

DẠNG 7**Bài toán liên quan đến đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và phương trình hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) , (Q) phân biệt cùng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M và N . Đường thẳng MN có một vector chỉ phương là

- A. $(3; 2; -1)$. B. $(2; 0; -1)$. C. $(1; -2; -1)$. D. $(3; 2; 1)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $A(5; -1; -4)$. Xét mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính bằng 2. Biết rằng mọi điểm M thuộc (C) thì AM là tiếp tuyến của (S) , khi đó $a + b + c$ bằng

- A. 3. B. -3. C. $-\frac{20}{9}$. D. $\frac{20}{9}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - 3z + 1 = 0, (Q): x - y + z + 1 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d .

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + y + z = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) , cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

- A. $d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -5t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -5 \\ z = -7 - 3t \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$.

- Câu 6:** Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{3}$ và hai điểm $A(3;4;5), B(-4;0;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c) \in d$, bán kính R và (S) đi qua hai điểm A, B . Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 + R$ bằng
A. 50. **B.** 30. **C.** 25. **D.** 36.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ là
A. 10. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 21.
- Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại T và T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .
A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. **B.** $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.
- Câu 9:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-2), B(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc d và (S) đi qua hai điểm A, B . Giả sử $I(a;b;c)$. Tính $a^2 + b^2 - c$.
A. 7. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 9.
- Câu 10:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-2), B(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc d và (S) đi qua hai điểm A, B . Giả sử $I(a;b;c)$ tính $a^2 + b^2 - c$.
A. 7. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 9.
- Câu 11:** Trong không gian tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và hai điểm $A(3;2;-1), B(1;1;2)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng Δ và đi qua hai điểm A, B . Biết $I(a;b;c)$, tính $T = a^2 - b + c$.
A. $T = 27$. **B.** $T = 23$. **C.** $T = 49$. **D.** $T = 25$.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(Q): 2x + y - z = 0$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là:
A. $-x + 2y - 1 = 0$. **B.** $x + 2y + z = 0$. **C.** $x - 2y - 1 = 0$. **D.** $x - y + z = 0$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) . Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc d' ?

- A. $H(-5; 9; 3)$. B. $K(-10; 16; 5)$. C. $M(0; 2; 1)$. D. $N(1; 2; 0)$.

Câu 14: Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ và $A(1; 0; 0)$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 tại M và N . Tính $S = AM^2 + AN^2$.

- A. $S = 25$. B. $S = 20$. C. $S = 30$. D. $S = 33$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là

- A. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$. B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+2}{-1}$.
C. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 13 = 0$. $M(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm di động trên (P) . Ba điểm phân biệt A, B, C thuộc (S) sao cho MA, MB, MC là các tiếp tuyến của (S) . Tính tổng $T = x_0 + y_0 + z_0$ khi $d(I, (ABC))$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $T = \frac{13}{3}$. B. $T = -\frac{13}{3}$. C. $T = 13$. D. $T = -13$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Phương trình của mặt cầu (S) là

- A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36$. B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.
C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64$. D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 49$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $mp(P): x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3; 2; 4), B(5; 3; 7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt $mp(P)$ theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1) . Bán kính của (C_1) là

- A. 12. B. $2\sqrt{14}$. C. 6. D. $\sqrt{14}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2z - 6 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{Viết phương trình đường thẳng } \Delta \text{ nằm trong mặt phẳng } (\alpha) \text{ cắt đồng thời vuông}$$

góc với d .

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{1}$.

Câu 20: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $Q: x + 2y - z + 3 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}. \text{Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng } Q \text{ đồng thời vuông góc}$$

và cắt đường thẳng d . Phương trình của đường thẳng Δ là:

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2;0;1); B(2;-2;1); C(4;2;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đường thẳng d đi qua $M(a;b;-1)$, tổng $a+b$ bằng

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36$.

B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64$.

D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 49$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều A và B . Viết phương trình đường thẳng Δ lần lượt cắt đường thẳng d và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 61$ tại M, N sao cho $K(1;2;3)$ là trung điểm của MN , biết hoành độ của điểm N âm.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 6t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - 4t \\ z = 3t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \end{array}$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 2 = 0$; $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng có phương trình

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 5t \\ z = -5t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -5t \\ z = 1 - 5t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \end{array}$$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm là $I(1;1;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27 & \text{B. } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27 \\ \text{C. } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 7 & \text{D. } (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27 \end{array}$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $E(2;2;1), F\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right), O(0;0;0)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB . Biết $A(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } -4. & \text{B. } -6. & \text{C. } 4. & \text{D. } 6. \end{array}$$

Câu 28: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$, $(S_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) . Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) . Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } T = 1. & \text{B. } T = -1. & \text{C. } T = \frac{7}{3}. & \text{D. } T = -\frac{7}{3}. \end{array}$$

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Gọi (T) là khối trụ nội tiếp trong mặt cầu (S) và có một đáy là đường tròn (C) . Khi (T) có thể tích lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) là $ax + by + cz + d = 0$, với $b \in \mathbb{N}^*, b \leq 10$. Tính $a + b + c + d$.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 8. & \text{B. } 7. & \text{C. } 4. & \text{D. } 6. \end{array}$$

Câu 30: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.
 B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.
 D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 31: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm

$M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho

MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Khi đó z_0 gần nhất với số nào trong các số sau:

- A. 3. B. -1. C. 2. D. 5.

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a; -2; 2+3a)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; 1; a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m; n; p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Một khối nón (N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S) . Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là $\max V_{(N)} = \frac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m + n + p + q$ bằng

- A. 250. B. 256. C. 252. D. 225.

Câu 33: Với $m + n + p + q = 6 + 0 + (-6) + 250 = 250$. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng

$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 4 = 0$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M, N là tiếp điểm. $H(a; b; c)$ là trung điểm của MN . Khi đó tích abc bằng

- A. $\frac{8}{27}$. B. $\frac{16}{27}$. C. $\frac{32}{27}$. D. $\frac{64}{27}$.

Câu 34: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của α để tồn tại một mặt phẳng (Q) chứa d tạo với (P) một góc α° .

- A. 75. B. 76. C. 77. D. 74.

Câu 35: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;1;5)$, $B(6;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc (P) . Bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{35}$.B. $\sqrt{33}$.

C. 6.

D. 5.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 36 = 0$ và điểm $N(3;3;3)$. Từ một điểm M thay đổi trên (P) , kẻ các tiếp tuyến phân biệt MA, MB, MC đến (S) (A, B, C là các tiếp điểm). Khi khoảng cách từ N đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + 2y + bz + c = 0$. Tính giá trị $a + b + c$ bằng

A. 6.

B. 0.

C. -2.

D. -4.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$; $d_3: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 17 = 0$ (Với a, b là các số nguyên, $a > 0$) đi qua $M(-2;3;-4)$ và cắt ba đường thẳng trên lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC đều. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $(-3;1;-1)$.B. $(-3;1;1)$.C. $(-3;0;1)$.D. $(-3;-1;1)$.

Câu 39: Vậy đáp án là A. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-8)^2 = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Gọi $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng tùy ý tiếp xúc với (S) lần lượt tại các tiếp điểm A, B ; góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° . Đường thẳng đi qua A song song với d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm M , đường thẳng đi qua B song song với d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm N . Giá trị lớn nhất của tổng $AM + BN$ bằng

A. $24 + 2\sqrt{2}$.B. $24 - 3\sqrt{2}$.C. $26 + 3\sqrt{2}$.D. $26 - 3\sqrt{2}$.

Câu 40: Khi đó: $AM + BN = 2(1K + 1K') = 2(1K + 1I') = 2(12 + \sqrt{2}) = 24 + 2\sqrt{2}$. Trong không gian hệ

trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - m^2 + m^2t \\ y = 3 + n^2 - n^2t \\ z = mn\sqrt{2} - \sqrt{2}mnt \end{cases}$, trong đó m và n là những tham

số thực. Biết rằng tồn tại mặt cầu cố định (S) có tâm $I(4;b;c)$ và tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính mặt cầu (S) bằng:

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 41: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -m^2 + m^2t \\ z = 2m - 2mt \end{cases} \text{ trong đó } m \text{ là tham số thực. Biết rằng tồn tại mặt cầu cố định } (S)$$

có tâm $I(a; b; c)$ đi qua $B(2; 1; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng d . Biết bán kính R của mặt cầu (S) lớn hơn 1. Bán kính R bằng

- A. 2. B. 3. C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 42: Với $a = 4$, $R = IB = 3$ (nhận). Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$. Một đường thẳng d đi qua $A(2; 0; 1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc bằng 60° . Gọi $M = d \cap (P)$. Giá trị lớn nhất của hoành độ của điểm M bằng

- A. $8 + 2\sqrt{2}$. B. $-1 + 4\sqrt{3}$. C. $3 + \sqrt{2}$. D. $3 + 2\sqrt{6}$.

