :

$$F=\cos A+2\sin\frac{A}{2}\cos\Big(\frac{B-C}{2}\Big)\quad (\text{ giả sử } A\ge\frac{\pi}{2})$$

$\to F\le -2\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}+1$

đặt $t=\sin\frac{A}{2}$, $\frac{A}{2}\ge\frac{\pi}{4}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\le t=\sin\frac{A}{2}<1$

Ta có $F\le -2t^2+2t+1=f(t)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\le t<1\to f(t)\le f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}.$

Vậy $F_{\max}=\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}B=C\\ \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

**Nhận xét 7.** *Chuyển các bất đẳng thức trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số chúng ta thu được một số bất đẳng thức sau:*

**Ví dụ 2.16.** Với $a, b, c > 0$, $ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right) + \left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right) + \left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right) \leq \frac{9}{8}.$$

*Bài giải.* Từ điều kiện suy ra có tồn tại 3 góc của một tam giác sao cho:

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2},\ b = \operatorname{tg}\frac{B}{2},\ c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

và bất đẳng thức trên tương đương với

$$2\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{9}{8}.$$

**Ví dụ 2.17.** Với $a, b, c$ là các số thực dương thoả mãn các điều kiện:

$$ab + bc + ca = 1,\ a + b + c + abc \geq 2.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leq \sqrt{2}$$

*Bài giải.* Từ điều kiện $a, b, c > 0$, $ab + bc + ca = 1$ suy ra có tồn tại các góc $A, B, C$ sao cho :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = a,\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = b,\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = c$$

Từ điều kiện suy ra:

$$\begin{aligned} &(1-a)(1-b)(1-c) \leq 0 \\ \leftrightarrow &\frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\frac{1-b^2}{1+b^2}\cdot\frac{1-c^2}{1+c^2} = \cos A\cos B\cos C \leq 0 \end{aligned}$$

Vậy tam giác không nhọn trên thu được:

$$\cos A\cos B\cos C \leq \sqrt{2} \quad (\text{ ví dụ } 2.15).$$

## 3 Bình phương một bất đẳng thức

Trong các đề thi cho học sinh giỏi của nhiều quốc gia trên thế giới có xuất hiện một số dạng bất đẳng thức thu được bằng cách bình phương một bất đẳng thức mà cách giải khá hay và khó. Trong mục này chúng ta xây dựng một số bất đẳng thức dạng này.

**Ví dụ 3.1.** (Rumani) Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\sin\frac{17}{12}+\sin\frac{r}{6R}.$$

*Bài giải.* Xuất phát từ bất đẳng thức mà chúng ta coi như bậc 1:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\sin\frac{3}{2}$$

Ta xét: $\left[2(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})-3\right]^2\ge 0$

$$\leftrightarrow 4\Big(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Big)^2+9\ge 12\Big(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Big)\qquad(1)$$

Điều đáng quan tâm là xây dựng ước lược:

$$\Big(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Big)^2\le\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}.$$

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin A\ge\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin A+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin B}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\
&\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin C+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin B\ge 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin A+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin C\ge 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)+\operatorname{tg}\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)\ge\\
&\ge 4\Big(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)&=\frac{\sin A}{\frac{\cos A}{2}}\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\\
&=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\cos B+\cos C.
\end{aligned}$$

Ta thu được:

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq 2\Big( \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\Big).$$

$$\leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq \Big( \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\Big)^2. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$4\Big( \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\Big) + 9 \geq 12\Big( \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\Big)$$

$$\leftrightarrow 2(3 + \cos A + \cos B + \cos C) + 9 \geq 12\Big( \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\Big)$$

$$\leftrightarrow 2(4 + \frac{r}{R}) + 9 \geq 12\Big( \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\Big)$$

$$\leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{17}{12} + \frac{r}{6R} \quad (\text{ đpcm }).$$

**Ví dụ 3.2.** Chứng minh rằng:

$$p(r + 4R) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}r^2 \quad (\Delta ABC - \text{ nhọn }).$$

*Bài giải.* Ta có bất đẳng thức:

$$\Big( \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} - \sqrt{3}\Big)^2 \geq 0$$

$$\leftrightarrow \Big( \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\Big)^2 + 3 \geq$$

$$\geq 2\sqrt{3}\Big( \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\Big). \qquad (1)$$

Ta có đẳng thức: $\operatorname{tg} a + 2\operatorname{cotg} 2a = \operatorname{cotg} a.$
suy ra:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = 2( \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geq 3\Big( \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\Big). \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$2\sqrt{3}\Big( \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\Big) \leq 3 + \frac{1}{9}\Big( \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\Big)^2.$$

$$\leftrightarrow 2\sqrt{3}\frac{r+4R}{p} \le 3\frac{r^2}{9p^2} \leftrightarrow r+4R \le \frac{r^2}{6\sqrt{3}p} \quad (\text{ đpcm}).$$

**Ví dụ 3.3.** Chứng minh rằng:

$$4\Big(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Big)^2+3 \ge \frac{6r}{R}$$

*Bài giải.* Ta có

$$4(\cos A+\cos B+\cos C)^2+9 \ge 6(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Suy ra:

$$4\Big(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Big)^2+9 \ge 6\Big(1+\frac{r}{R}\Big) \quad (\text{ đpcm }).$$

**Ví dụ 3.4.** Chứng minh rằng:

$$15+\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} \ge 4\Big(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\Big).$$

*Bài giải.* Ta có

$$\Big(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\Big)^2+36 \ge 12\Big(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\Big).$$

Suy ra:

$$3\Big(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\Big)+36 \ge 12\Big(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\Big).$$

$$\leftrightarrow 3\Big(3+\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}\Big)+36 \ge 12\Big(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\Big)$$

suy ra (đpcm).

## 4 Phép biến đổi thuận Bunhiacôpski

Khá nhiều bất đẳng thức trong các kỳ thi quốc tế, vô địch quốc gia của nhiều nước trên thế giới. Tuy nhiên nếu xuất pháp từ $(a+b+c)^2$ chúng ta thu được các bất đẳng thức cơ bản. Nhưng các bài toán về dạng này trong những năm gần đây thường khó hơn vì xuất phát từ các biểu thức đối xứng khác như:

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2;\ \Big(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\Big)^2;\ \Big(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\Big)^2;\ldots.$$

Trong mục này chúng ta chứng minh một số bất đẳng thức trong các kỳ thi quốc gia các nước, quốc tế và xây dựng phương pháp chứng minh và xây dựng các bất đẳng thức dạng này.

**Ví dụ 4.1.** ( the 14th Japanese Math Olympiad. 2004 ). Với $a,b,c>0$, $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big)$$

*Bài giải.* Chúng ta trình bày một cách giải hoàn toàn khác với đáp án đã có như sau:

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow 3+\frac{2a}{1-a}+\frac{2b}{1-b}+\frac{2c}{1-c}\le 2\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big)\\
&\leftrightarrow 2a\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{1-a}\Big)+2b\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{1-b}\Big)+2c\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{1-b}\Big)\ge 3\\
&\leftrightarrow a\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{b+c}\Big)+b\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{c+a}\Big)+c\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\Big)\ge\frac{3}{2}\\
&\leftrightarrow P=\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\ge\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2=$$

$$=\Big(\sqrt{\frac{ab}{c(b+c)}}\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{bc}{a(c+a)}}\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{ca}{b(a+b)}}\sqrt{a+b}\Big)^2.$$

áp dụng bất đẳng thức bunhiacôpski, suy ra :

$$\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2\le P\cdot 2(a+b+c).$$

Mặt khác ta có: ( áp dụng: $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$)

$$\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2\le 3(b+c+a).$$

Thu được $P \geq \dfrac{3}{2}$ (đpcm).

**Ví dụ 4.2.** ( Romanian Math Competitions. 2004 ). Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

(Petre Batranetu).

*Bài giải.* (trong tài liệu không có lời giải). Ta có

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sqrt{\frac{a}{bc(c+a)}}\sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{b}{ca(a+b)}}\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{c}{ca(a+b)}}\sqrt{a+b}\Big)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(a+b+c). \qquad (1)$$

Mặt khác ta có

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 \geq 3\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \geq \frac{27}{(a+b+c)}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$P \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2} \quad (\text{ đpcm }).$$

**Ví dụ 4.3.** ( USA). Với $a, b, c > 0, abc = 1$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

*Bài giải.* Ta có

$$\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\frac{1}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{1}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{1}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\Big)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(a+b+c). \qquad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)^2 \geq 3\Big(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\Big) = \frac{3(a+b+c)}{abc} = 3(a+b+c). \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$P \geq \frac{3}{2} = P_{\min} \quad (\text{ Khi } a = b = c = 1).$$

Từ các bài giải mẫu trên chúng ta xây dựng phương pháp giải cho các bất đẳng thức dạng này như sau:
Bước 1: Gạch những thừa số dạng tổng trong bất đẳng thức để tìm biểu thức xuất phát.
Bước 2:Từ biểu thức xuất phát mô tả bunhiacôpski biểu thức chính có một trong bất đẳng thức.
Bước 3: Sử dụng một số bất đẳng thức trung gian quen thuộc chứng minh bất đẳng thức.
Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ:
**Ví dụ 4.4.** Với $a, b, c > 0, abc = 1$, Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

*Bài giải.* Ta có
$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)} + \frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)} + \frac{1}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}\right)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(ab+bc+ca). \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = (ab+bc+ca). \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$.
**Ví dụ 4.5.** Với $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

*Bài giải.* Ta có
$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{a^2}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{b^2}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b} + \frac{c^2}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}\right)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(a+b+c). \tag{1}$$

Mặt khác ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = (ab+bc+ca). \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$.

**Ví dụ 4.5.** Với $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

*Bài giải.* Ta có

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a^2}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{b^2}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b} + \frac{c^2}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}\right)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(a+b+c). \tag{1}$$

Mặt khác ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)^2. \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$.

**Ví dụ 4.6.** Với $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a^6}{b^3(a+c)} + \frac{b^6}{c^3(a+b)} + \frac{c^6}{a^3(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

*Bài giải.* Ta có

$$\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a^3}{b\sqrt{bc+ba}}\sqrt{bc+ba} + \frac{b^3}{c\sqrt{ca+cb}}\sqrt{ca+cb} + \frac{c^3}{a\sqrt{ab+ac}}\sqrt{ab+ac}\right)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(ab+bc+ca). \tag{1}$$

Mặt khác ta có:

$$\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)^2 \geq (ab+bc+ca)^2. \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$. (đpcm)

## 5 Phép biến đổi nghịch Bunhiacôpski

Nhiều bất đẳng thức xoay vòng hay được xây dựng từ các phép biến đổi nghịch bunhiacôpski mà chúng ta sẽ trình bày trong mục này.

**Ví dụ 5.1.** (M.S Klam Kin). Với $p, q, r$ và $x, y, z$ là các số thực không âm, chứng minh rằng:

$$P = \frac{p}{q+r}x^2 + \frac{q}{r+p}y^2 + \frac{r}{p+q}z^2 \geq (xy + yz + zx) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

*Bài giải.*

Để nhanh chóng xây dựng cách giải cho các bất đẳng thức dạng này chúng ta trình bày các bước giải cụ thể như sau:

Bước 1: Thêm vào các số hạng để rút $(p + q + r)$ làm thừa số chung, ta có:

$$P = \Big(\frac{p}{q+r}x^2 + x^2\Big) + \Big(\frac{q}{r+p}y^2 + y^2\Big) + \Big(\frac{r}{p+q}z^2 + z^2\Big) - (x^2 + y^2 + z^2).$$

$$P = (p + q + z)\Big(\frac{x^2}{q+r} + \frac{y^2}{r+p} + \frac{z^2}{p+q}\Big) - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Bước 2: Biểu diễn dưới dạng bunhiacôpski.

$$P = \frac{1}{2}\Big((\sqrt{q+r})^2 + (\sqrt{r+p})^2 + (\sqrt{p+q})^2\Big)\cdot$$

$$\Big((\frac{x}{\sqrt{q+r}})^2 + \frac{y}{\sqrt{r+p}})^2 + \frac{z}{\sqrt{p+q}})^2\Big) - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{1}{2}(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (xy + yz + zx) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\leftrightarrow$:

$$\frac{p}{y+z-x} = \frac{q}{x+z-y} = \frac{r}{x+y-z}.$$

**Ví dụ 5.2.** Với $a, b, c$ là các cạnh của một tam giác, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\Big(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 1\Big)x^2 + \Big(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 1\Big)y^2 + \Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\Big)z^2 \geq$$

$$\geq \Big(3 - \frac{b+c}{a}\Big)yz + \Big(3 - \frac{c+a}{b}\Big)zx + \Big(3 - \frac{a+b}{c}\Big)xy.$$

Khi $x, y, z$ nhận các giá trị cụ thể chúng ta thu được các bất đẳng thức sau:
**Ví dụ 5.3.** Với $a, b, c > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}.$$

*Bài giải.* Ta có

$$P = \Big(\frac{3a}{b+c} + 3\Big) + \Big(\frac{4b}{c+a} + 4\Big) + \Big(\frac{5c}{a+b} + 5\Big) - 12.$$
$$P = (a+b+c)\Big(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b}\Big) - 12$$
$$P = \frac{1}{2}\Big[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2\Big] \cdot$$
$$\cdot \Big[\Big(\sqrt{\frac{3}{b+c}}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\frac{4}{c+a}}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\frac{5}{a+b}}\Big)^2\Big] - 12 \geq \frac{1}{2}\big(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}\big)^2 - 12$$

Vậy $P_{\min} = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}\big)^2 - 12$, khi :

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

## 6 Bất đẳng thức thứ tự xây dựng từ bất đẳng thức Bunhiacôpski

Nhờ bất đẳng thức bunhiacôpski chúng ta chuyển một số bất đẳng thức thứ tự đơn giản thành những bất đẳng thức thứ tự bậc 2.

**Ví dụ 6.1.** Với $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geq a + b + c$$

*Bài giải.* Ta có

$$(a+b+c)^2 = \Big(\frac{a}{c}\sqrt{b} \cdot \frac{c}{a}\sqrt{b} + \frac{b}{a}\sqrt{c} \cdot \frac{a}{b}\sqrt{c} + \frac{c}{b}\sqrt{a} \cdot \frac{b}{c}\sqrt{a}\Big)^2 \leq$$
$$\leq \Big(\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}\Big) \cdot \Big(\frac{c^2b}{a^2} + \frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2}\Big).$$

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2b}{c^2}+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{c^2a}{b^2}\geq\frac{ab^2}{c^2}+\frac{bc^2}{a^2}+\frac{ca^2}{b^2}.\\
&\leftrightarrow a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3\geq a^3b^4+b^3c^4+c^3a^4\\
&\leftrightarrow a^3b^3(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)\geq 0\\
&\leftrightarrow a^3(b^3-c^3+c^3)(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)\geq 0\\
&\leftrightarrow a^3(b^3-c^3)(a-b)+c^3\left[a^3(a-b)+b^3(b-c)+a^3(c-a)\right]\geq 0\\
&\leftrightarrow a^3(b^3-c^3)(a-b)+c^3\left[a^3(c-b)+b^3(b-c)\right]\geq 0\\
&\leftrightarrow a^3(b^3-c^3)(a-b)+c^3(b-c)(b^3-a^3)\geq 0
\end{aligned}$$

( Hiển nhiên đúng )

Suy ra:

$$(a+b+c)^2\leq\left(\frac{a^2b}{c^2}+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{c^2a}{b^2}\right)^2$$

$$\leftrightarrow a+b+c\leq\frac{a^2b}{c^2}+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{c^2a}{b^2}\quad \text{đpcm}$$

**Ví dụ 6.2.** Với $a\geq b\geq c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

*Bài giải.* Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2=\\
&=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{a}{b}+\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{b}{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{c}{a}\right)^2\leq\\
&\leq\left(\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}+\frac{a^2}{c^3}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\right).
\end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}+\frac{a^2}{c^3}\geq\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}$$

$$\leftrightarrow b^5c^3+c^5a^3+a^5b^3\geq a^5c^3+b^5a^3+c^5b^3$$

$$\leftrightarrow a^3b^3(a^2-b^2)+b^3c^3(b^2-c^2)+c^3a^3(c^2-a^2)\geq 0$$

$$\leftrightarrow a^3(b^3-c^3+c^3)(a^2-b^2)+b^3c^3(b^2-c^2)+c^3a^3(c^2-a^2)\geq 0$$

$$\leftrightarrow a^3(b^3-c^3)(a^2-b^2)+c^3(b^2-c^2)(a^3-b^3)\geq 0.$$

( Hiển nhiên đúng ).

Suy ra:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2\leq\left(\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\right)^2.$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\leq\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\quad(\text{ đpcm}).$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được bất đẳng thức:

**Ví dụ 6.3.** Với $a\geq b\geq c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{c^3}+\frac{b^3c}{a^3}+\frac{c^3a}{b^3}\geq(a+b+c).$$

# Tài liệu

[1] HARDY, G, H , J, E. LITTLEWOOD and G.PO'LYA "Inequalities". Cambridge 1952.

[2] D.S. Mitrinovic, J.E Pecaric and A.M. Fink. Classical and New Inequalities in Analysis.

[3] Các đề thi vô địch năm 2004.

# MỘT CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG PHÂN THỨC

Phạm Văn Hùng
*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

## 1 Các bài toán

Trong mục này chúng ta thường sử dụng bất đẳng thức trung gian sau đây.

__Bài toán 1.__ Với $a, b, c$ là những số thực dương, chứng minh rằng:

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geq a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n$$

**Giải.**
Ta có: $\dfrac{m \cdot a^{m+n} + nb^{m+n}}{m+n} \geq a^m b^n$ (bất đẳng thức côisi với $m+n$ số)

$$\frac{mb^{m+n} + nc^{m+n}}{m+n} \geqslant b^m c^n$$

$$\frac{mc^{m+n} + na^{m+n}}{m+n} \geqslant c^m a^n$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Để có được phương pháp giải đối với các bất đẳng thức dạng phân thức đơn giản này chúng ta rút ra những nhận xét từ các bài toán cụ thể.

__Bài toán 2.__ Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geqslant a^3 + b^3 + c^3$$

**Giải.** Ta có :

$$\frac{a^5}{b^2} + ab^2 \geqslant 2a^3$$
$$\frac{b^5}{c^2} + bc^2 \geqslant 2b^3$$
$$\frac{c^5}{a^2} + ca^2 \geqslant 2c^3$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Nhận xét:** Để mô tả các số hạng vế phải chúng ta phải sử dụng các số hạng có chứa mẫu số của các số hạng vế trái ( như $ab^2, bc^2, ca^2$).

**Bài toán 3.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geqslant a^3 + b^3 + c^3$$

**Giải.** Ta có:

$$\frac{a^5}{bc} + abc \geqslant 2a^3$$
$$\frac{b^5}{ca} + abc \geqslant 2b^3$$
$$\frac{c^5}{ab} + abc \geqslant 2c^3$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 4.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng :

$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geqslant \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}$$

**Giải.** Ta có : $\frac{a^5}{b^3} + ab \geqslant 2 \cdot \frac{a^3}{b}$

Suy ra: $\dfrac{a^5}{b^3}+2ab \geqslant \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{a^3}{b}+ab \geqslant \dfrac{a^3}{b}+2a^2$
Tương tự:

$$\frac{b^5}{c^3}+2bc \geqslant \frac{b^3}{c}+2b^2$$
$$\frac{c^5}{a^3}+2ca \geqslant \frac{c^3}{a}+2c^2$$

Ta có : $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$
Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 5.** Với $a, b, c$ là các số thực dương phân biệt thoả mãn điều kiện:

$$\frac{a^{102}}{b^{100}}+\frac{b^{102}}{c^{100}}+\frac{c^{102}}{a^{100}}<1$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại các số thực tự nhiên $k(0 \leq k \leq 99)$ sao cho bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\frac{a^{k+3}}{b^{k+1}}+\frac{b^{k+3}}{c^{k+1}}+\frac{c^{k+3}}{a^{k+1}} \leq \frac{1}{100}+\frac{a^{k+2}}{b^k}+\frac{b^{k+2}}{c^k}+\frac{c^{k+2}}{a^k}$$

**Giải.** Vì $a, b, c$ là các số dương phân biệt nên ta có dãy bất đẳng thức sau:

$$0<a^2+b^2+c^2<\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}<\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}<\cdots<\frac{a^{102}}{b^{100}}+\frac{b^{102}}{c^{100}}+\frac{c^{102}}{a^{100}}<1$$

Chia đoạn $[0,1]$ thành 100 đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài $\dfrac{1}{100}$. Suy ra trong 101 biểu thức phải có hai biểu thức thuộc cùng một đoạn. Từ kết luận đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.
**Nhận xét:** Để sử dụng bất đẳng thức Côsi ta cần chú ý:
1. Thêm các hệ số để dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra
2. Có thể thêm nhiều số hạng khi sử dụng bất đẳng thức Côsi khử mẫu số.

**Bài toán 6.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a} \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

**Giải.** . Ta có:

$$\frac{9a^3}{a+2b} + a(a+2b) \geqslant 6a^2$$
$$\frac{9b^3}{b+2c} + b(b+2c) \geqslant 6b^2$$
$$\frac{9c^3}{c+2a} + c(c+2a) \geqslant 6c^2$$

Và $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$
Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 7.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2} \geqslant \frac{1}{4}(a+b+c)$$

**Giải.** Ta có:

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2} + (b+c) + (b+c) \geqslant 6a$$
$$\frac{8b^3}{(c+a)^2} + (c+a) + (c+a) \geqslant 6b$$
$$\frac{8c^3}{(a+b)^2} + (a+b) + (a+b) \geqslant 6c$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 8.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c)$$

**Giải.** Ta có:

$$\frac{4a^3}{b(c+a)} + 2b + (c+a) \geqslant 6a$$
$$\frac{4b^3}{c(a+b)} + 2c + (a+b) \geqslant 6b$$

$$\frac{4c^3}{a(b+c)} + 2a + (b+c) \geqslant 6c$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

## Một số bài tập và lời Giải

**Bài toán 1.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{bc^2} + \frac{b^4}{ca^2} + \frac{c^4}{ab^2} \geqslant a + b + c$$

**Giải.** Ta có:

$$\frac{a^4}{bc^2} + b + c + c \geqslant 4a$$

$$\frac{b^4}{ca^2} + c + a + a \geqslant 4b$$

$$\frac{c^4}{ab^2} + a + b + b \geqslant 4c$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 2.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geqslant \frac{1}{4}(a+b+c)$$

**Giải.** Ta có:

$$\frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geqslant 6a$$

$$\frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geqslant 6b$$

$$\frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geqslant 6c$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 3.** Với $a, b, c$ là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

**Giải.** Ta có bất đẳng thức:

$$\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{b^2}+\frac{a^3}{c^2} \geqslant a+b+c$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3} = \frac{(\frac{1}{b})^3}{(\frac{1}{a})^2}+\frac{(\frac{1}{c})^3}{(\frac{1}{b})^2}+\frac{(\frac{1}{a})^3}{(\frac{1}{c})^2}+ \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c} \quad \text{(đpcm)}$$

**Bài toán 4.** Với $a, b, c$ là những số thực dương, thoả mãn điều kiện $a+b+c=3abc$ . chứng minh rằng:

$$P=\frac{bc}{a^3(c+2b)}+\frac{ca}{b^3(a+2c)}+\frac{ab}{c^3(b+2a)} \geqslant 1$$

**Giải.** Ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \quad (1)$$

Thật vậy:

$$\frac{9a^3}{b+2c}+a(b+2c) \geqslant 6a^2$$
$$\frac{9b^3}{c+2a}+b(c+2a) \geqslant 6b^2$$
$$\frac{9c^3}{a+2b}+c(a+2b) \geqslant 6c^2$$
$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức (1) .
áp dụng (1) thu được:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{b}+\frac{2}{c}} + \frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{c}+\frac{2}{a}} + \frac{\frac{1}{c^3}}{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}} \\ &\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = 1 \quad \text{(đpcm)} \end{aligned}$$

**Bài toán 5.** Với $a, b, c$ là những số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \geqslant ab^2+bc^2+ca^2$$

**Giải.** . Ta có:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \geqslant a^3+b^3+c^3 \geqslant ab^2+bc^2+ca^2 \quad \text{(đpcm)}$$

# PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

Nguyễn Văn Thông

*Trường Trung học Phổ thông chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng*

## 1 Dồn biến bằng trung bình cộng và trung bình nhân

Chúng ta biết rằng đặc điểm của nhiều bất đẳng thức là dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0$!, đặc biệt là bất đẳng thức đại sô.

Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn. Để có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \tag{1}$$

ta có thể chứng minh

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, ..., x_n\right). \tag{2}$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, ..., x_n\right). \tag{3}$$

Sau đó, chuyển sang việc chứng minh (1) về chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \geq g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

tức là chứng minh bất đẳng thức có ít biến số hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (2) có thể không đúng, hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi hai biến số nên có thể kiểm tra tính đúng đẳng của bất đẳng thức này một cách dễ dàng.

Ta xét các bài toán sau để minh hoạ phương pháp.

**Bài toán 1.** *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, > 0$ thì*

$$2(x^2+y^2+z^2)+3(xyz)^{2/3} \geq (x+y+z)^2.$$

*Chứng minh.* Xét hàm

$$\begin{aligned}F(x,y,z) &= 2(x^2+y^2+z^2)+3(xyz)^{2/3}-(x+y+z)^2\\ &= x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx+3(xyz)^{2/3}\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leq y \leq z$, ta cần chứng minh $F(x,y,z) \geq 0$.

thực hiện dồn biến bằng trung bình nhân, ta sẽ chứng minh

$$F(x,y,z) \geq F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}). \tag{4}$$

Thật vậy, xét hiệu $d = F(x,y,z) - F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz})$.

$$\begin{aligned}d &= x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx-(x^2+yz+yz-2x\sqrt{yz}-2x\sqrt{yz}-2yz)\\ &\quad +3(xyz)^{2/3}-3(xyz)^{2/3}\\ &= y^2+z^2-2yz+4x\sqrt{yz}-2x(y+z)\\ &= (y-z)^2+2x(-y-z+2\sqrt{yz})\\ &= (y-z)^2-2x(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2\\ &= (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2[(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2-2x]\\ &= (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2[(y+z-2x)+2\sqrt{yz}] \geq 0\end{aligned}$$

Vì $x \leq y \leq z$ suy ra $y+z \geq 2x$. Từ đó suy ra bất đẳng thức (4) đúng.