Câu 43: Dấu “=” xảy ra khi $y = \frac{4 - \sqrt{6}}{2}; z = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$. Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2}$, điểm $A(1; 2; 0)$. Gọi N là điểm di động chạy trên đường thẳng d và M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng NA luôn bằng 6. Quỹ tích điểm M là một đường cong (ω) có diện tích bằng

- A. $\frac{108\pi\sqrt{3}}{5}$. B. $36\pi\sqrt{6}$. C. $\frac{100\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{71\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 1; 1)$. Từ A kẻ tiếp tuyến AM với mặt cầu (S) (M là tiếp điểm) sao cho góc giữa đường thẳng AM và đường thẳng d là nhỏ nhất. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ với $x_0 > 1$, tính giá trị biểu thức $x_0 + 2y_0 + 3z_0$.

- A. $\frac{2\sqrt{3}+6}{15}$. B. $\frac{2\sqrt{5}+6}{15}$. C. $\frac{2\sqrt{3}-6}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{5}-6}{15}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Gọi (T) là khối trụ nội tiếp trong mặt cầu (S) và có một đáy là đường tròn (C) . Khi (T) có thể tích lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) là $ax + by + cz + d = 0$, với $b \in \mathbb{N}^*$, $b \leq 10$. Tính $a + b + c + d$.

- A. 8. B. 7. C. 4. D. 6.

Câu 46: Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+4}{6} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{-1}$. Từ điểm $M \in \Delta$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và gọi (C) là tập hợp các tiếp điểm. Biết khi

diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) đạt giá trị nhỏ nhất thì (C) thuộc mặt phẳng $x+by+cz+d=0$. Tìm $b+c+d$?

- A. 4. B. -2. C. 2. D. -4.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A. $H(-2;-1;3)$. B. $I(-1;-2;3)$. C. $K(3;0;15)$. D. $J(-3;2;7)$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases} \text{ . Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng thuộc mặt cầu } (S) \text{ sao cho } MA, MB,$$

MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Khi đó z_0 gần nhất với số nào trong các số sau?

- A. 3. B. -1. C. 2. D. 5.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases} \text{ . Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho } MA, MB, MC \text{ là}$$

tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- A. 30. B. 20. C. 21. D. 26.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(-1;3;-2)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{2} \text{ . Mặt cầu } (S) \text{ qua hai điểm } A, B \text{ và tiếp xúc với đường thẳng } d \text{ có}$$

bán kính nhỏ nhất thì hoành độ tâm mặt cầu khi đó bằng

- A. 3. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ và đường thẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases} \text{ , với } m \text{ là tham số. Hai mặt phẳng } (P), (Q) \text{ cùng chứa } \Delta \text{ và tiếp xúc với}$$

mặt cầu (S) tại M, N . Khi độ dài đoạn MN ngắn nhất thì $m = \frac{a}{b}$, ($\frac{a}{b}$ phân số tối giản). Tính

$$a^3 + b^3.$$

- A. 35. B. 126. C. 133. D. 152.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt cầu có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và $(x+4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 16$. Gọi M là điểm di động ở ngoài ba mặt cầu và X, Y, Z là các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ M đến ba mặt cầu sao cho $MX = MY = MZ$. Khi đó tập hợp các điểm M là đường thẳng d cố định. Hỏi d vuông góc với mặt phẳng nào?

- A. $(P_3): x + 2y + 4z = 2020$.
 B. $(P_4): x + 2y + 6z = 2020$.
 C. $(P_2): 3x + 2y + 4z = 2020$.
 D. $(P_1): 5x + 2y + 4z = 2020$.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $C(-1; 2; 11), H(-1; 2; -1)$, hình nón (N) có đường cao $CH = h$ và bán kính đáy là $R = 3\sqrt{2}$. Gọi M là điểm trên đoạn CH , (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục CH tại M của hình nón (N) . Gọi (N') là khối nón có đỉnh H đáy là (C) . Khi thể tích khối nón (N') lớn nhất thì mặt cầu ngoại tiếp nón (N') có tọa độ tâm $I(a; b; c)$, bán kính là d . Giá trị $a + b + c + d$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -6.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; -3)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$. Mặt phẳng (α) thay đổi, luôn đi qua A và song song với Δ . Trong trường hợp (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì (α) có phương trình $ax + by + cz - 3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = 3a - 2b - 2c$.

- A. 12. B. 9. C. 4. D. $\frac{9}{5}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và phương trình hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M = d \cap d_1$, $N = d \cap d_2$.

Khi đó $M(1+2t; t; -1-2t)$, $N(2+s; 2s; -1-s)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (s-2t+1; 2s-t; -s+2t).$$

Từ hình vẽ có $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$

Suy ra:

$$\frac{s-2t+1}{2} = \frac{2s-t}{2} = \frac{-s+2t}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} s-2t+1=2s-t \\ -2s+t=-2s+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1; 0; -1) \\ N(3; 2; -2) \end{cases}.$$

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $N(3; 2; -2)$ và một có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$ là

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

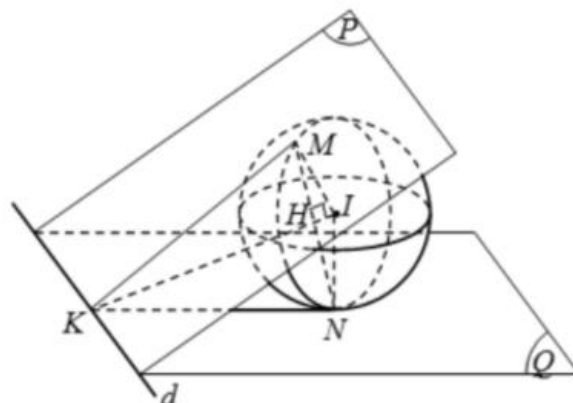
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) , (Q) phân biệt cùng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M và N . Đường thẳng MN có một vector chỉ phương là

A. $(3; 2; -1)$. B. $(2; 0; -1)$. C. $(1; -2; -1)$. D. $(3; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và $R = \sqrt{2}$. Gọi $K = (IMN) \cap d$ như hình vẽ



Ta có $IM \perp (P)$ suy ra $IM \perp d$ (1). Mặt khác ta có $IN \perp (Q)$ suy ra $IN \perp d$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $d \perp (IMN)$.

Từ đó suy ra K là hình chiếu vuông góc của I lên d . Ta có $K(2;0;0)$.

Ta cũng có $\begin{cases} d \perp MN \\ IK \perp MN \end{cases}$ suy ra $\vec{u}_{MN} = [\vec{u}_d; \vec{IK}] = (9; 6; -3) = 3\vec{v}$, với $\vec{v}(3; 2; -1)$.

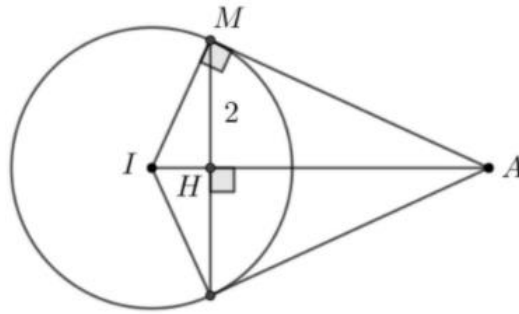
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $A(5; -1; -4)$. Xét mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính bằng 2. Biết rằng mọi điểm M thuộc (C) thì AM là tiếp tuyến của (S) , khi đó $a + b + c$ bằng

- A. 3. B. -3. C. $-\frac{20}{9}$. D. $\frac{20}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Vì mọi điểm M thuộc (C) thì AM là tiếp tuyến của (S) nên $IA \perp (P)$ tại điểm $H(1; 1; 0)$ là hình chiếu của A trên (P) và là tâm của đường tròn (C) .



Tam giác vuông IMA có:

$$HI \cdot HA = HM^2 \Leftrightarrow HI \cdot 6 = 2^2 \Leftrightarrow HI = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{HI} = \frac{\frac{2}{3}}{6} \overline{AH} = \frac{1}{9} \overline{AH} \Rightarrow I\left(\frac{5}{9}; \frac{11}{9}; \frac{4}{9}\right)$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{5}{9} + \frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - 3z + 1 = 0, (Q): x - y + z + 1 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d .