Mặt khác

$$F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = x^2 - 4x\sqrt{yz} + 3(xyz)^{2/3}$$

Mà

$$\begin{aligned}x^2+3(xyz)^{2/3} &= x^2(xyz)^{2/3}+(xyz)^{2/3}+(xyz)^{2/3}\\ &\geq 4(x^2y^2z^2)^{1/4} = 4x\sqrt{yz}\end{aligned}$$

nhờ áp dụng bất đẳng thức côsi cho bốn số không âm $x^2$, $(xyz)^{2/3}$ , $(xyz)^{2/3}$, $(xyz)^{2/3}$. Do vậy $F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \geq 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

**Bài toán 2.** *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, t \geq 0$ thì*

$$3(x^2+y^2+z^2+t^2)+4\sqrt{xyzt} \geq (x+y+z+t)^2.$$

*Chứng minh.* Xét hàm

$$\begin{aligned}F(x,y,z,t) &= 3(x^2+y^2+z^2+t^2)+4\sqrt{xyzt}-(x+y+z+t)^2\\ &= 2(x^2+y^2+z^2+t^2)-2xy-2xz-2xt\\ &\quad -2yz-2yt-2zt+4\sqrt{xyzt}\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \leq y \leq z \leq t$, ta cần chứng minh $F(x,y,z,t) \geq 0$, trước hết, ta có $F(x,y,z,t) \geq F(x,y,\sqrt{zt},\sqrt{zt})$. Thật vậy, xét hiệu $d = F(x,y,z,t) - F(x,y,\sqrt{zt},\sqrt{zt})$.

$$\begin{aligned}d &= 2(x^2+y^2+z^2+t^2)-2xy-(2xz+2xt+2yt+2zt)+4\sqrt{xyzt}-\\ &\quad -[2(x^2+y^2+zt+zt)-2xy+2x\sqrt{zt}+2x\sqrt{zt}\\ &\quad +2y\sqrt{zt}+2y\sqrt{zt}+2zt)+4\sqrt{xyzt}]\\ &= 2(z^2+t^2)-4zt-2x(z+t)-2y(z+t)+4+4x\sqrt{zt}+4y\sqrt{zt}\\ &= 2(t-z)^2-2x(\sqrt{t}-\sqrt{z})^2-2y(\sqrt{t}-\sqrt{z})^2\\ &= (\sqrt{t}-\sqrt{z})^2[2(\sqrt{t}+\sqrt{z})^2-2x-2y]\end{aligned}$$

Do $x \leq y \leq z \leq t$ nên

$$2(\sqrt{t}+\sqrt{z})^2-2x-2y = 2(t+z-x-y+2\sqrt{zt}) \geq 0$$

suy ra $d \geq 0$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$F(x,y,\alpha,\alpha) \geq F(x,(y\alpha^2)^{1/3},(y\alpha^2)^{1/3},(y\alpha^2)^{1/3})$$

với $\alpha = \sqrt{zt}$. Đặt $\beta = (y\alpha^2)^{1/3}$ suy ra $y = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$, ta phải chứng minh

$$F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha) \geq F(x,\beta,\beta,\beta)$$

và $x \leq \frac{\beta^3}{\alpha^2} \leq \alpha$.

Thật vậy xét

$$F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha)-F(x,\beta,\beta,\beta)=$$
$$=2(x^2+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\alpha^2+\alpha^2)-[2(\frac{x\beta^3}{\alpha^2})+2x\alpha+\frac{2\beta^3}{\alpha}+\frac{2\beta^3}{\alpha}+2\alpha^2]+4\sqrt{x\beta^3}-$$
$$-[2(x^2+\beta^2+\beta^2+\beta^2)-(2x\beta+2x\beta+2x\beta+2\beta^2+2\beta^2+2\beta^2+4\sqrt{x\beta^3}]$$
$$=2\Big(\frac{\beta^6}{\alpha^4}+2\alpha^2\Big)-\Big(\frac{2x\beta^3}{\alpha^2}+4x\alpha+\frac{4\beta^3}{\alpha}+2\alpha^2\Big)+6x\beta$$
$$=2\Big(\frac{\beta^6}{\alpha^4}+\alpha^2-\frac{2\beta^3}{\alpha}\Big)-2x\Big(\frac{\beta^3}{\alpha^2}+2\alpha-3\beta)$$
$$=2\Big(\frac{\beta^3}{\alpha^2}-\alpha\Big)^2+2x(3\beta-\frac{\beta^3}{\alpha^2}-2\alpha)$$

Mà

$$3\beta-\frac{\beta^3}{\alpha^2}\geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}}-2(\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}})^2 \tag{5}$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$3\beta\geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}-\frac{\beta^3}{\alpha}$$
$$3\beta\alpha\geq 4\sqrt{\beta^3\alpha}-\frac{\beta^3}{\alpha}$$
$$\beta-4\sqrt{\beta\alpha}+3\alpha\geq 0$$
$$(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha})\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\beta\leq\alpha$. Vậy (5) đúng.

Từ đó suy ra

$$F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha)-F(x,\beta,\beta,\beta)\geq 2(\alpha-\frac{\beta^3}{\alpha^2})^2+2x(4\sqrt{\beta^3}\alpha-\frac{2\beta^3}{\alpha}-2\alpha)$$

Vế trái của bất đẳng thức này lớn hơn hoặc bằng

$$2(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2-4x(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2$$
$$\geq 2(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2[(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2-2x]\geq 0$$

đúng. Vậy

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) \geq F(x, \beta, \beta, \beta)$$

Mà

$$F(x, \beta, \beta, \beta) = 2x^2 - 6x\beta + 4\sqrt{x\beta^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có

$$2x^2 + 4\sqrt{x\beta^3} = x^2 + x^2 + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} \geq 6x\beta$$

Suy ra $F(x, \beta, \beta, \beta) \geq 0$, suy ra $F(x, y, z, t) \geq 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

□

**Bài toán 3.** *Cho $a, b, c$ là các số không âm, sao cho $a + b + c = d$, $n \geq 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

*Chứng minh.* Không giảm tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Xét

$$P(a, b, c) = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Ta chứng minh

$$P(a, b, c) \leq P(a, b + c, 0)$$

Thật vậy ta xét hiệu

$$\begin{aligned} &P(a, b, c) - P(a, b + c, 0) \\ &\quad = \frac{[a(b + c)]^n}{1 - a(b + c)} - \left[\frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ca}\right] \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{[a(b + c)]^n}{1 - a(b + c)} &= a^n \frac{(b + c)^n}{1 - a(b + c)} = \\ &= a^n \frac{(b^n + nb^{n-1}c + \cdots + nbc^{n-1} + c^n)}{1 - a(b + c)} \\ &> \frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} + \frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} + \frac{na^n b^{n-1} c}{1 - a(b + c)} \end{aligned}$$

Do $a, b, c \geq 0$ suy ra $1-a(b+c) = 1-ab-ac \geq 1-ab$ và $1-a(b+c) \geq 1-ac$, suy ra

$$\frac{a^n b^n}{1-a(b+c)} > \frac{a^n b^n}{1-ab} \text{ và } \frac{b^n c^n}{1-a(b+c)} > \frac{c^n b^n}{1-a(b+c)} > \frac{a^n c^n}{1-ac}$$

và

$$\frac{na^n b^{n-1} c}{1-a(b+c)} \geq \frac{na^n b^{n-1} c}{1-bc} \geq \frac{b^n c^n}{1-bc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 0$, suy ra $P(a, b, c) \leq P(a, b+c, 0)$.

Vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$P(a, b+c, 0) = \frac{(a(b+c))^n}{1-a(b+c)} = \frac{a^n d^n}{1-ad}, \quad a \geq 0, d \geq 0, \ a+d = 1.$$

Ta có

$$ad \leq \frac{(a+d)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

Suy ra

$$P(a, b+c, 0) \leq \frac{(1/4)^n}{1-1/4} = \frac{1}{3.4^{n-1}}$$

Vậy

$$P_{\max} = \frac{1}{3.4^{n-1}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$ và các hoán vị của nó. □

**Bài toán 4.** *Cho $a, b, c$ là các số thực bất kỳ, chứng minh rằng*

$$F(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \geq 0.$$

*Chứng minh.* Đây là đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 1996, dùng phương pháp dồn biến cho trung bình cộng rồi thực hiện bước sau cùng bằng phương pháp đạo hàm.

Xét hiệu $d = F(a, b, c) - F(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$

$$\begin{aligned}
d &= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4) \\
&\quad - 2(a\frac{b+c}{2})^4 - (b+c)^4 + \tfrac{4}{7}(a^4 + 2\Big(\frac{b+c}{2}\Big)^4\Big) \\
&= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\Big(a + \frac{b+c}{2}\Big)^4 + \tfrac{4}{7}\Big(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\Big) \\
&= a(4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3) + 3a^2(2b^2 + c^2 - (b+c)^2) + \tfrac{3}{7}(b^4 + c^4 - \tfrac{1}{8}(b+c)^4) \\
&= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \tfrac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \\
&= 3a(a+b+c)(b+c)^2 + \tfrac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc)
\end{aligned}$$

Hạng tử $\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc) \geq 0$, ta xét hạng tử $3a(a+b+c)(b+c)^2$.

Nếu $a, b, c$ cùng dấu thì $3a(a+b+c)$ không âm, suy ra $d \geq 0$.

Nếu $a, b, c$ không cùng dấu, như vậy trong $a, b, c$ có ít nhất một số cùng dấu với $a, b, c$. Không mất tổng quát, giả sử đó là $a$. Từ đẳng thức trên ta suy ra

$$F(a, b, c) \geq F\Big(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\Big)$$

Như vậy ta còn phải chứng minh $F(a, b, c) \geq 0$ với mọi $a, b$ hay là

$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - \tfrac{4}{7}(a^4 + 2b^3) \geq 0 \tag{6}$$

Nếu $b = 0$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên.

Nếu $b \neq 0$ thì chia hai vế bất đẳng thức cho $b^4$ và đặt $x = a/b$, thế thì (6) trở thành

$$2(x+1)^4 + 16 - \tfrac{4}{7}(x^4 + 2) \geq 0$$

Xét hàm

$$f(x) = 2(x+1)^4 - \tfrac{4}{7}(x^4 + 2) + 16.$$

Tính đạo hàm ta được

$$f'(x) = 8(x+1)^3 - \tfrac{16}{7}x^3$$

Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x + 1 = (2/7)^3 x$ hay $x = -2,99294$. Suy ra

$$f_{\min} = f(-2,9294) = 0,4924 > 0$$

Điều này cho thấy bất đẳng thức rất chặt. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

## 2 Dồn biến dùng đạo hàm

Như đã nói ở trên, bất đẳng thức dồn biến làm giảm số các biến trong các bất đẳng thức. Và như vậy, đã tạo điều kiện cho ta có cách xử lý đưa về một biến duy nhất trên một miền xác định nào đó để giải quyết hoàn toàn bất đẳng thức.

Phương pháp này đặc biệt hữu ích cho các bất đẳng thức gồm ba biến, sau khi dồn biến ta giảm xuống còn hai biến, thiết lập quan hệ đơn giản giữa hai biến, ta đưa về hàm một biến.

Bài toán trên đây cho thấy rõ cách làm này. Ta có thể xét thêm một số bài toán khác.

**Bài toán 5.** *Cho bốn số không âm $a, b, c, d$ thoả mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng*

$$abc + bcd + acd + abd \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

*Chứng minh.* Đặt $F(a,b,c,d) = \frac{176}{27}abcd - (abc + bcd + acd + abd)$. Do $a + b + c + d = 1$ nên trong bốn số $a, b, c, d$ luôn tồn tại hai số có tổng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$. Giả sử $a + b \leq \frac{1}{2}$. Ta xét $t = \frac{1}{2}(c + d)$ và

$$F(a,b,c,d) - F(a,b,t,t) = (t^2 - cd)(a + b - \tfrac{176}{27}ab)$$

Dễ thấy $t^2 - cd \geq 0$, ngoài ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \geq 8 > \frac{176}{27}$. Suy ra $a + b - \frac{176}{27}ab \geq 0$. Vậy $F(a,b,c,d) - F(a,b,t,t) \geq 0$ suy ra $F(a,b,c,d) \geq F(a,b,t,t)$.

Ta cần chứng minh

$$F(a,b,t,t) = \tfrac{176}{27}abt^2 - 2abt - at^2 - bt^2 \geq -\tfrac{1}{27}.$$

Với $a + b + 2t = 1$, $t \geq \frac{1}{4}$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$F(a,b,t,t) = 2t^3 - t^2 + \tfrac{176}{27}abt^2 - 2abt \geq -\frac{1}{27}.$$

Cố định $t$, ta xét $F(ab) = ab(\frac{176}{27}t^2 - 2t) + 2t^3 - t^2$. Tính đạo hàm $F'(ab) = \frac{176}{27}t^2 - 2t$. Nếu $t \geq \frac{27}{88}$ thì $F'(ab) \geq 0$ suy ra $F(ab)$ đồng biến, do đó $F(ab) \geq F(0) = 2t^3 - t^2 = f(t)$. Xét hàm $f(t) = 2t^3 - t^2$ trên $[\frac{27}{88}, \frac{1}{2}]$. Tính đạo hàm ta có

$$F'(t) = 6t^2 - 2t$$

$F'(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = \frac{1}{3}$. $f'(t)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $t = \frac{1}{3}$ suy ra $t = \frac{1}{3}$ là cực tiểu của $f$. Thành thử $f(t) \geq f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$. Kết hợp tất cả các điều trên suy ra $F(a,b,c,d) \geq -\frac{1}{27}$.

Nếu $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{27}{88}$ thì $F'(ab) \leq 0$. Mà $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-2t)^2}{4}$. Suy ra

$$F(ab) \geq F\left(\frac{(1-2t)^2}{4}\right) = 2t^3 - t^2 + \tfrac{176}{27}t^2\frac{(1-2t)^2}{4} - 2t\frac{(1-2t)^2}{4} = g(t).$$

Xét

$$g(t) = \frac{176}{27}t^4 - \frac{176}{27}t^3 + \frac{71}{27}t^2 - \frac{1}{2}t$$

Tính đạo hàm ta được

$$g'(t) = (4t-1)\left(\frac{176}{27}t^2 - \frac{88}{27}t + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Suy ra $g(t)$ đồng biến và do vậy $g(t) \geq g(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{27}$.

Tóm lại $F(a,b,c,d) \geq -\frac{1}{27}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi bốn số bằng $\frac{1}{4}$ hoặc ba số bằng $\frac{1}{3}$ và một số bằng 0.