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } d = (P) \cap (Q) \Rightarrow d: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + z \\ y = x + z + 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } z = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + y + z = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) , cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -5t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -5 \\ z = -7 - 3t \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Vector chỉ phương của $\Delta: \vec{u} = (1; -2; 2)$, vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (3; 1; 1)$.

$$\forall \begin{cases} d \perp (\alpha) \\ d \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}; \vec{n}] = (-4; 5; 7).$$

Tọa độ giao điểm $H = \Delta \cap (\alpha)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2} \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1; 0; -3)$

Vậy đường thẳng d đi qua $H(1; 0; -3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (-4; 5; 7) = -(4; -5; -7)$ nên có phương trình

$$d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -5t \\ z = -3 - 7t \end{cases}.$$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{3}$ và hai điểm $A(3; 4; 5), B(-4; 0; 2)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c) \in d$, bán kính R và (S) đi qua hai điểm A, B . Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 + R$ bằng

A. 50.

B. 30.

C. 25.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I \in d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{3} \Rightarrow I(t; 2t; 3t+5)$.

Theo bài ra (S) đi qua hai điểm A, B nên

$$IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2 + (2t-4)^2 + (3t)^2 = (t+4)^2 + (2t)^2 + (3t+3)^2$$

$$\Leftrightarrow -22t + 25 = 26t + 25$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow I(0; 0; 5)$$

$$\Rightarrow R^2 = (t-3)^2 + (2t-4)^2 + (3t)^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$\text{Khi đó } a^2 + b^2 + c^2 + R = 25 + 5 = 30.$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ là

A. 10. B. 3. C. 5. D. 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I(1; 2; 3)$, $R = 4$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) . Khi đó, phương trình tham số

$$\text{của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Do $I \in (P) \Rightarrow d(M, (P)) \leq 4$. Do đó $d(M, (P)) = 4 \Leftrightarrow M = \Delta \cap (S)$.

Gọi $M(1 + 2t; 2 - t; 3 + 2t)$.

$$d(M, (P)) = 4 \Leftrightarrow \frac{|2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(3 + 2t) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Leftrightarrow t = \pm \frac{4}{3}$$

$$\text{Với } t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right).$$

$$\text{Với } t = -\frac{4}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Do $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$ nên $M\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right)$.

Vậy $B = x_M + y_M + z_M = 10$.

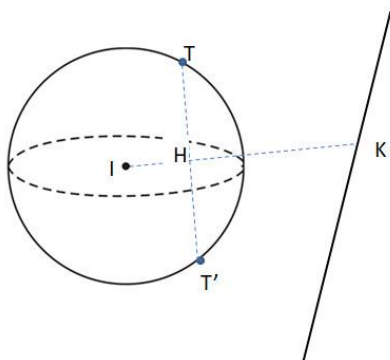
Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại T và T' .

Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. B. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1 \Rightarrow I(1;0;-1); R=1. d(I;d) = \sqrt{6} > R.$

Gọi K là hình chiếu của lên $d \Rightarrow K(t;t+2;-t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1;t+2;-t+1).$

Vì $\overrightarrow{IK} \perp \vec{u}_d \Rightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow t-1+t+2+t-1=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow K(0;2;0).$

Ta có:

$$\frac{IH}{IK} = \frac{IH \cdot IK}{IK^2} = \frac{R^2}{IK^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK} \Rightarrow (x_H - 1; y_H; z_H + 1) = \frac{1}{6}(-1; 2; 1) \Rightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-2)$, $B(3;-1;0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc d và (S) đi qua hai điểm A, B . Giả

sử $I(a;b;c)$. Tính $a^2 + b^2 - c$.

A. 7.

B. 3.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

♦ Mặt cầu (S) có tâm $I \in d$, suy ra tọa độ $I(-1+t;t;1-t)$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{IA} = (2-t;1-t;-3+t) \Rightarrow IA = \sqrt{(2-t)^2 + (1-t)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{3t^2 - 12t + 14};$

$\overrightarrow{IB} = (4-t;-1-t;t-1) \Rightarrow IB = \sqrt{(4-t)^2 + (1+t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{3t^2 - 8t + 18}.$

♦ Do mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên

$$IA = IB \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 14 = 3t^2 - 8t + 18 \Leftrightarrow 4t = -4 \Leftrightarrow t = -1.$$

Khi đó tọa độ I là $I(-2;-1;2)$. Suy ra $a = -2, b = -1, c = 2$.

Vậy ta có $a^2 + b^2 - c = (-2)^2 + (-1)^2 - 2 = 3$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-2), B(3;-1;0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc d và (S) đi qua hai điểm A, B . Giả

sử $I(a;b;c)$ tính $a^2 + b^2 - c$.

A. 7.

B. 3.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I \in d \Rightarrow I(-1+t;t;1-t)$

$\overrightarrow{IA}(2-t;1-t;-3+t); \overrightarrow{IB}(4-t;-1-t;-1+t)$

(S) là mặt cầu tâm I và (S) đi qua hai điểm A, B nên $|\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB}|$

$$|\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB}| \Leftrightarrow (2-t)^2 + (1-t)^2 + (-3+t)^2 = (4-t)^2 + (-1-t)^2 + (-1+t)^2$$

$$\Leftrightarrow 14 - 12t = 18 - 8t \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-2;-1;2)$$

Khi đó $a^2 + b^2 - c = (-2)^2 + (-1)^2 - 2 = 3$.

- Câu 11:** Trong không gian tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và hai điểm $A(3;2;-1), B(1;1;2)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng Δ và đi qua hai điểm A, B . Biết $I(a;b;c)$, tính $T = a^2 - b + c$.
- A. $T = 27$. B. $T = 23$. C. $T = 49$. D. $T = 25$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Do tâm I thuộc đường thẳng Δ nên I có tọa độ là $I(1+2t; 2+t; -1+2t)$.

Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A và B nên ta có $AI = BI$ hay

$$\sqrt{(2t-2)^2 + t^2 + (2t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} \Leftrightarrow 9t^2 - 8t + 4 = 9t^2 - 10t + 10 \Leftrightarrow t = 3.$$

Khi đó $I(7;5;5)$. Có $a=7, b=5, c=5$ nên $T = a^2 - b + c = 7^2 - 5 + 5 = 49$.

- Câu 12:** Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(Q): 2x + y - z = 0$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là:
- A. $-x + 2y - 1 = 0$. B. $x + 2y + z = 0$. C. $x - 2y - 1 = 0$. D. $x - y + z = 0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}(2;1;3)$, đi qua điểm $M(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (Q) có vtpt $\vec{n}_Q(2;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm đi qua $M(1;0;-1)$ và có một vtpt là:

$$\vec{n}_P = [\vec{u}, \vec{n}_Q] = (-4; 8; 0) = -4(1; -2; 0).$$

Phương trình tổng quát mặt phẳng (P) :

$$(x-1) - 2y = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0.$$

- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) . Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc d' ?
- A. $H(-5;9;3)$. B. $K(-10;16;5)$. C. $M(0;2;1)$. D. $N(1;2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua điểm $I(4;-2;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) là mặt phẳng đi qua I và nhận véc-tơ $\vec{n} = [\vec{n}_p, \vec{u}] = (3; 1; 4)$, phương trình (Q) là $3(x-4) + (y+2) + 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 4z - 6 = 0$.

Hình chiếu d' của d lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q) , do đó tọa độ các điểm thuộc d'

$$\text{thỏa mãn hệ phương trình } \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

Thay tọa độ các điểm trong các đáp án, suy ra điểm $N(1; 2; 0)$ không thuộc d' .

Câu 14: Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ và $A(1; 0; 0)$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 tại M và N . Tính $S = AM^2 + AN^2$.

A. $S = 25$.

B. $S = 20$.

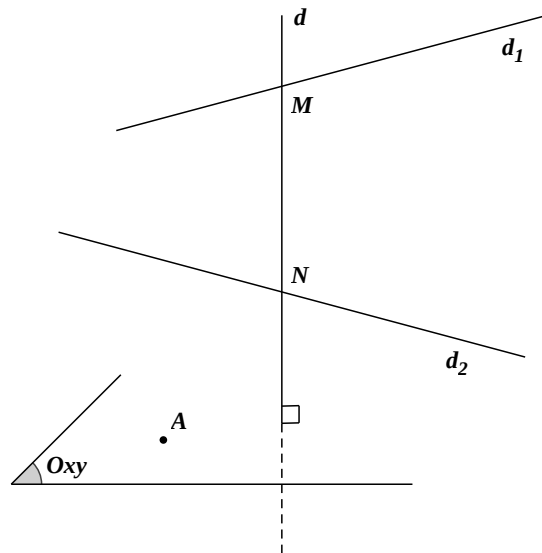
C. $S = 30$.