□

**Bài toán 6.** *Cho $a, b, c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

*Chứng minh.* Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(1+b/a)^3} + \frac{1}{(1+c/b)^3} + \frac{1}{(1+a/c)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Đặt $x = b/a, y = c/b, z = a/c$ suy ra $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8},$$

với $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Đặt $z = \min\{x, y, z\}$ thì từ $xyz = 1$ suy ra $z \leq 1$ và $xy \geq 1$. Ta có nhận xét rằng

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{1+\sqrt{xy}}-\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{(\sqrt{xy}-x)}{(1+x)(1+\sqrt{xy})} \geq \frac{y-\sqrt{xy}}{(1+y)(1+\sqrt{xy})}$$

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(1+x)(1+\sqrt{xy})} \geq \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(1+x)(1+xy)}$$

$$\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}y-\sqrt{y}-x\sqrt{y})}{(1+x)(1+y)} \geq 0$$

$$\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2(\sqrt{xy}-1)}{(1+x)(1+y)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $xy \geq 1$.

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Bất đẳng thức này có thể chuyển về dạng $3(a-b)^2$ một cách dễ dàng. Bây giờ, áp dụng nhận xét thứ hai, và nhận xét thứ nhất, ta được

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3} \geq 2\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\right)^3.$$

Vậy nên bây giờ ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{2}{(\sqrt{xy}+1)^3}+\frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Thật vậy, đặt $a=\sqrt{xy}$, suy ra $a^2=xy=\frac{1}{z}$, $z=\frac{1}{a^2}$, $a \geq 1$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+\frac{1}{a^2})^3} \geq \frac{3}{8}.$$

hay là

$$\frac{2}{(1+a)^3}+\frac{a^6}{(a^2+1)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Tiếp tục biến đổi đơn giản cho ta bất đẳng thức

$$(a-1)^2(5a^4+25a^6+51a^5+71a^4+55a^3+51a^2+17a+13) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên đúng vì $a \geq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$, $x = y$, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y}$ tức là $x = y = z = 1$. Vậy

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Dấu đẳng thức xuất hiện khi $a = b = c$. $\square$

# BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC

Đặng Huy Ruận

*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Bài toán cực trị nói chung, bài toán cực trị trong hình học nói riêng thường là bài toán hay và khó.

Để giải bài toán cực trị trong hình học ngoài việc vận dụng các kiến thức đa dạng, phong phú của hình học, còn thường dẫn về sử dụng một trong những khẳng định sau:

1. Nếu tổng các đại lượng không đổi, thì tích của chúng đạt cực đại, khi các đại lượng bằng nhau.

2. Nếu tích các đại lượng không đổi, thì tổng đạt cực đại, khi các đại lượng bằng nhau.

3. Giả sử có bất đẳng thức

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Khi đó:

- Nếu vế trái không đổi, thì vế phải đạt cực tiểu khi:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n};$$

- Nếu vế phải không đổi, thì vế trái đạt cực đại khi:

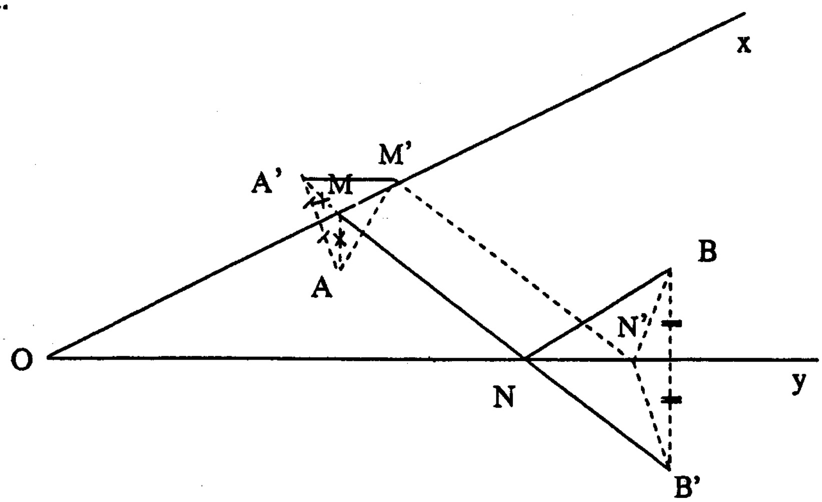
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n};$$

Trong bài này xin trình bầy bảy ví dụ minh họa cách giải bài toán cực trị trong hình học và liệt kê một số bài tập nhằm cung cấp tư liệu tới quý độc giả.

Xuất phát từ tính chất: Trong các đường nối giữa hai điểm cho trước, đường thẳng có độ dài cực tiểu nhiều bài toán được dẫn về dạng: Quy tổng độ dài các đoạn thẳng cần tìm (chu vi hình cần tìm) bằng độ dài đoạn thẳng nối giữa hai điểm nào đó.

**Ví dụ 1:**

Cho góc $\widehat{xOy}$ cố định và hai điểm $A$, $B$ nằm trong góc đó. Hãy tìm điểm $M$ trên $Ox$, điểm $N$ trên $Oy$, sao cho tổng độ dài các đoạn thẳng $AM$, $MN$, $NB$ ngắn nhất.




Hình 1

Lấy điểm A' đối xứng đối với A qua Ox, B' đối xứng đối với B qua Oy. Nối A' với B' bằng một đoạn thẳng, cắt Ox tại M, Oy tại N. Khi đó $AM = A'M$, $NB' = NB$, nên:

$$AM + MN + NB = A'M + MN + NB' = A'B'$$

Nếu lấy các điểm tùy M' trên Ox, N' trên Oy.

Khi đó: $A'M' = AM'$, $N'B' = N'B$, nên:

$$AM' + M'N' + N'B = A'M' + M'N' + N'B \geq A'B'$$

Vậy M, N là các điểm cần tìm.

**Ví dụ 2:**

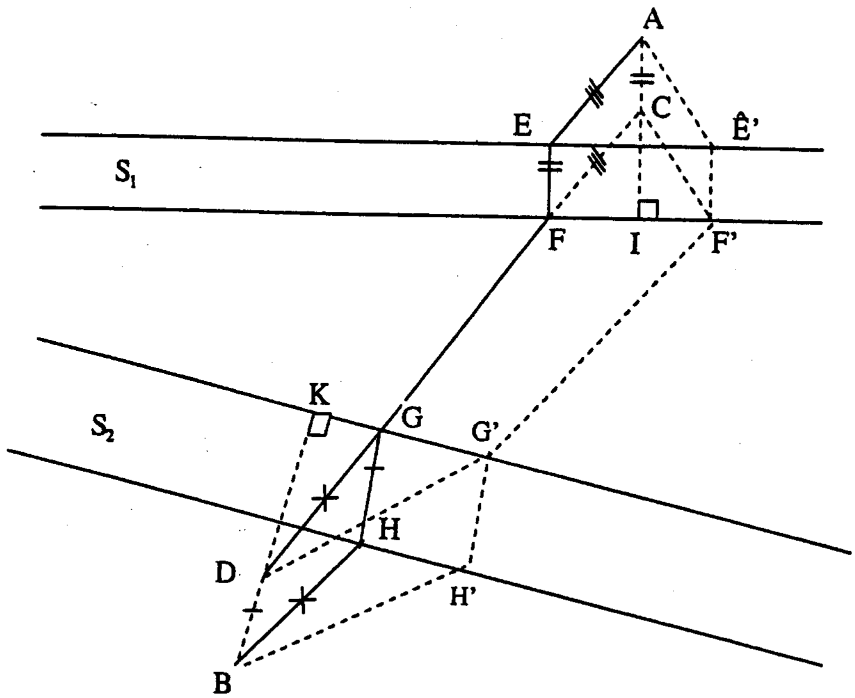
Hai thị trấn A, B cách nhau hai con sông không song song nhau, nhưng mỗi con sông đều có hai bờ song song nhau.

Hãy xây dựng cầu qua mỗi sông và làm đường nối giữa A, B, sao cho cầu vuông góc với bờ sông và tổng độ dài các quãng đường trên bộ là ngắn nhất.

*Giải:*

Ký hiệu dòng sông gần thị trấn A là $S_1$, dòng sông gần thị trấn B là $S_2$.

Từ A hạ đoạn thẳng AI vuông góc với $S_1$, từ B hạ đoạn thẳng BK vuông góc với $S_2$. Trên AI lấy điểm C, sao cho AC bằng chiều rộng EF của dòng sông $S_1$, BD bằng chiều rộng HG của dòng sông $S_2$.




Hình 2

Nối C với D bằng một đoạn thẳng, cắt bờ của $S_1$ đối diện với A tại F, cắt bờ của $S_2$ đối diện với B tại G. Kẻ EF vuông góc với bờ $S_1$ và HG vuông góc với bờ $S_2$. Trên dòng sông $S_1$ xây cầu trùng với đoạn EF, còn trên dòng sông $S_2$ xây cầu trùng với đoạn HG. Khi đó cầu EF vuông góc với $S_1$, cầu HG vuông góc với $S_2$ và độ dài ba đoạn đường trên bộ:

$$AE + FG + HB = CF + FG + GD = CD$$

Giả sử trên $S_1$ xây cầu tại vị trí tùy ý E'F' vuông góc với $S_1$ và trên $S_2$ xây cầu tại vị trí tùy ý H'G' vuông góc với $S_2$. Khi đó:

$$AE' + F'G' + H'B = CF' + F'G' + G'D \geq CD$$

Vậy EF là vị trí cần tìm để xây cầu qua $S_1$ và HG là vị trí cần tìm để xây cầu qua sông $S_2$.

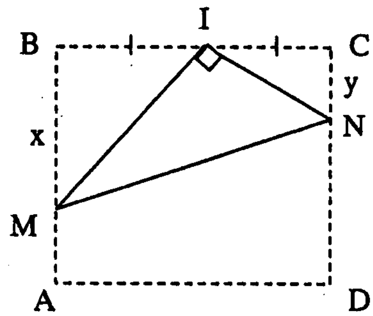
**Ví dụ 3:**

Cho hình vuông ABCD cạch bằng a. I là trung điểm của cạnh BC. Chọn điểm M trên AB, điểm N trên CD, sao cho $\widehat{MIN} = \frac{\pi}{2}$. Hãy tìm vị trí của điểm M, để diện tích tam giác MIN đạt giá trị nhỏ nhất.

*Giải:*

Đặt BM = x, CN = y. Kí hiệu diện tích tam giác MIN bằng $S_{MIN}$.

Do các tam giác MBI, NCI vuông và $BI = IC = \frac{a}{2}$, nên:




$$IM^2 = BM^2 + BI^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$IN^2 = CN^2 + IC^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Vì $BI \perp CN$ và $MI \perp IN$, nên:

$$\widehat{BIM} = \widehat{INC}.$$

Do đó các tam giác vuông MBI và NCI đồng dạng với nhau. Bởi vậy:

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{BM}{IC} = \frac{BI}{CN} = \frac{\frac{a}{2}}{y}, \text{ nên } x.y = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

$$S_{MIN}^2 = \left(\frac{1}{2}IM.IN\right)^2 = \frac{1}{4}IM^2.IN^2 \underset{(1)\&(2)}{=} \frac{1}{4}\left[\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{a^4}{16} + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2\left(x^2 + y^2\right) + x^2y^2\right] \underset{(3)}{=} \frac{1}{4}\left[\frac{a^4}{16} + \frac{a^4}{16} + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2\left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{a^4}{8} + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2\left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$S_{MIN}$ đạt cực tiểu khi và chỉ khi $S^2_{MIN}$ đạt cực tiểu, khi và chỉ khi $x^2 + y^2$, đạt cực tiểu khi và chỉ khi $x^2 = y^2$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{a}{2}$.

Vậy khi M là điểm giữa của AB và N là điểm giữa của CD, thì diện tích của tam giác MIN đạt giá trị nhỏ nhất.

**Ví dụ 4** (Đề thi Olympic Toán Ba Lan).

Hãy cắt từ tam giác cho trước ra một hình chữ nhật với diện tích cực đại.

*Giải:*

Xét các khả năng đặt hình chữ nhật trong tam giác.

- <u>Trường hợp thứ nhất:</u>

Tất cả các đỉnh của hình chữ nhật đều nằm trên biên của tam giác. Trường hợp này chỉ xảy ra khi hai đỉnh của hình chữ nhật nằm trên một cạnh của tam giác, hai đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh kia của tam giác.

Giả sử trong tam giác ABC đặt hình chữ nhật MNPQ với cạnh MN nằm trên AB, đỉnh Q nằm trên AC, đỉnh P thuộc BC. Khi đó diện tích của hình chữ nhật MNPQ phụ thuộc vào vị trí của P, Q.

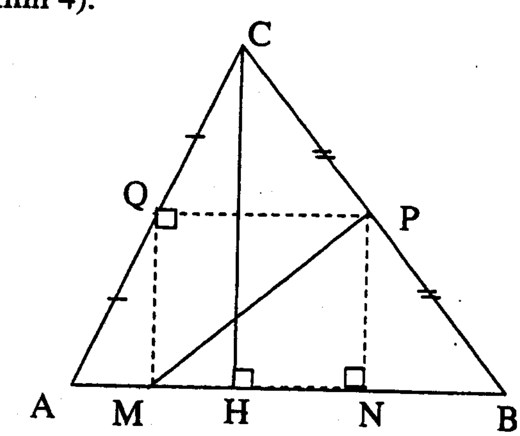
1. Q nằm giữa AC, tức AQ = QC (Hình 4).