D. $S = 33$.

GVSB: Nguyễn Trung; GVPB: Le Van Do

Lời giải

Chọn D



♦ Viết d_1 và d_2 thành PTTS: $d_1: \begin{cases} x = 3t_1 - 5 \\ y = t_1 \\ z = -2t_1 - 1 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = t_2 \\ y = 2t_2 \\ z = t_2 - 1 \end{cases}$.

♦ Ta suy ra được tọa độ điểm M và N là: $M(3t_1 - 5; t_1; -2t_1 - 1)$; $N(t_2; 2t_2; t_2 - 1)$.

♦ Vì $d \perp (Oxy) \Rightarrow \vec{u} = k\vec{n}$ ($k \neq 0$). Ta có: $\overrightarrow{MN} = (t_2 - 3t_1 + 5; 2t_2 - t_1; t_2 + 2t_1)$ và $\vec{n} = (0; 0; 1)$

♦ Ta có hệ: $\begin{cases} k(t_2 - 3t_1 + 5) = 0 \\ k(2t_2 - t_1) = 0 \\ k(t_2 + 2t_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \\ k = \frac{1}{5} \end{cases}$. Suy ra $M(1; 2; -5)$, $N(1; 2; 0)$.

♦ Vậy $S = 33$.

Câu 15: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+2}{-1}$.

C. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+3}{1}$.

Lời giải

Chọn A

VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$

VTCP của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (1; -1; -2)$

VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{a} = [\vec{n}; \vec{u}] = (4; 6; -1)$

Gọi A là giao điểm của d và $\Delta \Rightarrow A$ là giao điểm của d và (P)

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - 2t \\ 2x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 1; 2)$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 16: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 13 = 0$. $M(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm di động trên (P) . Ba điểm phân biệt A, B, C thuộc (S) sao cho MA, MB, MC là các tiếp tuyến của (S) . Tính tổng $T = x_0 + y_0 + z_0$ khi $d(I, (ABC))$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = \frac{13}{3}$.

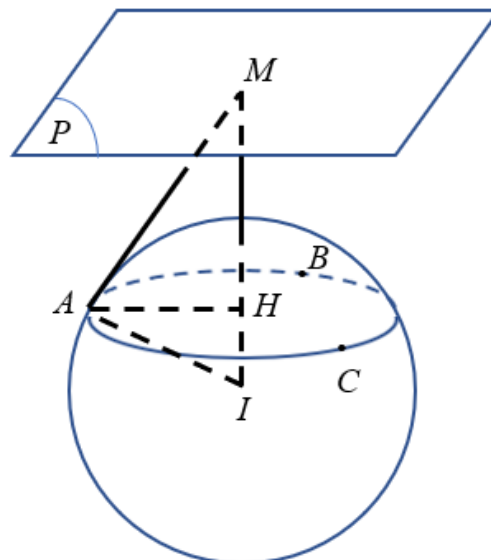
B. $T = -\frac{13}{3}$.

C. $T = 13$.

D. $T = -13$.

Lời giải

Chọn A



Vì $d(I, (P)) = \frac{|1-2+2-13|}{\sqrt{1+4+4}} = 4 > R$ nên điểm M luôn nằm ngoài mặt cầu (S) . Do đó qua điểm M luôn kẻ được các tiếp tuyến với mặt cầu (S) .

Gọi H là giao điểm của đường thẳng IM và mặt phẳng (ABC) , ta có $AH \perp IM$. Xét tam giác MAI vuông tại A ta có $IH \cdot IM = IA^2 = 12 \Rightarrow d(I, (ABC)) = IH = \frac{12}{IM}$.

Do đó $d(I, (ABC))$ lớn nhất khi IM nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) . Đường thẳng IM đi qua I và nhận vectơ pháp tuyến của (P) làm vectơ chỉ phương. Phương

$$\text{trình đường thẳng } IM \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Vì } M \in (P) \text{ nên } (1+t) - 2(1-2t) + 2(1+2t) - 13 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \text{ hay } M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } T = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} + \frac{11}{3} = \frac{13}{3}.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36.$

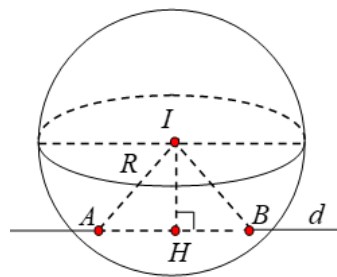
B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25.$

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64.$

D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 49.$

Lời giải

Chọn B



Cách 1

+) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3; 2; 0)$ và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1; 2; 2)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$

+) Gọi $H = d \cap (P)$ khi đó $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$

Mà $H \in (P) \Rightarrow -1+t + 2(-3+2t) + 2(-2+2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 2$

Vậy $H(1; 1; 2)$

+) Khi đó $IH = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2} = 3$

$$\Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{Vậy } (S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25.$$

Cách 2

$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow M(-1; -3; -2) \in d \text{ và } \vec{u} = (1; 2; 2) \text{ là vtcp của } d$$

$$\text{Ta có } \vec{MI} = (4; 5; 2) \Rightarrow [\vec{MI}, \vec{u}] = (6; -6; 3)$$

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của đoạn } AB \Rightarrow IH = d(I, d) = \frac{[\vec{MI}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3$$

$$\Rightarrow \text{Bán kính mặt cầu } (S) \text{ là } R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25.$$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $mp(P): x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3; 2; 4), B(5; 3; 7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt $mp(P)$ theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1) . Bán kính của (C_1) là

A. 12.

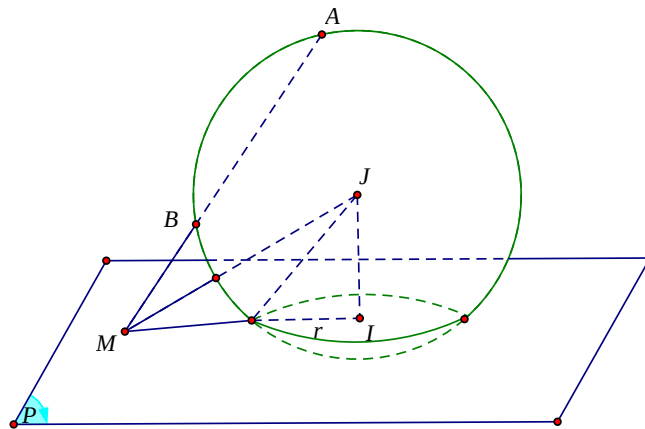
B. $2\sqrt{14}$.

C. 6.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi J là tâm của mặt cầu (S) , bán kính là R .

$$\text{Ta có: } \vec{AB} = (2; 1; 3) \text{ suy ra phương trình đường thẳng } (AB): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Gọi } M = (AB) \cap (P) \Rightarrow M(1; 1; 1)$$

$$\text{Khi đó: } MA = \sqrt{14}, MB = 2\sqrt{14}$$

$$\text{Gọi } I \text{ là tâm đường tròn } (C) = (S) \cap (P)$$

$$\text{Mặt khác: } MA \cdot MB = MJ^2 - R^2 = IJ^2 + MI^2 - (IJ^2 + r^2) = MI^2 - r^2$$

$$\Rightarrow MI^2 = MA \cdot MB + r^2 = 28 + (2\sqrt{2})^2 = 36 \Rightarrow MI = 6$$

Do A, B cố định nên M cố định. Vậy tập hợp I là đường tròn tâm M bán kính $MI = 6$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2z - 6 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{Viết phương trình đường thẳng } \Delta \text{ nằm trong mặt phẳng } (\alpha) \text{ cắt đồng thời vuông}$$

góc với d .