Khi đó PQ là đường trung bình của tam giác ABC, nên các tam giác MPQ, MNP có chiều cao:

$$MQ = NP = \frac{1}{2}CH$$

và cạnh đáy:

$$MN = PQ = \frac{1}{2}AB$$



Hình 4

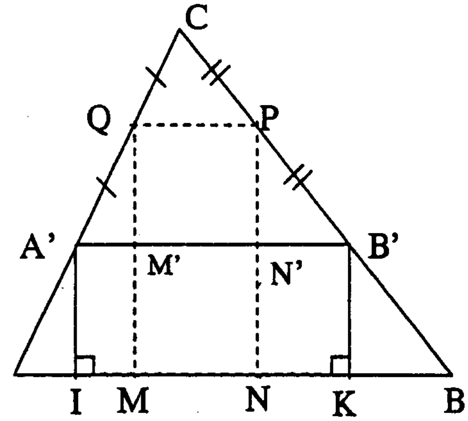
Bởi vậy:

$$S_{MNPQ} = S_{MPQ} + S_{MNP} = \frac{1}{2}MQ.PQ + \frac{1}{2}MN.PQ$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.CH.\frac{1}{2}.AB + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.CH.\frac{1}{2}.AB = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CH.AB\right) = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

2. Q nằm gần C hơn A, tức AQ > QC (Hình 5)

Giả sử A', B' là các điểm đối xứng với C qua Q và P. Khi đó các điểm A', B' nằm trên đoạn AQ và BP, đồng thời đoạn A'B' cắt các cạnh MQ và NP tại các điểm M' và N'.




Hình 5

Khi đó PQ là đường trung bình của tam giác A'B'C' và hình chữ nhật MM'N'N có cạnh đáy MN = M'N' = $\frac{1}{2}A'B'$, cạnh bên MM' = IA', nên:

$$S_{MM'N'N} = \frac{1}{2}S_{IA'B'K}$$

$$< \frac{1}{2}S_{AA'BB'} \qquad (1)$$

Theo (1) có:

$$S_{M'QPN'} = \frac{1}{2}S_{A'CB'} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có:

$$S_{MNPQ} = S_{M'QPN'} + S_{MM'N'N} < \frac{1}{2}S_{A'CB'} + \frac{1}{2}S_{AA'BB'} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

3. Q nằm gần A hơn C, tức AQ < QC (Hình 6)

Tương tự như phần 2, A', B' là các điểm đối xứng với C qua Q và P.

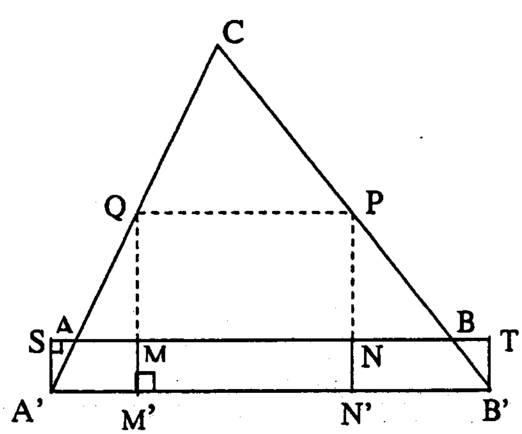
Khi đó tam giá A'CB' nhận PQ làm đường trung bình, nên theo phần 1:

$$S_{M'QPN'} = \frac{1}{2}S_{A'CB'} \ (3)$$

Hình chữ nhật M'MNN' có cạnh:

$$M'N' = \frac{1}{2}C'B'$$

và cạnh bên MM' = SA', nên:




Hình 6

$$S_{MM'N'N} = \frac{1}{2}S_{A'STB'} > \frac{1}{2}S_{A'ABB'} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) có:

$$S_{MNPQ} = S_{M'QPN'} - S_{MM'N'N} = \frac{1}{2}S_{A'CB'} - S_{M'MNN'}$$

$$< \frac{1}{2}S_{A'CB'} - \frac{1}{2}S_{AA'BB'} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

- <u>Trường hợp thứ hai:</u>

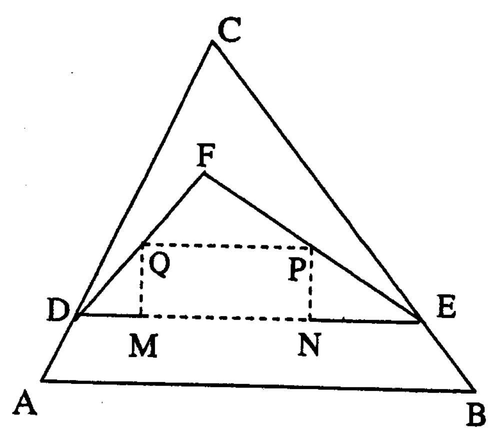
Trường hợp không phải tất cả các đỉnh đều nằm trên biên của tam giác. Trường hợp này cũng có hai khả năng cần xét:

1. Hình chữ nhật có hai cạnh đối diện song song với một trong các cạnh của tam giác:

Giả sử các cạnh MN, PQ của hình chữ nhật song song với cạnh AB của tam giác ABC. Trong đó cạnh MN nằm trên dải giữa AB và PQ.

Giả sử D, E là giao điểm của đường thẳng MN với các cạnh AC, BC của tam giác.

Vì tia DQ cắt đoạn EC, tia ED cắt đoạn DC, nên các tia này cắt nhau tại một điển (F) thuộc tam giác DCE (Hình 7).




Hình 7

Các đỉnh M, N, P, Q của hình chữ nhật nằm trên biên của tam giác DFE, nên theo trường hợp thứ nhất, diện tích của hình chữ nhật MNPQ không vượt quá một nửa diện tích của tam giác DFE. Mặt khác diện tích tam giác DEF lại nhỏ hơn diện tích tam giác ABC. Bởi vậy diện tích hình chữ nhật MNPQ nhỏ hơn một nửa diện tích của tam giác ABC.

2.Không có cạnh nào của hình chữa nhật song song với cạnh của tam giác.

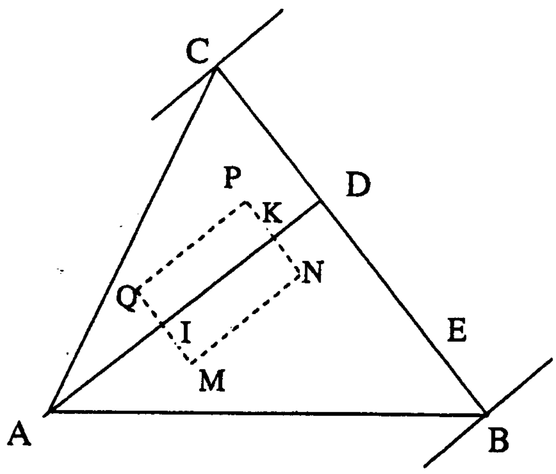
Qua các đỉnh A, B, C của tam giác kẻ các đường thẳng song song với cạnh MN của hình chữ nhật.

Giả sử đường thẳng đi qua đỉnh A cắt BC tại D, cắt các cạnh MQ, NP của hình chữ nhật tại I và K (Hình 8).

Khi đó, theo (1):

$$S_{IKPQ} < \frac{1}{2} A_{ADC} \qquad (5)$$

$$S_{IKNM} < \frac{1}{2} A_{ABD} \qquad (6)$$



Hình 8

Từ (5) và (6) có:

$$S_{MNPQ} = S_{IKPQ} + S_{IKNM} < \frac{1}{2} S_{ACD} + \frac{1}{2} S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

*Kết luận:*

Các chứng minh trên khẳng định được rằng diện tích của hình chữ nhật cắt ra từ hình tam giác không vượt quá một nửa diện tích của tam giác.

Hình chữ nhật đạt diện tích cực đại (bằng nửa diện tích tam giác) khi và chỉ khi nó có hai đỉnh là trung điểm của hai cạnh và hai đỉnh còn lại nằm trên cạnh thứ ba của tam giác. Từ đó suy ra số cách cắt hình chữ nhật có diện tích lớn nhất từ một tam giác. Đối với:

1. Tam giác nhọn có 3 cách cắt
2. Tam giác vuông có hai cách cắt
3. Tam giác tù có 1 cách cắt.

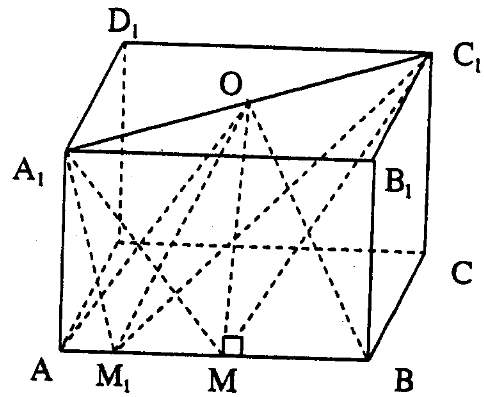
**Ví dụ 5:**

Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ với chiều cao bằng nửa cạnh đáy và điểm M nằm trên cạnh đáy AB. Hãy tìm giá trị lớn nhất của góc $\widehat{A_1MC_1}$.

*Giải:*

Dùng O để ký hiệu giao điểm hai đường chéo của đáy trên $A_1B_1C_1D_1$.

Vì $ABCDA_1B_1C_1D_1$ là lăng trụ tứ giác đều, nên O chính là trung điểm của $A_1C_1$ và tam giác AOB cân tại đỉnh O.




Hình 9

Khi M chạy trên AB cho ta các tam giác $A_1MC_1$ có đáy $A_1C_1$ có đỉnh, mà OM là trung tuyến tương ứng với cạnh cố định $A_1C_1$, nên góc $\widehat{A_1MC_1}$ đạt giá trị cực đại khi và chỉ khi OM ngắn nhất, tức là khi và chỉ khi $|OM|$ là khoảng cách từ O đến AB, tức khi và chỉ khi OM ⊥ AB, tức khi và chỉ khi M là điểm giữa của AB.

Không giảm tính tổng quát, giả sử lăng trụ có chiều cao là 1. Khi đó:

$$|AA_1| = |CC_1| = |AM| = |BM| = 1,\ |A_1B_1| = |B_1C_1| = |BC| = 2$$

nên: $(A_1M)^2 = (AA_1)^2 + (AM)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$(C_1M)^2 = (MB)^2 + (BC_1)^2 = (MB)^2 + (BC)^2 + (CC_1)^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$

$(A_1C_1)^2 = (A_1B_1)^2 + (B_1C_1)^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$(A_1C_1)^2 = 8 = 2 + 6 = (A_1M)^2 + (C_1M)^2$.

Do đó tam giác $A_1MC_1$ vuông tại M.

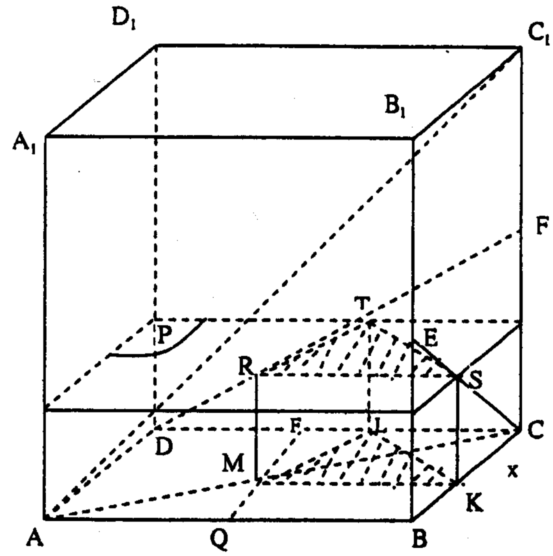
Vậy khi M là điểm giữa của AB góc $\widehat{A_1MC_1}$ đạt giá trị cực đại và bằng $\frac{\pi}{2}$.

**Ví dụ 6:**

Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a và E, F là trung điểm các cạnh $BB_1$, $CC_1$. Mặt phẳng P song song với đáy ABCD cắt các đường thẳng CE, DF và $AC_1$ tại các điểm tương ứng S, T, R. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng P, để diện tích tam giác STR đạt giá trị cực tiểu.

*Giải:*

Chiếu song song tam giác STR xuống đáy ABCD được tam giác KLM với đỉnh K thuộc BC, L thuộc CD và M thuộc đường chéo AC.




Hình 10

Do chiếu song song, nên:

$\Delta$ KLM = $\Delta$ STR,

SK // $BB_1$ // MR // LT

KS = MR = LT

Đặt KC = x. Khi đó KB = a – x

Do KS //$BB_1$, nên:

$$\frac{KS}{BE} = \frac{KS}{\frac{a}{2}} = \frac{KC}{BC} = \frac{x}{a} \Rightarrow KS = \frac{x}{2}$$

Từ đó có: MR = LT = $\frac{x}{2}$

Do MR // $CC_1$, nên: $\frac{AM}{AC} = \frac{MR}{CC_1} \Rightarrow AM = \frac{AC.MR}{CC_1} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{x}{2}}{a} = \frac{x}{\sqrt{2}}$

Do ABCD là hình vuông và AC là đường chéo, nên tam giác AQM vuông cân tại Q. Bởi vậy:

AQ = QM = $\frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2}$

Từ đó có: BQ = a - $\frac{x}{2}$; MF = a - $\frac{x}{2}$; DF = AQ = $\frac{x}{2}$

Do LT // $CC_1$, nên $\frac{DL}{CD} = \frac{LT}{CF} \Rightarrow DL = \frac{LT.CD}{CF} = \frac{\frac{x}{2}.a}{\frac{a}{2}} = x$

Từ đó: CL = a – x và FL = DL – DF = x - $\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$

Tứ giác BKMQ là hình thang có các đáy là BK và MQ, nên:

$$S_{BKMQ} = \frac{BK + MQ}{2} \times BQ = \frac{a - x + \frac{x}{2}}{2} \times \left(a - \frac{x}{2}\right) = \frac{(2a - x)^2}{8} \quad (1)$$

Tam giác AQM vuông tại Q, nên:

Tứ giác AQFD là hình chữ nhật, bởi vậy:

$$S_{AQFD} = AD \times AQ = a.\ \frac{x}{2} \quad (2)$$

Tam giác LFM vuông tại F, nên:

$$S_{LFM} = \frac{1}{2} LF.MF = \frac{1}{2}.\frac{x}{2}\left(a - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{8} x(2a - x) \quad (3)$$

Tam giác KCL vuông tại C, nên:

$$S_{KCL} = \frac{1}{2} KC.CL = \frac{1}{2}.x(a - x) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có:

$$S_{KLM} = S_{ABCD} - (S_{BKMQ} + S_{AQFD} + S_{LFM} + S_{KCL}) =$$

$$= a^2 - \left[\frac{(2a - x)^2}{8} + \frac{ax}{2} + \frac{1}{8} x(2a - x) + \frac{1}{2} x(a - x)\right]$$

$$= a^2 - \frac{1}{8}\left[(2a - x)^2 + 4 \cdot + x(2a - x) + 4x(a - x)\right]$$

$$= a^2 - \frac{1}{8}\left[4a^2 - 4ax + x^2 + 4ax + 2ax - x^2 + 4ax - 4x^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[8a^2 - 4a^2 - 6ax + 4x^2\right] = \frac{1}{8}\left[4x^2 - 6ax + 4a^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(2x)^2 - 2.2.\frac{3}{2}a + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{7a^2}{4}\right] = \frac{1}{8}\left[\left(2x - \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{7a^2}{4}\right]$$

Vậy $S_{STR} = S_{KLM}$ đạt giá trị cực tiểu khi và chỉ khi $2x - \frac{3}{2}a = 0$.