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{1}$. **D.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{1}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } I = d \cap \Delta \Rightarrow I = d \cap (\alpha) \Rightarrow I(2; 4; -2).$$

$$\text{Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng } (\alpha): \vec{n} = (1; 0; -2).$$

$$\text{Véc tơ chỉ phương của đường thẳng } d: \vec{u} = (1; 1; -1).$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ qua } I \text{ và nhận } \vec{a} = [\vec{n}, \vec{u}] = (2; -1; 1) \text{ làm véc tơ chỉ phương.}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}.$$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $Q: x + 2y - z + 3 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}. \text{Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng } Q \text{ đồng thời vuông góc}$$

và cắt đường thẳng d . Phương trình của đường thẳng Δ là:

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_d = 2; -1; 1$. Giả sử A là giao điểm của d và Δ , do $A \in d \Rightarrow A(2+2t; -2-t; 1+t)$ mà $\Delta \subset Q \Rightarrow A \in Q \Rightarrow t=0 \Rightarrow A(2; -2; 1)$.

Mặt phẳng Q có vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = 1; 2; -1$ do Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng Q đồng thời vuông góc đường thẳng d suy $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d; \vec{n}_Q] = -1; 3; 5$ là 1 vector chỉ phương của Δ . Suy ra đáp án đúng **C**.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; 1); B(2; -2; 1); C(4; 2; 3)$. Gọi d là đường thẳng

đi qua tâm I của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

. Đường thẳng d đi qua $M(a; b; -1)$, tổng $a+b$ bằng

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Chọn D

Cách 1

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (2; 2; 2)$. $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 0; 4) = 4(-1; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) : $-1(x-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow -x + z + 1 = 0$.

Gọi $I(m; n; p)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 + n^2 + (p-1)^2 = (m-2)^2 + (n+2)^2 + (p-1)^2 \\ (m-2)^2 + n^2 + (p-1)^2 = (m-4)^2 + (n-2)^2 + (p-3)^2 \\ -m + p + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 4 \\ p = 3 \end{cases} . \text{ Do đó } I(4; -1; 3) . \text{ Phương trình đường thẳng } d : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 \\ z = 3 + t \end{cases} ,$$

$$M(a; b; -1) \in d \Rightarrow 3 + t = -1 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 7 .$$

Cách 2

d là đường thẳng đi qua tâm I của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow d$ là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$M(a; b; -1) \in d \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + 4 = (a-2)^2 + (b+2)^2 + 4 \\ (a-2)^2 + b^2 + 4 = (a-4)^2 + (b-2)^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+1=0 \\ a+b-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=8 \end{cases} \Rightarrow a+b=7 .$$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3; 3; 1)$, $B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

$$\text{A. } \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là $(\alpha): 3x + y - 7 = 0$.

Đường thẳng cần tìm d cách đều hai điểm A, B nên d thuộc mặt phẳng (α) .

Lại có $d \subset (P)$, suy ra $d = (P) \cap (\alpha)$ hay $d : \begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases}$. Chọn $x = t$, ta được

$$\begin{cases} z = 2t \\ y = 7 - 3t \end{cases} .$$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36..$

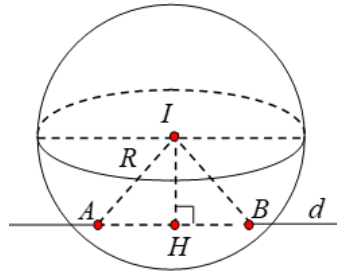
B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25..$

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64..$

D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 49..$

Lời giải

Chọn B



Cách 1

+) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3; 2; 0)$ và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1; 2; 2)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$

+) Gọi $H = d \cap (P)$ khi đó $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$ Mà $H \in (P) \Rightarrow -1+t + 2(-3+2t) + 2(-2+2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 2$

Vậy $H(1; 1; 2)$

+) Khi đó $IH = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Vậy $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25.$

Cách 2

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow M(-1; -3; -2) \in d$ và $\vec{u} = (1; 2; 2)$ là vtcp của d

Ta có $\vec{MI} = (4; 5; 2) \Rightarrow [\vec{MI}, \vec{u}] = (6; -6; 3)$

Gọi H là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow IH = d(I, d) = \frac{[\vec{MI}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3$

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25.$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $A(3; 3; 1), B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều A và B . Viết phương trình

đường thẳng Δ lần lượt cắt đường thẳng d và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 61$ tại M, N sao cho $K(1; 2; 3)$ là trung điểm của MN , biết hoành độ của điểm N âm.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 6t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - 4t \\ z = 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết d nằm trên mặt phẳng trung trực (Q) của AB .

Tọa độ trung điểm của AB là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{BA} = (3; 1; 0)$ là vec tơ pháp tuyến của (Q) .

Phương trình của $(Q): 3x + y - 7 = 0$. Đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) .

Ta có $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_q}] = (1; -3; 2)$, $E(0; 7; 0) \in (P) \cap (Q)$. Phương trình của d là $\begin{cases} x = u \\ y = 7 - 3u \\ z = 2u \end{cases}$.

Từ đó, $M \in d \Rightarrow M(u; 7 - 3u; 2u)$.

Do K là trung điểm của MN nên $\begin{cases} x_N = 2x_K - x_M = 2.1 - u = -u + 2 \\ y_N = 2y_K - y_M = 2.2 - (7 - 3u) = 3u - 3 \\ z_N = 2z_K - z_M = 2.3 - 2u = -2u + 6 \end{cases}$

Ta được $N(-u + 2; 3u - 3; -2u + 6)$ thuộc mặt cầu (S) nên $(-u + 2)^2 + (3u - 3)^2 + (-2u + 6)^2 = 61$

Điều kiện $-u + 2 < 0$, ta được $u = 3$ và $N(-1; 6; 0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $N(-1; 6; 0)$ và nhận $\overrightarrow{NK} = (2; -4; 3)$ làm vector chỉ phương nên có

phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - 4t \\ z = 3t \end{cases}$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 2 = 0$; $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng có phương trình

A. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 5t \\ z = -5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -5t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 2 = 0$ có một vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (1; 2; -1)$.

Mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$ có một vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_q} = (2; -1; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{n_p}$ và $\overrightarrow{n_q}$ là hai vector không cùng phương và $[\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_q}] = (5; -5; -5) = 5(1; -1; -1)$.

Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; -1)$.

Xét hệ: $\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}$ cho $y=1$ ta được $\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+3z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$.

Khi đó ta có một điểm $A(1;1;1)$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Vậy phương trình giao tuyến của hai mặt phẳng cần tìm là $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 26: Trong không gian Oxyz, mặt cầu có tâm là $I(1;1;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$(d): \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình là:

A. $x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 7$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$

Lời giải

Chọn B

Gọi $H(2t; 3t-1; -t+4) \in (d)$ là điểm tiếp xúc của mặt cầu và đường thẳng (d)

Khi đó $\vec{IH} = (2t-1; 3t-2; -t+6)$

Do mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-1}$ có VTCP $\vec{u}(2; 3; -1)$

Nên $\vec{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + 3(3t-2) - (-t+6) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Hay $\vec{IH} = (1; 1; 5) \Rightarrow IH = \sqrt{27}$

Vậy phương trình mặt cầu là

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$

Câu 27: Trong không gian Oxyz, cho tam giác nhọn ABC có $E(2; 2; 1), F\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right), O(0; 0; 0)$ lần

lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB . Biết $A(a; b; c)$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

A. -4.

B. -6.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

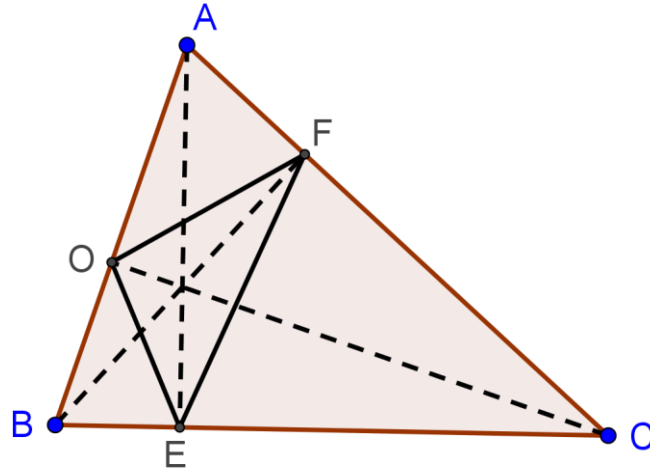
Chọn A

Ta có: $\vec{OE} = (2; 2; 1) \Rightarrow OE = 3$

$\vec{OF} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow OF = 4$

$\vec{FE} = \left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow FE = 5$

$\Rightarrow \triangle FOE$ vuông tại O



* Chọn $\vec{u} = \frac{1}{OE} \cdot \overrightarrow{EO} + \frac{1}{EF} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{8}{5}; -\frac{4}{5}; 0 \right) = -\frac{4}{5}(2; 1; 0)$ là một vtcp của đường cao d xuất phát từ đỉnh A

Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và $A(2 + 2t; 2 + t; 1) \in d$

* Gọi (Q) đi qua O và vuông góc với d . Phương trình của (Q) : $2x + 2y = 0$

* Ta có $\angle FOA = 45^\circ \Rightarrow \cos(\angle OA, FO) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\left| -\frac{8}{3} \cdot (2 + 2t) + \frac{4}{3} \cdot (2 + t) + \frac{8}{3} \right|}{4 \cdot \sqrt{(2 + 2t)^2 + (2 + t)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|-16 - 16t + 8 + 4t + 8|}{2\sqrt{5t^2 + 12t + 9}} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |2t| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5t^2 + 12t + 9} \Leftrightarrow 2t^2 = 5t^2 + 12t + 9$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow A(0; 1; 1) \\ t = -3 \Rightarrow A(-4; -1; 1) \end{cases}$$

Trong đó: $A(-4; -1; 1)$ thỏa điều kiện A, E khác phía với (Q)

Vậy $A(-4; -1; 1)$.

Câu 28: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$, $(S_2): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) . Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) . Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a; b; c)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

A. $T = 1$.

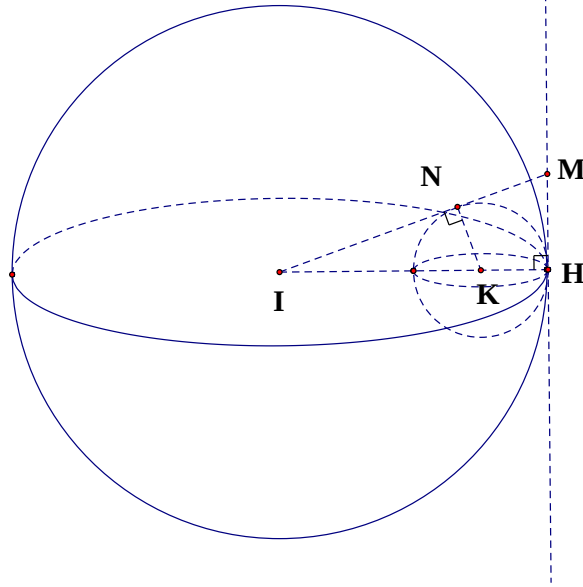
B. $T = -1$.

C. $T = \frac{7}{3}$.

D. $T = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R_1 = 4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $K(1;-1;0)$ bán kính $R_2 = 1$.

Có $IK = 3$, suy ra $IK = R_1 - R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong tại H .

Suy ra $\overrightarrow{IH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IK} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IK} = (1; -2; -2)$.

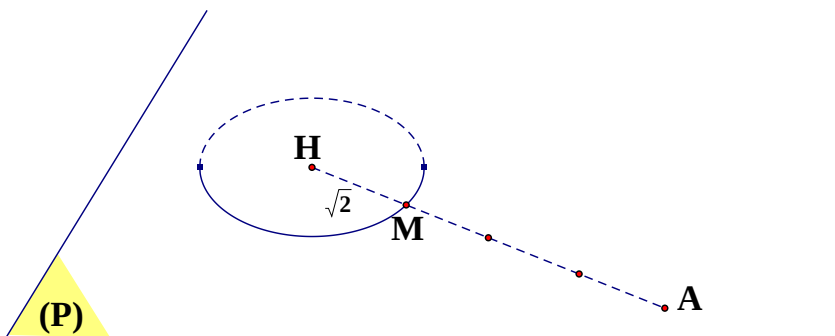
Vì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên (P) qua H và nhận vector $\overrightarrow{IK} = (1; -2; -2)$ là một vector pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Giả sử điểm M thay đổi trên (P) thỏa mãn đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) , tiếp điểm tương ứng là N .

Ta có $\triangle IKN$ và $\triangle IMH$ đồng dạng suy ra $\frac{IN}{IH} = \frac{NK}{HM}$ (*).

Với $NK = R_2 = 1; IH = 4; IK = 3; IN = \sqrt{IK^2 - NK^2} = 2\sqrt{2}$ nên (*) $\Leftrightarrow$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{HM} \Leftrightarrow HM = \sqrt{2}.$$



Mặt khác ta lại có $A \in (P)$ và M thay đổi thuộc đường tròn (C) tâm H bán kính $R = \sqrt{2}$ nên

AM ngắn nhất bằng $HA - R = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ khi điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$

$$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{5}{3} \Rightarrow T = a + b + c = -1.$$

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Gọi (T) là khối trụ nội tiếp trong mặt cầu (S) và có một đáy là đường tròn (C) . Khi (T) có thể tích lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) là $ax + by + cz + d = 0$, với $b \in \mathbb{N}^*$, $b \leq 10$. Tính $a + b + c + d$.

A. 8.

B. 7.

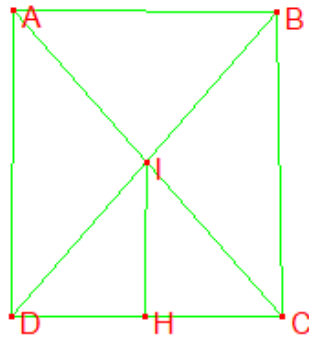
C. 4.

D. 6.

Lời giải:

Chọn D

Gọi thiết diện qua trục của hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$



Ta có: $O \in d \subset (P) \Rightarrow d = 0$

Lại có: $d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0$

Gọi I là tâm mặt cầu (S) . IH : là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng (P) .

Đặt $d_{(I, (P))} = x$. Suy ra $HC = \sqrt{6 - x^2}$ Vậy:

$$V_{tru} = \pi(6 - x^2) \cdot 2x \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow IH = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 5b^2 + 8ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0(L) \\ b = -\frac{8}{5}a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -5, b = 8, c = 3$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 6$$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(2a+1; a; -2a-1)$ và $B(b+2; 2b; -b-1)$ lần lượt là giao điểm của d với d_1 và d_2 .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (b-2a; 2b-a; -b+2a)$. Khi đó, để $d \perp (P)$ thì

$$\frac{b-2a+1}{2} = \frac{2b-a}{2} = \frac{-b+2a}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2a+1=2b-a \\ b-2a+1=-2(-b+2a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$, $A(1; 0; -1)$ và $B(3; 2; -2)$.

Phương trình đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm

$$M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}. \text{ Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng thuộc mặt cầu } (S) \text{ sao cho}$$

MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Khi đó z_0 gần nhất với số nào trong các số sau:

A. 3. B. -1. C. 2. D. 5.

Lời giải

Chọn D

+ Mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$ và có VTPT $\overrightarrow{OM}$ nên có phương trình dạng:
 $x_0x + y_0y + z_0z - x_0 - y_0 - 2z_0 = 0$

+ Gọi H là giao điểm của OM với (ABC) . Xét tam giác MAO vuông tại A và có đường cao AH . Ta có:

$$OH \cdot OM = OA^2 \Leftrightarrow \frac{|x_0 + y_0 + 2z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 9 \Leftrightarrow |x_0 + y_0 + 2z_0| = 9$$

$$\Rightarrow |3t - 6| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow M(0; -1; 5) \\ t = 5 \Rightarrow M(6; 11; -13) \end{cases}$$

Vậy z_0 gần nhất với 5.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a; -2; 2+3a)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; 1; a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m; n; p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Một khối nón

(N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của

khối nón (N) là $\max V_{(N)} = \frac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 250.

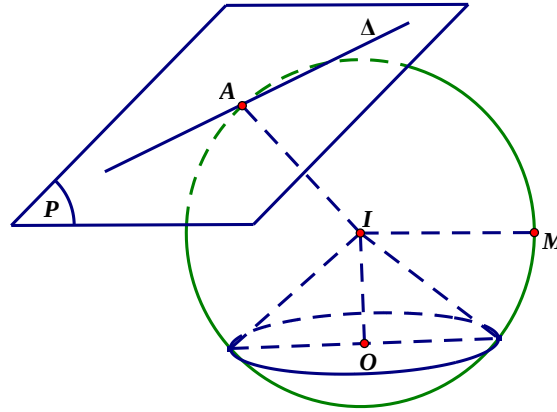
B. 256.

C. 252.

D. 225.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết ta có phương trình đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (a+1)t \end{cases}.$$

Ta có đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1; -5; -1), \forall a \in \mathbb{R}.$ ($t = -3$).

Nhận thấy đường thẳng Δ luôn nằm trên mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$.