Tức khi và chỉ khi: $x = \frac{3}{4}a$ , tức khi và chỉ khi mặt phẳng P cách đáy với một đoạn bằng $\frac{3}{8}a$ .

Do đó đoạn thẳng EF có độ dài cực tiểu (bằng $\frac{a}{\sqrt{5}}$) khi:

$\sqrt{5}x - \frac{2a}{\sqrt{5}} = 0$, tức $x = \frac{2a}{5}$, tức CL bằng hai phần năm cạnh BC.

**Bài tập:**

1.Cho góc nhọn xOy và điểm A nằm trong góc đó. Hãy dựng tam giác ABC có đỉnh B nằm trên Ox, đỉnh C nằm trên Oy và chu vi nhỏ nhất.

2.Cho góc xAy có đỉnh là A và điểm M nằm trong góc đó. Hãy tìm điểm B trên Ax, điểm C trên Ay, sao cho AB = AC và tổng độ dài của MB và MC là nhỏ nhất.

3.Cho tam giác ABC. Hãy kẻ đường thẳng d qua đỉnh A, sao cho tổng khoảng cách từ các đỉnh B, C đến d là:

a. Nhỏ nhất b. Lớn nhất

4.Cho hình vuông ABCD và điểm I không trùng với tâm O của hình vuông. Hãy kẻ một đường thẳng đi qua điểm I, sao cho hiệu diện tích của hai phần thuộc hình vuông do đường thẳng cắt ra là:

a. Nhỏ nhất b. Lớn nhất

5.Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên AD lấy điểm M tùy ý (M không trùng với A và B). Từ B kẻ đường thẳng BT hợp với BM một góc bằng góc ABM. Từ điểm M hạ đường MH vuông góc với BT và kéo dài cắt cạnh CD tại điểm N.

Hãy tìm vị trí của điểm M trên AD, để diện tích tam giác MBN đạt giá trị cực đại.

6.Cho hai điểm tùy ý A, B. Hãy dựng một hình vuông, sao cho A, B nằm trên biên của nó và tổng khoảng cách từ A đến các đỉnh của hình vuông là nhỏ nhất.

7. Cho góc tam diện Oxyz và điểm M nằm trong góc đó. Qua điểm M dựng mặt phẳng P cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm tương ứng A, B, C. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng P, để thể tích tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất.

8.Hai hình nón N, $N_1$ có đáy chung, nằm trên mặt phẳng (P) với chiều cao h, $h_1$ ($h \le h_1$) và nằm về hai phía của mặt phẳng (P). Hãy tìm khoảng cách lớn nhất giữa đường sinh của N và $N_1$.

9.Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ với cạnh bằng a. Hãy tìm bán kính của hình cầu nhỏ nhất, mà nó tiếp xúc đồng thời với các đường thẳng $AB_1$, $B_1C$, CD và DA.

10.Cho hình hộp chữ nhật với các cạnh bằng a, b, c. Chiếu vuông góc hình chữ nhật này lên các mặt phẳng khác nhau. Hãy tìm diện tích của hình chiếu nhỏ nhất (tức giá trị nhỏ nhất của diện tích hình chiếu)?

11.Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Trên đường thẳng $AA_1$ lấy điểm M và trên đường thẳng BC lấy điểm N, sao cho đường thẳng MN cắt cạnh $C_1D_1$. Hãy tìm giá trị bé nhất của độ dài đoạn MN.

12.Cho hình lập phương cạnh bằng a. Hãy tìm độ dài của đoạn thẳng ngắn nhất, có hai đầu nằm trên các đường thẳng $AB_1$ và $BC_1$ đồng thời lập với mặt phẳng ABCD một góc bằng $60^0$.

13.Cho hình lập phương cạnh bằng a, N là một điểm trên đường chéo của mặt bên, M là một điểm trên đường tròn nằm trên mặt phẳng đáy và có tâm trùng với tâm của đáy và bán kính bằng $\frac{5}{12}a$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

14.Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ lệ thể tích hình nón và hình trụ cùng ngoại tiếp một hình cầu.

# MỘT SỐ ĐẲNG THỨC
# VÀ BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

**Dương Châu Dinh**
*Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị*

Trong bài viết này, xuất phát từ những đẳng thức cơ bản và ràng buộc các điều kiện, nếu cần, thì chúng ta sẽ có một số bất đẳng thức liên quan. Minh họa điều này ta có các nhận xét và đề xuất một số bài toán sau:

__*Nhận xét 1:*__ Giả sử $\alpha, \beta$ là 2 số thực dương cho trước. Xét các số thực dương $x,y$. Ta có:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{y}{x}\right)$$

* Nếu: $\begin{cases}\beta \le y \le x\\ xy \ge \alpha\beta\end{cases}$ thì $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \ge \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\left(1-\frac{y}{x}\right)$, hay $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

Từ đó ta được:

__*Bài toán 1:*__ Cho trước các số thực dương $\alpha, \beta$. Xét các số thực dương $x,y$ thoả mãn đồng thời các điều kiện: $\begin{cases}\beta \le y \le x & (1)\\ xy \ge \alpha\beta & (2)\end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P(x;y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

__*Lời giải:*__

Từ (1) $\Rightarrow \begin{cases}1-\frac{y}{x} \ge 0\\ \frac{1}{y} \le \frac{1}{\beta}\end{cases}$. Theo BĐT Côsi với 2 số dương:

$$(2) \Rightarrow \beta x+\alpha y \ge 2\sqrt{\alpha\beta xy} \ge 2\alpha\beta \quad \Rightarrow \frac{2}{x} \le \frac{1}{\beta}\frac{y}{x}+\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\left(1-\frac{y}{x}\right) \le \frac{1}{\beta}\frac{y}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\end{cases}$

Vậy $\max P(x;y)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, khi $\begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\end{cases}$.

__*Ví du 1*__ Xét các số thực dương $x,y,z$ thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} \frac{2}{5} \le z \le \min\{x; y\} & (1) \\ xz \ge \frac{4}{15} & (2) \\ yz \ge \frac{1}{5} & (3) \end{cases}$$

(2). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P(x; y; z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$

***Nhận xét*** (Sử dụng bài toán 1)

Chọn: $\beta = \frac{2}{5} \overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha = \frac{1}{2}$ (xét dấu "=" xảy ra)

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\beta = \frac{2}{5} \overset{(2)}{\Rightarrow} \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

Suy ra: $P(x; y; z) \le 13$.

Như vậy, các bạn hãy thử chọn các giá trị $\alpha, \beta > 0$ và ràng buộc bởi hệ điều kiện thích hợp thì sẽ có một lớp các bài toán về bất đẳng thức.

***Nhận xét 2:***

Cho trước các số thực dương $\alpha, \beta > 0$

Xét các số thực dương $x,y$. Ta có:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \ge \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\beta x + \alpha y}{\alpha\beta}\right)^2 + y^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right).$$

i) Nếu: $\begin{cases} y \ge \beta \ge \alpha \\ \beta x + \alpha y \ge 2\alpha\beta \end{cases}$ thì: $x^2 + y^2 \ge \alpha^2 + \beta^2$

Thay $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ bởi $\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$, khi đó:

ii) Nếu: $\begin{cases} x \le y \le \beta \\ \beta x + \alpha y \ge 2xy \end{cases}$ thì: $x^2 + y^2 \le \alpha^2 + \beta^2$

Thay $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ bởi $\begin{cases} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{cases}$ và $\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$ bởi $\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\beta} \end{cases}$, khi đó:

iii) Nếu $\begin{cases} \frac{1}{x} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta x} + \frac{1}{\alpha y} \ge \frac{2}{xy} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \beta \le y \le x \\ \alpha y + \beta x \ge 2\alpha\beta \end{cases}$

Thì:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\le\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$$

Đưa đến:

**Bài toán 2:** Cho trước các số thực dương $\alpha,\beta$

Xét các số thực dương $x,y$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases}\beta\le y\le x & (1)\\ \alpha y+\beta x\ge 2\alpha\beta & (2)\end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P(x;y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$$

Ngoài sử dụng đẳng thức như trên, ta còn có lời giải khác.

**Lời giải:**

Từ (1) $\Rightarrow\begin{cases}1-\dfrac{y^2}{x^2}\ge 0\\ \dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{\beta}\end{cases}$.

$(2)\Rightarrow(2\alpha\beta)^2\le 2(\alpha^2y^2+\beta^2x^2)$; (do $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$)

$$\Rightarrow\frac{2}{x^2}\le\frac{1}{\beta^2}\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y^2}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\le\frac{1}{\beta^2}\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$\Rightarrow P(x;y)\le\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\end{cases}$

Vậy $\max P(x;y)=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ khi $\begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\end{cases}$

**Ví du 2:** Xét các số thực dương $x,y,z$ thoả mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le z\le\min\{x;y\} & (1)\\ x+z\sqrt{3}\ge\sqrt{6} & (2)\\ y\sqrt{3}+z\sqrt{10}\ge 2\sqrt{5} & (3)\end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P(x;y;z)=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y^2}+\frac{3}{z^2}$$

(Đề thi HSG THPT, bảng A-2001).

**Nhận xét:** (Sử dụng bài toán 2)

* Chọn $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, (3) $\Rightarrow\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (Xét dấu "=" xảy ra).

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \le \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{3}{5}+2=\frac{13}{5}$$

* Chọn $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(2)\Rightarrow \alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2} \le \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow P(x;y;z) \le \frac{8}{3}+\frac{26}{5}=\frac{118}{15}$$

Từ đó, các bạn có thể phối hợp nhận xét 2 để tạo ra một số bài toán về bất đẳng thức.

***Nhận xét 3:*** Cho trước $\alpha, \beta \ge 0$.

Xét các số thực không âm $x,y$, ta có:

$$x^2=\alpha^2+2\alpha(x-\alpha)+(x-\alpha)^2 \ge \alpha^2+2\alpha(x-\alpha)$$

$\ge \alpha^2+2\beta(x-\alpha)$, (Nếu: $\beta \le \alpha \le x$).

$$y^2=\beta^2+2\beta(y-\beta)+(y-\beta)^2 \ge \beta^2+2\beta(y-\beta)$$

* Nếu: $\begin{cases}\beta \le \alpha \le x\\ \alpha+\beta \le x+y\end{cases}$ thì $x^2+y^2 \ge \alpha^2+\beta^2$

Thay $\begin{cases}x\\y\end{cases}$ bởi $\begin{cases}\alpha\\ \beta\end{cases}$, khi đó:

* Nếu: $\begin{cases}y \le x \le \alpha\\ x+y \le \alpha+\beta\end{cases}$ thì $x^2+y^2 \le \alpha^2+\beta^2$

Suy ra:

***Bài toán 3:*** Cho trước các số thực dương $\alpha, \beta$.

Xét các số thực $x,y$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases}0 \le y \le x \le \alpha & (1)\\ x+y \le \alpha+\beta & (2)\end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2 \le \alpha^2+\beta^2$.

Với bài toán trên, ngoài cách giải xuất phát từ đẳng thức, còn có cách giải khác, như sau:

***Lời giải:***

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}(x-y)x \le (x-y)\alpha\\ (x+y)y \le (\alpha+\beta)y\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \le \alpha x+\beta y \le \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)}$$

$\Rightarrow x^2+y^2 \le \alpha^2+\beta^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\end{cases}$.