Nếu (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn thì Δ chính là tiếp tuyến của đường tròn, mà từ một điểm chỉ có thể kẻ tối đa hai tiếp tuyến với đường tròn, nên khi đó chỉ có thể tồn tại tối đa hai tiếp tuyến Δ với (S) . Do từ A kẻ được vô số tiếp tuyến Δ với (S) nên (P) phải tiếp xúc với (S) tại A.

Ta có $AI \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p} = (1; 1; -1)$, do đó $\frac{m-1}{1} = \frac{n+5}{1} = \frac{p+1}{-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \end{cases} (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có } MI = IA &\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (n-1)^2 + (p-1)^2 = (m-1)^2 + (n+5)^2 + (p+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 3n+p=-6 (2). \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \\ 3n+p=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=0 \\ p=-6 \end{cases}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu (S): } R = IM = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{3}.$$

Gọi O là tâm của hình tròn đáy của hình nón, đặt $x = IO, x > 0$, khi đó hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{R^2 - IO^2} = \sqrt{75 - x^2}$.

$$\text{Thể tích khối nón: } V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{\pi}{3} (75x - x^3).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = 75x - x^3, x \in (0; +\infty), f'(x) = 75 - 3x^2 \text{ với } x \in (0; 5\sqrt{3}).$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 75 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(n) \\ x = -5(l) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	5	$5\sqrt{3}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	250	0	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max_{(0; 5\sqrt{3})} f(x) = 250$ tại $x = 5$.

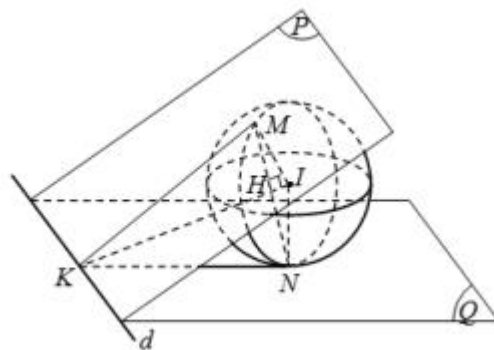
$$\text{Do đó } \max V_{(N)} = \frac{250\pi}{3} \Rightarrow q = 250.$$

Câu 33: Vậy $m + n + p + q = 6 + 0 + (-6) + 250 = 250$. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 4 = 0$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M, N là tiếp điểm. $H(a; b; c)$ là trung điểm của MN . Khi đó tích abc bằng

- A. $\frac{8}{27}$. B. $\frac{16}{27}$. C. $\frac{32}{27}$. D. $\frac{64}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ bán kính $r = \sqrt{2}$. Gọi $K = d \cap (IMN)$, ta có K là hình chiếu vuông góc của I trên d . Ta có $K(2; 0; 0)$, $IK = \sqrt{6}$ và $\overrightarrow{IK} = (1; -2; -1)$.

Khi đó

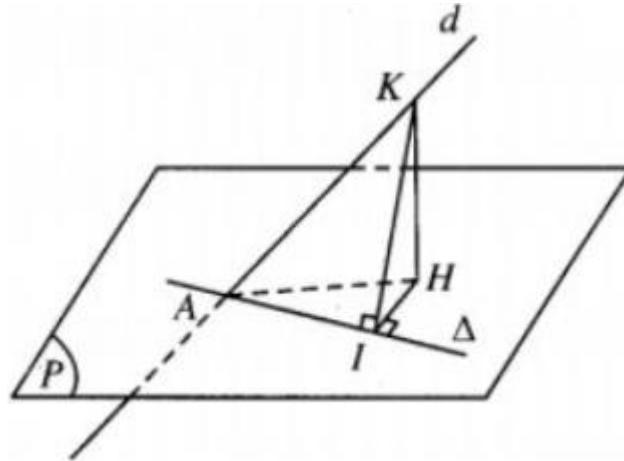
$$\frac{IH}{IK} = \frac{IH \cdot IK}{IK^2} = \frac{R^2}{IK^2} = \frac{1}{3} \text{ suy ra } \overrightarrow{IH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IK} \text{ và } H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } abc = \frac{32}{27}.$$

- Câu 34:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của α để tồn tại một mặt phẳng (Q) chứa d tạo với (P) một góc α° .
- A. 75. B. 76. C. 77. D. 74.

Lời giải

Chọn A



Gọi $A = d \cap (P)$, K là một điểm tùy ý trên d , $K \neq A$. Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của K trên (P) và Δ .

Gọi $\varphi = (d; (P)) = \angle KAH$; và $\alpha = ((P); (Q)) = \angle KIH$.

Ta có $KH \leq KI \leq KA$, lại có $\sin \alpha = \frac{KH}{KI}$ nên $\frac{KH}{KA} \leq \sin \alpha = \frac{KH}{KI} \leq \frac{KH}{KH} \Leftrightarrow \sin \varphi \leq \sin \alpha \leq 1$.

Mặt khác $\sin \varphi = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_P|} = \frac{\sqrt{6}}{9}$ với $\vec{u}_d(2;1;-2)$ là VTCP của đường thẳng d và $\vec{n}_P(1;-2;1)$ là VTPT của mặt phẳng (P) .

Do đó $\frac{\sqrt{6}}{9} \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 15,8^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \xrightarrow{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha \in \{16; 17; \dots; 90\}$. Vậy có 75 số α thỏa mãn.

- Câu 35:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;4)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng
- A. $\sqrt{5}$. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng $d \Rightarrow H \in d$.

Giả sử $H(1+2t;-2+t;2t)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$ (với $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của d)

$\Rightarrow (-1+2t) \cdot 2 + (1+t) \cdot 1 + (2t-4) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 9t = 9 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3;-1;2)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) .

Ta thấy $AK \leq AH$ nên khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất bằng AH khi K trùng H .

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(3; -1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AH}(1; 2; -2)$ làm vector pháp tuyến.

Phương trình của (P) là $1(x-3) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(3; 2; -1)$ và bán kính $r = \sqrt{20}$.

Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

$$\sqrt{20 - d^2(I, (P))} = \sqrt{20 - \left(\frac{|3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 3|}{3} \right)^2} = 2.$$

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4; 1; 5)$, $B(6; -1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$. Xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc (P) . Bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{35}$.

B. $\sqrt{33}$.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) .

Vì (S) đi qua A, B nên $IA = IB$ hay I thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AB .

Mặt khác, $I \in (P)$ nên I thuộc giao tuyến d của (P) và (α) .

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (10; -2; -4)$ và $M(1; 0; 3)$ là trung điểm của AB nên $(\alpha): 5x - y - 2z + 1 = 0$.

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vì $I \in d$ nên $I = (t; t + 1; 2t)$. Mặt cầu (S) có bán kính

$$R = AI = \sqrt{(t+4)^2 + (t+1-1)^2 + (2t-5)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 41} = \sqrt{6(t-1)^2 + 35}.$$

Ta có $R \geq \sqrt{35}$ và $R = \sqrt{35} \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy bán kính mặt cầu (S) có độ dài nhỏ nhất bằng $\sqrt{35}$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 36 = 0$ và điểm $N(3; 3; 3)$. Từ một điểm M thay đổi trên (P) , kẻ các tiếp tuyến phân biệt MA, MB, MC đến (S) (A, B, C là các tiếp điểm). Khi khoảng cách từ N đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + 2y + bz + c = 0$. Tính giá trị $a + b + c$ bằng

A. 6.

B. 0.

C. -2.

D. -4.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(a; b; c) \in (P) \Rightarrow 2a + b + 2c - 36 = 0$ (*).

$$A(x; y; z) \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (x-a; y-b; z-c); \overrightarrow{OA} = (x; y; z).$$

Do MA là tiếp tuyến tại A của mặt cầu (S) tâm O nên $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-a) + y(y-b) + z(z-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = ax + by + cz \Leftrightarrow ax + by + cz = 36$$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + by + cz = 36$.

$$\text{Ta có: } ax + by + cz = 36 \Leftrightarrow a(x-2) + b(y-1) + c(z-2) + 2a + b + 2c - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x-2) + b(y-1) + c(z-2) = 0 \text{ (do (*))}$$

$$\Rightarrow K(2;1;2) \in (ABC) \Rightarrow d(N, (ABC)) \leq NK.$$

$$\text{Khi đó } d(N, (ABC))_{\max} = NK \Leftrightarrow NK \perp (ABC).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NK} = (-1; -2; -1).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + 2y + z - 6 = 0$.

$$\text{Vậy } 1+1-6 = -4.$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$; $d_3: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 17 = 0$ (Với a, b là các số nguyên, $a > 0$) đi qua $M(-2; 3; -4)$ và cắt ba đường thẳng trên lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC đều. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $(-3; 1; -1)$.