***Ví dụ 3:***

Cho các số thực x,y,z thoả mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 0 \le x \le y \le z \le 1 & (1) \\ 2y + z \le 2 & (2) \\ 3x + 2y + z \le 3 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le \dfrac{7}{6}$

***Lời giải:***

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\} \Rightarrow (2y+z)y \le 2y \\ (1) \Rightarrow (z-y)z \le z-y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^2 + z^2 \le y + z = \frac{2y+z}{2} + \frac{z}{2} \le 1 + \frac{1}{2} \quad \text{(Do (1) và (2)).}$$

$$\Rightarrow 2y^2 + z^2 \le \frac{3}{2} \quad (4). \quad \text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(1)\\(3)\end{array}\right\} \Rightarrow (3z+2y+z)x \le 3x \\ \left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\} \Rightarrow (2y+z)(y-x) \le 2(y-x) \\ (1) \Rightarrow (z-y)z \le z-y \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + z^2 \le x + y + z$$

$$x + y + z = \frac{3x+2y+z}{3} + \frac{2y+z}{6} + \frac{z}{2} \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + z^2 \le \frac{11}{6} \quad (5) \text{ (Do (1),(2) và (3)). Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3x^2 + 2y^2 + z^2}{3} + \frac{2y^2 + z^2}{6} + \frac{z^2}{2} \le \frac{11}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{ (Do (1),(4) và (5)).}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{49}{36} \qquad \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le \frac{7}{6}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Từ nhận xét 3, dễ dàng giải bài toán T3/304 (số 10/2002)

$$(Gt) \Rightarrow \begin{cases} 1 \le a \le x \\ 1 + a \le x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \ge a^2 + 1 \\ x^2 \ge a^2 \ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 \ge a^4 + 1.$$

$$\Rightarrow \min\left(x^4+y^4\right)=a^4+1, \text{ khi } \begin{cases} x=a \\ y=1 \end{cases}.$$

Sau đây là một số bài toán về bất đẳng thức, khi đã phối hợp các nhận xét trên. Mời các bạn thử giải và tham gia sáng tạo ra các bài toán khác.

***Bài 1:***

Xét các số thực $x,y$ thoả mãn:

$$\begin{cases} 0 < x \le y \le 3 \\ 2xy \le 3x + 2y \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P(x;y) = x^2 + y^2$.

***Bài 2:***

Xét các số thực dương $x,y,z$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} x + 2y \ge 4xy & (1) \\ 4y + 3z \ge 12yz & (2) \\ y \le \dfrac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P(x;y;z) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{y^2} + \frac{2}{z^2}$$

***Bài 3:***

Xét các số thực dương $x,y,z$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} \max\{x;y\} \le z \le 1 & (1) \\ 2\sqrt{3}xz \le \sqrt{3}x + z & (2) \\ \sqrt{2}y + z \le 2 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $3x^2 + 2y^2 + 5z^2 \le 7$.

# Sử dụng định lý Lagrange trong bất đẳng thức và cực trị của hàm số và dãy số

**TS. Đỗ Thị Hồng Anh**
*Trờng THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam*

Bài 1. Cho hàm $f(x)=\cos a_1x + \cos a_2x \quad \forall x \in R \ (a_1, a_2 \in R), (a_1, a_2 \neq 0)$.

Gọi $m(a_1, a_2)=\min f(x)$

CMR: $m(a_1, a_2)<0 \quad \forall a_1, a_2 \in R$ và $a_1, a_2 \neq 0$

Giải:

Đặt g(x)

$$g(x)=\frac{\sin a1x}{a1}+\frac{\sin a2x}{a2}\ (x \in R)$$

$$g(x)=\frac{\sin a_1x}{a_1}+\frac{\sin a_2x}{a_2}\ (\forall x \in R)$$

Có thể giả thiết $0<a_1 \leq a_2$ (do $\cos a_1x$ và $\cos a_2x$ là các hàm chẵn).

Nếu $a_1=a_2$ thì $f(x)=2\cos a_1x$

$$f\left(\frac{\Pi}{a_1}\right)=2\cos\left(a_1.\frac{\Pi}{a_1}\right)=-2<0 \Rightarrow m(a1,a_2) \leq -2 < 0$$

Xét $0<a_1<a_2$ có $g(0)=0$

$$g\left(\frac{3\Pi}{2a1}\right)=\frac{1}{a_1}\sin\frac{3\Pi}{2}+\frac{1}{a_2}\sin\frac{3\Pi a_2}{a1}$$

$$=-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a2}\sin\frac{3\Pi a_2}{a_1}$$

$$\leq -\frac{1}{a1}+\frac{1}{a2}=\frac{1}{a2}-\frac{1}{a1} < 0$$

Theo Lagrange, ta có $\exists \zeta \in \left(0, \frac{3\Pi}{a_1}\right)$

sao cho $0 > \dfrac{g\left(\dfrac{3\Pi}{2a_1}\right) - g(0)}{\dfrac{3\Pi}{2a_1}} = g'(\zeta) = f(\zeta) \geq m(a_1, a_2)$

vì g'(x) = f(x), $\forall x \in R$

Bài 2. Bất phơng trình

$$\sin(x+1)\sqrt[3]{\cos x} - \sin x.\sqrt[3]{\cos(x+1)} < \sqrt[3]{\cos x.\cos(x+1)} \qquad (1)$$

có nghiệm x = 5 (Radian) không? Tại sao?

**(Đề thi học sinh giỏi lớp 12 thành phố Hà Nội năm 1994-1995)**

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow F(x) = \frac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} \langle 1 \qquad (2)$$

Xét hàm

$f(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt[3]{\cos t}}$ trên đoạn $[x, x+1] \subset \left(\dfrac{3\Pi}{2}, 2\Pi\right)$

có $f'(t) = \dfrac{2\cos^2 t + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 t}}$

Dễ thấy $f'(t) \geq 1$ do sử dụng bất dẳng thức Côsi với 3 số $\cos^2 x$, $\cos^2 x$ và 1

Áp dụng định lý Lagrange của hàm f(t) trên đoạn [x, x+1]

$\dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(C)$ với $C \in (x, x+1)$

Vậy x=5 không là nghiệm của (1) do $5 \in \left(\dfrac{3\Pi}{2}; 2\Pi\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} = \frac{2\cos^2 C + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 C}} \rangle 1$$

$$\Leftrightarrow F(x) > 1$$

Bài 7. Giả sử $\quad s_1 = \sum_{k=1}^{4n^2} \frac{1}{k^{1/2}} \quad$ va $\quad s_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}$

Với những n nguyên dơng nào, ta có $s_1 < s_2$?

Giải: Xét hàm $f(x) = x^{1/2}$ $(x \geq 1)$

Theo định lý Lagrange/[n, n+1] ta có:

$$f(n+1) - f(n) = f'(c) = \frac{1}{2}c^{-1/2} \langle \frac{1}{2}n^{-1/2}$$

$\Rightarrow n^{-1/2} > 2[(n+1)^{1/2} - n^{1/2}]$ Cho n=1,2,3… $4n^2$

cộng lại ta có $S_1 > 4n-2$

Xét $f(x) = x^{2/3}$ $\quad (x \geq 1)$

Theo định lý Lagrange ta có

$$f(n+1) - f(n) = f'(c) = \frac{2}{3}c^{-1/3} \rangle \frac{2}{3}(n+1)^{-1/3}$$

$\Rightarrow 2[(n+1)^{-1/3} < 3\,[(n+1)^{2/3} - n^{2/3}]$

Cho n chạy từ (n-1) đến 0 cộng lại

$\Rightarrow 2S_2 < 3n^{2/3} < 3n < 8n - 4$

Nghĩa là $2S_2 < 2S_1$ $\forall n$

Vậy không tồn tại n thoả mãn bài toán.

Bài 8. CMR:

$$\sin e\left(\sqrt[3]{\cos(e-1)}\right) - \sin(e-1)\sqrt[3]{\cos e} > \sqrt[3]{\cos(e-1) - \cos e}$$

Giải: $\Pi > e$ và $e-1 \approx 1,71828 > \Pi/2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin e > 0;\ \sin(e-1) > 0 \\ \cos e < 0 \text{ và } \cos(e-1) < 0 \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tơng đơng với:

$$\frac{\sin e}{\sqrt[3]{\cos e}} - \frac{\sin(e-1)}{\sqrt[3]{\cos(e-1)}} \rangle 1$$

Đặt: $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

TXĐ $x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$

Ta có f(x) liên tục trên [e - 1; e] $\subset \left(\frac{\Pi}{2}, \Pi\right)$

Áp dụng định lý Lagrange ta có

tồn tại c ∈ [e-1, e] sao cho

$$f(e) - f(e-1) = f'(c)\,[e-(e-1)] = f'(c)$$

Mặt khác:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'.\sqrt[3]{\cos x} - \left(\sqrt[3]{\cos x}\right)'.\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} = \frac{2\cos^2 x + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$2\cos^2 x + 1 = \cos^2 x + \cos^2 x + 1 \geq 3\sqrt[3]{\cos^4 x} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\cos^2 + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}} \geq 1 \qquad \forall x$$

Dấu "=" không xảy ra với x ∈ [ e-1; e]

$\Rightarrow f'(c) > 1$

$\Rightarrow f(e) - f(e-1) = f'(c) > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin e}{\sqrt[3]{\cos e}} - \frac{\sin(e-1)}{\sqrt[3]{\cos(e-1)}} > 1$$

Bài 3. Cho $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

Xét dãy{un} xác định bởi $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in Z^+$

CMR: $\exists\, k \in (0; 1)$ sao cho $|u_{n+1} - \alpha| \leq k\,|u_n - \alpha| \quad \forall n \in Z^+$

Giải:

Ta có: $f'_{(x)} = \frac{(x-1).e^x}{(x+1)^3} < 0 \qquad \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

giảm trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f'_{(1)} = 0 \Rightarrow f'_{(x)} \leq 0$$

$\Rightarrow \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x) \geq f(1)$

$\Rightarrow 1 > \frac{4\sqrt{2}}{9} \geq f(x) \geq \frac{e}{4} > \frac{1}{2}$

Có $u_0=1 \in \left[\frac{1}{2},1\right]$

Giả sử $u_k \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ từ đó

$$u_{k+1} = f_{(uk)} \in \left[\frac{1}{2},1\right]$$

Vậy

$$u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right] \forall n \in N$$ Ta có

$$f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} > 0$$

$$\forall x \in R \setminus \{-1\}$$

Vì $f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} > 0 \quad \forall x \in R \setminus \{-1\}$

nên $f'(x)$ tăng / $\left[\frac{1}{2};1\right]$

$$\Rightarrow f'(1/2) \leq f'(x) \leq f'(1) \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{-4\sqrt{e}}{27} \leq f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right] \qquad (1)$$

Lập tỷ số

$$\left|\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}\right| = \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| \qquad \text{(do } f(\alpha)=\alpha\text{)}$$

Theo định lý Lagrange thì $\exists c$ nằm giữa $u_n$ và $\alpha$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}\right| = |f'(c)| \qquad (2)$$

Hiển nhiên $c \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ nên từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}\right| \le \left|\frac{4\sqrt{e}}{27}\right| = k \langle 1 \qquad \forall n \in N$$

Vậy $|u_n - \alpha|.k \ge |u_{n+1} - \alpha| \qquad \forall n \in N$

ở đó

$$0 \langle\ k = \frac{4\sqrt{e}}{27} \langle\ 1$$

## *KẾT LUẬN*

Trên đây chúng tôi đã nêu một vài ứng dụng của định lý Lagrange. Chúng tôi hy vọng bạn đọc sẽ còn tìm thêm đợc các ứng dụng phong phú khác trong quá trình giải toán.

Chúc các bạn thành công!

# Bất đẳng thức hình học

**Đỗ thanh Sơn**

*Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN*

Các bài tập về bất đẳng thức hình học dới đây đợc tác giả tìm ra ( trừ bài2).Mỗi bài có kèm theo hớng dẫn giải .

**Bài 1.**

Gọi I là tâm đờng tròn nội tiếp tam giác ABC.A', B',C' lần lợt là giao điểm của AI, BI, CI với đờng tròn ngoại tiếp tam giác.Chứng minh rằng trong 3 đoạn thẳng IA', IB', IC' tồn tại một đoạn có độ dài không lớn hơn bán kính đờng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Hớng dẫn** :Ta thấy rằng A'I = A'B =A'C .Tổng số đo 3 cung BA'C,CB'A và AC'B bằng $360^0$, nên tồn tại một cung có số đo không lớn hơn $120^0$.Giải sử đó là cung BA'C.Vì A'B = A'C, nên số đo các cung trơng bởi các dây A'B và A'C có số đo bằng nhau và không lớn hơn $60^0$.Điều đó chứng tỏ A'B không lớn hơn bán kính đờng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Bài 2.**

Các điểm $O,A_1,A_2,A_3,A_4$ nằm trên một mặt phẳng và thoã mãn điều kiện là diện tích của một tam giác bất kỳ $OA_iA_j$ không bé hơn 1 (i,j =1,2,3,4 và i ≠ j). Chứng minh rằng trong các tam giác đó tồn tại một tam giác có diện tích không bé hơn $\sqrt{2}$.

**Hớng dẫn .**

Ta ký hiệu $OA_1 = a, OA_2 = b, OA_3 = c, OA_4 = d$; $x = \angle A_1OA_2, y = \angle A_2OA_3, z = \angle A_3OA_4$ . Ta có

$$S_1 = \frac{ab}{2}|\sin x|; S_2 = \frac{ac}{2}|\sin(x+y)|; S_3 = \frac{ad}{2}|\sin(x+y+z)|; S_4 = \frac{bc}{2}|\sin y|; S_5 = \frac{ab}{2}|\sin(y+z)|;$$

$S_6 = \frac{ab}{2}|\sin z|$ . Vì $\sin(x+y+z).\sin y + \sin x.\sin z = \sin(y+z)\sin(x+y)$., nên ta có thể chọn đợc dấu + hoặc – sao cho $S_3S_4 \pm S_1S_6 \pm S_2S_5 = 0$, chẳng hạn $S_3S_4 = S_1S_6 + S_2S_5$ .Ký hiệu $S = \max\{S_i\}$, ta có $S^2 \geq$ $S_3S_4 = S_1S_6 + S_2S_5 \geq 1 + 1 = 2 \Rightarrow S \geq \sqrt{2}$.

**Bài 3.**

Cho tam giác nhọn ABC.Ta ký hiệu AA',BB',CC' là các đờng cao tam giác và H là trực tâm .Gọi x là đờng thẳng đi qua H và song song với B'C'; y là đờng thẳng đi qua H và song song với A'C'; z là đờng thẳng đi qua H và song song với B'A'.Ta ký hiệu $a_1,a_2$ là khoảng cách từ A đến các đờng thẳng y, z ; $b_1,b_2$ là khoảng cách từ B đến các đờng thẳng z, x; $c_1$, $c_2$ là khoảng cách từ C đến các đờng thẳng x , y. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1+a_2}{B'C'}+\frac{b_1+b_2}{A'C'}+\frac{c_1+c_2}{A'B'}\geq 2\sqrt{3}.$$

**Hớng dẫn** :Tam giác AA'C đồng dạng với tam giác HNC, nên $\frac{CN}{HN}=\frac{CN}{A'B'}=\frac{CA'}{AA'}$. Tam giác AA'B đồng dạng với tam giác HMB, nên $\frac{BM}{HM}=\frac{BM}{A'C'}=\frac{BA'}{AA'}$.Từ các kết quả đó ta suy ra $\frac{CN}{A'B'}+\frac{BM}{A'C'}=\frac{BA'+CA'}{AA'}=\frac{BC}{AA'}=\frac{BC^2}{BC.AA'}=\frac{a^2}{2S}$. Tóm lại $\frac{c_1}{A'B'}+\frac{b_1}{A'C'}=\frac{a^2}{2S}$. Tơng tự ta có $\frac{c_2}{A'B'}+\frac{a_2}{B'C'}=\frac{b^2}{2S}$; $\frac{a_1}{B'C'}+\frac{b_2}{A'C'}=\frac{c^2}{2S}$ .Cộng các kết quả và chú ý rằng $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}$ S.

**Bài 4.**

Bên trong tam giác vuông cân ABC (A=1v) ta lấy điểm P sao cho $\angle$ APB $=135^0$.

Chứng minh rằng $\frac{PC-PA}{PB}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Hớng dẫn** .Gọi P' là ảnh của P qua phép quay tâm A biến B thành C, ta đợc AP=AP',PB=P'C và tam giác P'PC vuông tại P'.Từ đó ta suy ra $PC^2=2PA^2+PB^2$. Theo bất đẳng thức Cô si – Bunhiacốpsky ta có $2(2PA^2+PB^2)\geq(\sqrt{2}\,PA+PB)^2\Rightarrow$ $2PC^2\geq(\sqrt{2}\,PA+PB)^2\Rightarrow\sqrt{2}\,PC\geq\sqrt{2}\,PA+PB\Rightarrow\sqrt{2}\,(PC-PA)\geq PB$.

**Bài 5.**

Cho hai đờng tròn tâm O và O' nằm ngoài nhau.Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đờng tròn tiếp xúc với O tại A và O' tại B.Một tiếp tuyến chung trong của hai đờng tròn tiếp xúc với O tại C và O' tại D (khoảng cách từ C tới AB nhỏ hơn từ D tới AB). Các đờng thẳng OC và O'D cắt nhau tại M.Chứng minh rằng OM > O'M.

**Hớng dẫn.** Xét tam giác MOO'.Ta thấy các đờng cao của tam giác đó kẻ từ O và O' tơng ứng bằng AB và CD.Vì AB >CD, nên đờng cao kẻ từ O lớn hơn đờng cao kẻ từ O'.

**Bài 6.**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC; $R_1$,$R_2$,$R_3$ lần lợt là bán kính các đờng tròn ngoại tiếp tam giác GBC,GCA,GAB.Chứng minh rằng nếu BC>CA>AB, thì $R_1>R_2>R_3$.

Hớng dẫn . Gọi $S_1$ và $S_2$ lần lợt là diện tích tam giác GBC và GCA , ta có $4R_1S_1$= BC.GB.GC và $4R_2S_2$ =AC.GA.GC.Ta biết rằng nếu BC >CA, thì GB >GA và GB.BC > GA.AC .Từ đó ta có $R_1S_1> R_2S_2 \Rightarrow R_1 > R_2$ ($S_1 = S_2 = \frac{S}{3}$, S là diện tích tam giác ABC).

**Bài 7.**

Cho đờng elíp (E) có độ dài hai bán trục là a,b.Xét tam giác ABC nội tiếp (E) (Các đỉnh tam giác nằm trên đờng cong (E)).Chứng minh rằng diện S của tam giác ABC thoã mãn bất đẳng thức $S \le \frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

**Hớng dẫn :** Ta xét (E) trong hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy có phơng trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.Trong mặt phẳng ta thực hiện phép biến đổi F : M(x;y) → M'(x;$\frac{a}{b}y$) , khi đó (E) biến thành đờng tròn (C) :$x^2+y^2=a^2$, tam giác ABC có diện tích S biến thành tam giác A'B'C' có diện tích S' thoã mãn điều kiện S' $=\frac{a}{b}S$ .Ta biết rằng S'$\le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$,do đó $\frac{a}{b}S \le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S \le \frac{3ab\sqrt{3}}{4}$

**Bài 8.**

Cho đờng elíp (E) có độ dài hai bán trục là a,b.Xét tam giác ABC ngoại tiếp (E) (Các cạnh tam giác tiếp xúc với đờng cong (E)).Chứng minh rằng diện S của tam giác ABC thoã mãn bất đẳng thức $S \ge 3ab\sqrt{3}$.

**Hớng dẫn :** Ta xét (E) trong hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy có phơng trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.Trong mặt phẳng ta thực hiện phép biến đổi F : M(x;y) → M'(x;$\frac{a}{b}y$) , khi đó (E) biến thành đờng tròn (C) :$x^2+y^2=a^2$, tam giác ABC có diện tích S biến thành tam giác A'B'C' có diện tích S' thoã mãn điều kiện S' $=\frac{a}{b}S$ .Ta biết rằng S' $\ge 3a^2\sqrt{3}$ ,do đó $\frac{a}{b}S \ge 3a^2\sqrt{3} \Rightarrow S \ge 3ab\sqrt{3}$ .

NGUYÊN LÝ DIRICHLET VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

(Vũ Đình Hòa)

Nguyên lí Dirichlet, được phát biểu đầu tiên bởi nhà toán học Pháp P. L. Dirichlet (1805-1859) như sau: " *Nếu nhốt $n+1$ chú thỏ vào $n$ cái chuồng thì bao giờ cũng có 2 con thỏ bị nhốt vào cùng một chuồng*". Cũng tương tự như vậy, nguyên lí Dirichlet mở rộng được phát biểu như sau: " *Nếu nhốt $n$ con thỏ vào $m \geq 2$ chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ con thỏ* ", ở đây $\lceil a \rceil$ được dùng để kí hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn số thực $a$ cho trước. Bạn đọc có thể tham khảo thêm về nguyên lý Dirichlet trong [3].

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lí Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, như chúng ta thấy trong ví dụ sau:

**Ví dụ 1.** *Chứng minh rằng một đường thẳng chỉ có thể cắt nhiều lắm hai cạnh của một tam giác ở phần trong của các cạnh này.*

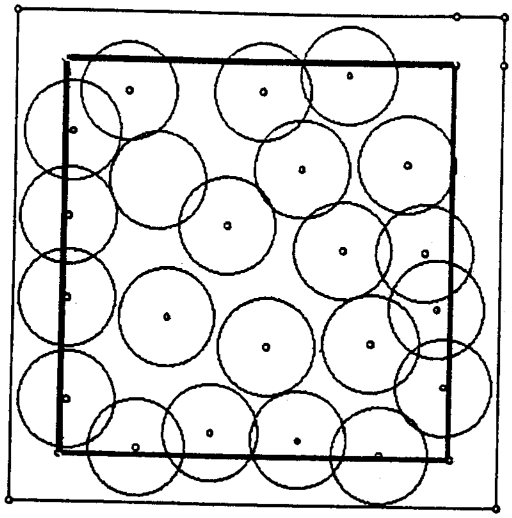
***Chứng minh.*** Một đường thẳng $d$ bất kỳ luôn chia mặt phẳng ra làm hai miền, cho nên theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại một miền chứa ít nhất hai đỉnh, không mất tổng quát là đỉnh $A$ và đỉnh $B$. Khi đó cạnh $AB$ nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng này và không thể cắt $d$ được. □

Nguyên lí Dirichlet khi sử dụng kết hợp với các độ đo của hình phẳng (độ dài đoạn thẳng, diện tích, thể tích) được phát biểu như sau:*Nếu có hai hình có độ đo (nếu trên đường thẳng thì hiểu là độ dài đoạn thẳng, trên mặt phẳng là diện tích và trong không gian là số đo thể tích) $S_1$ và $S_2$ được phủ trong một hình có độ đo $S < S_1 + S_2$ thì chúng phải có điểm chung trong.* Nguyên tắc này được phát biểu mở rộng cho nhiều hình:*Nếu có một hình độ đo $S$ phủ một số hình có tổng độ đo $> S$ thì trong những hình này luôn có ít nhất hai hình có điểm chung trong.*

**Ví dụ 2.** *Trong một cái bánh hình vuông cạnh 18 cm có 128 hạt vừng. Chứng minh rằng tồn tại hai hạt vừng có khoảng cách tới nhau nhỏ hơn 2 cm.*

***Chứng minh.*** Lấy mỗi hạt vừng làm tâm dựng hình tròn bán kính 1cm. Các hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông có cạnh 20 cm thu được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến bốn cạnh của nó một khoảng 1 cm ra phía ngoài.

Tổng diện tích của các hình tròn bán kính 1 cm này là $128 \cdot \pi > 402.112 > 400$.



*Hình* 1: Hình vuông chứa các hạt vừng.

Do tổng diện tích các hình tròn này lớn hơn diện tích hình vuông cạnh 20 cm, cho nên phải có hai hình tròn có điểm giao chung và khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2 cm. □

Ngược lại với nguyên lý Dirichlet, nhưng có hình thức phát biểu gần giống với nó là nguyên lý sau : "*Nếu một hình có độ đo S chứa một số hữu hạn các hình có tổng độ đo nhỏ hơn S, thì có một điểm của hình đã cho không nằm trong các hình mà nó chứa*". Cũng như nguyên lý Dirichlet, nguyên lý này tuy được phát biểu đơn giản, nhưng cũng có những ứng dụng khá sâu sắc trong toán học.

**Ví dụ 3.** *Trong một tờ giấy hình vuông bằng giấy có cạnh bằng 12cm có 31 lỗ kim châm. Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn bán kính 1cm mà không chứa một lỗ kim châm nào cả.*

***Chứng minh.*** Lấy mỗi lỗ kim là tâm dựng một hình tròn bán kính 1 cm. Tổng diện tích của 31 hình tròn này sẽ là $31\pi <$ diện tích của hình vuông cạnh 10cm. Do đó phải có một điểm $M$ trong hình vuông cạnh 10cm (là hình vuông thu được từ hình vuông cạnh 12cm đã cho bằng cách thu hẹp các chiều 1cm) và không nằm trong 31 hình tròn bán kính 1cm được dựng như cách trên đã trình bày. Lấy điểm $M$ làm tâm ta cắt mộ hình tròn bán kính 1cm, thì hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông đã cho có cạnh dài 12cm và không chứa một lỗ kim châm nào cả. □

Sau đây là một số bài tập luyện cho học sinh, lời giải của chúng có thể tìm thấy trong [5].

## BÀI TẬP

▷ **1.** Bẩy hình tròn có diện tích là 1 nằm trong một hình vuông có độ dài cạnh là 2. Chứng minh rằng ít nhất có hai hình tròn cắt nhau với diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{7}$.

▷ **2.** Trong một cái hộp hình vuông cạnh 10cm đựng một sợi chỉ dài 100cm tạo thành một đường gấp khúc không tự cắt. Chứng minh rằng có thể bằng một cái kéo cắt một nhát song song với một cạnh của hình vuông chia sợi chỉ làm ít nhất 6 đoạn.

▷ **3.** Trong một khu rừng hình vuông cạnh 10 km có một dòng suối chảy. Biết từ mỗi điểm trong khu rừng ta có thể tới dòng suối sau một đoạn đường đi bộ không dài quá 0,5 km. Hãy chứng minh rằng đoạn suối chảy trong khu rừng có độ dài lớn hơn 99km.

▷ **4.*** Trong một khu rừng hình vuông cạnh 10 km có một dòng suối chảy. Biết từ mỗi điểm trong khu rừng ta có thể tới dòng suối sau một đoạn đường đi bộ không dài quá 0,5 km. Hãy chứng minh rằng tồn tại hai điểm trên dòng suối có khoảng cách tính theo đường chim bay không vượt quá 1 km, nhưng nếu đi dọc theo dòng suối, thì phải đi bộ một đoạn đường không nhỏ hơn 18 km mới từ điểm này tới được điểm kia.

▷ **5.** Trên mặt một cái bánh cốm hình vuông cạnh 7 cm có 51 hạt vừng. Chứng minh rằng có thể vẽ một đường tròn màu đỏ bán kính 1 cm trên mặt cái bánh cốm chứa ít nhất 3 hạt vừng ở bên trong.

▷ **6.** Bên trong hình tròn bán kính 1 có tám điểm. Chứng minh rằng khoảng cách giữa 2 điểm nào đó trong số đó nhỏ hơn 1.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Vũ Đình Hòa *Một số kiến thức cơ sở về hình học tổ hợp*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 2000.

[2] Vũ Đình Hòa *Định lí và vấn đề về đồ thị hữu hạn*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 2001.

[3] Vũ Đình Hòa, *Một số kiến thức cơ sở về Graph hữu hạn*, Nhà xuất bản Giáo dục, Đà nẵng 2002.

[4] Vũ Đình Hòa, *Lý thuyết tổ hợp và bài tập ứng dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà nội 2002.

[5] Vũ Đình Hòa, *Bất đẳng thức hình học*, Nhà xuất bản Giáo dục, Đà nẵng 2003.