B. $(-3; 1; 1)$.

C. $(-3; 0; 1)$.

D. $(-3; -1; 1)$.

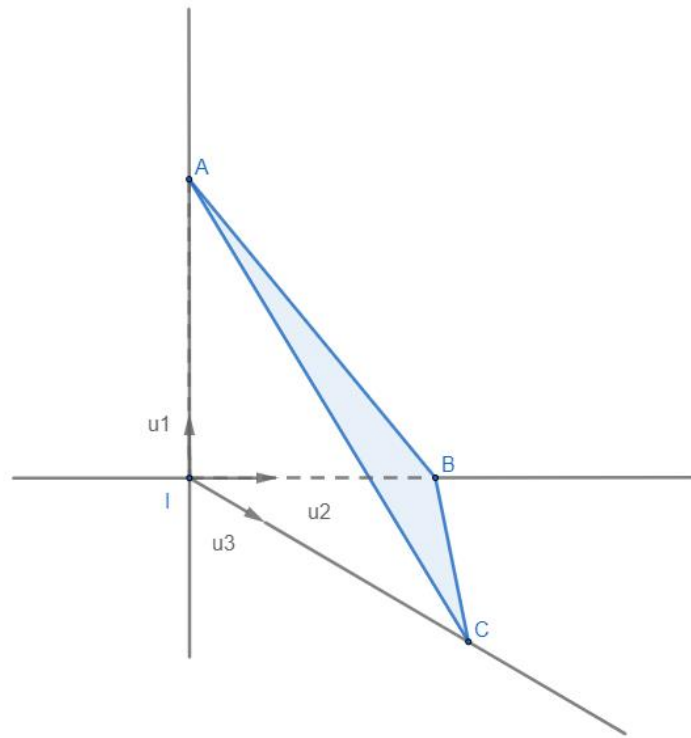
Lời giải

Chọn A

Các đường thẳng d_1, d_2, d_3 có vector chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (2; 2; 1)$; $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 2)$; $\overrightarrow{u_3} = (2; -1; -2)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{u_3} \text{ và } |\overrightarrow{u_1}| = |\overrightarrow{u_2}| = |\overrightarrow{u_3}| = 3 \quad (1)$$

Ta có $d_1; d_2; d_3$ đồng quy tại điểm $I(1; 1; 1)$ và các đường thẳng $d_1; d_2; d_3$ tương ứng vuông góc với nhau từng đôi một.



Ta có hệ
$$\begin{cases} IA^2 + IB^2 = AB^2 \\ IA^2 + IC^2 = AC^2 \\ IC^2 + IB^2 = BC^2 \end{cases} \text{ mà } AB = BC = AC \Rightarrow IA = IB = IC \quad (2)$$

$\Rightarrow I.ABC$ là hình chóp đều và vuông tại I .

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\overrightarrow{IA} = m\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{IB} = n\overrightarrow{u_2}$; $\overrightarrow{IC} = p\overrightarrow{u_3}$ (trong đó $|m| = |n| = |p|$)

và $\overrightarrow{n_{ABC}}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

Để đơn giản ta chọn lại $|m| = |n| = |p| = 1$ và có 4 trường hợp sau:

TH1: Chọn $\overrightarrow{n_{ABC}} = \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = (5; -1; 1)$.

Vậy mặt phẳng là $5(x+2) - (y-3) + (z+4) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + z + 17 = 0$. Ta thấy có đáp án A thuộc mặt phẳng, nên đáp án là A.

TH2: Chọn $\overrightarrow{n_{ABC}} = \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3} = (1; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng là $1(x+2) + 1(y-3) + 1(z+4) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 5 = 0$.

Do không thể đưa về dạng $ax + by + cz + 17 = 0$ với a nguyên vì $\frac{a}{1} \neq \frac{17}{-5}$ với $a \in \mathbb{Z}$.

TH3: Chọn $\overrightarrow{n_{ABC}} = \overrightarrow{n_3} = -\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = (1; -5; -1)$.

Phương trình mặt phẳng là $1(x+2) - 5(y-3) - 1(z+4) = 0 \Leftrightarrow x - 5y - z + 13 = 0$ (Loại với lý do tương tự).

TH4: Chọn $\overrightarrow{n_{ABC}} = \overrightarrow{n_4} = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = (3; 3; -3)$ Phương trình mặt phẳng là $3(x+2) + 3(y-3) - 3(z+4) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0$ (Loại với lý do tương tự).

Câu 39: Vậy đáp án là A. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-8)^2 = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Gọi $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng tùy ý tiếp xúc với (S) lần lượt tại các tiếp điểm A, B ; góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° . Đường thẳng đi qua A song song với d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm M , đường thẳng đi qua B song song với d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm N . Giá trị lớn nhất của tổng $AM + BN$ bằng

A. $24 + 2\sqrt{2}$. B. $24 - 3\sqrt{2}$. C. $26 + 3\sqrt{2}$. D. $26 - 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-8)^2 = 4$ có tâm $I(2;3;8)$, bán kính $R = 2$.

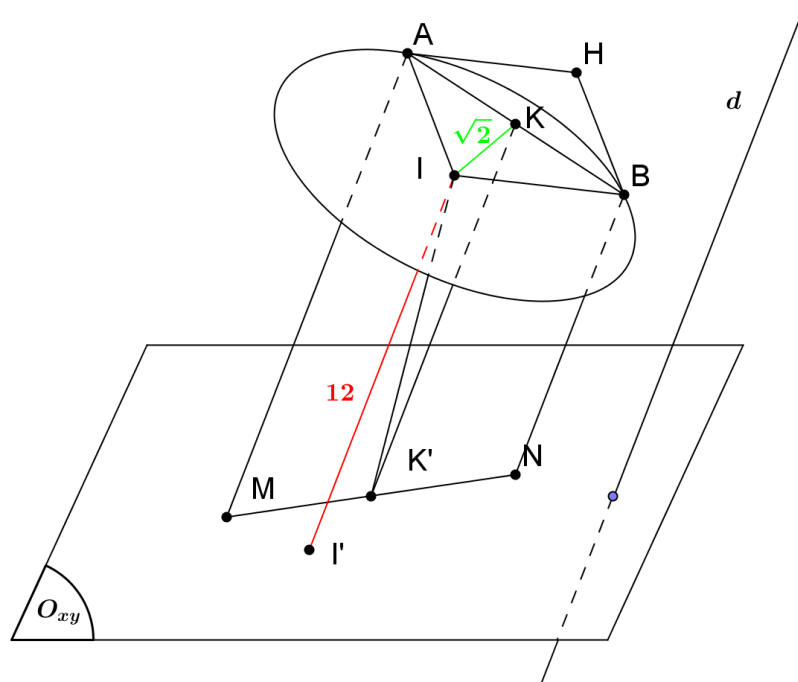
Gọi K là trung điểm AB ; H là giao điểm giữa 3 mặt phẳng $(P), (Q)$ và (ABI) .

Đường thẳng đi qua I song song với d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm I' , đường thẳng đi qua K song song với d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm K' .

Khi đó $AIBH$ là hình vuông, $AB = 2\sqrt{2}$, $IK = \sqrt{2}$.

Do II' đi qua $I(2;3;8)$ song song với d nên có phương trình $II': \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 8 + 2t \end{cases}$

Đường thẳng II' cắt (Oxy) tại $I'(-2;11;0)$. Suy ra $II' = 12$.



Do K là trung điểm AB , K' là trung điểm MN nên $AM + BN = 2KK'$.

Vì K thuộc mặt cầu tâm $I(2;3;8)$ bán kính $IK = \sqrt{2}$ nên KK' lớn nhất khi I nằm trên đoạn thẳng KK' hay $I' \equiv K'$.

Câu 40: Khi đó: $AM + BN = 2(İK + İK') = 2(İK + ԻԻ') = 2(12 + \sqrt{2}) = 24 + 2\sqrt{2}$. Trong không gian hệ

trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - m^2 + m^2 t \\ y = 3 + n^2 - n^2 t \\ z = mn\sqrt{2} - \sqrt{2}mnt \end{cases}$, trong đó m và n là những tham

số thực. Biết rằng tồn tại mặt cầu cố định (S) có tâm $I(4; b; c)$ và tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính mặt cầu (S) bằng:

A. 1.

B. 3.

C. 2.

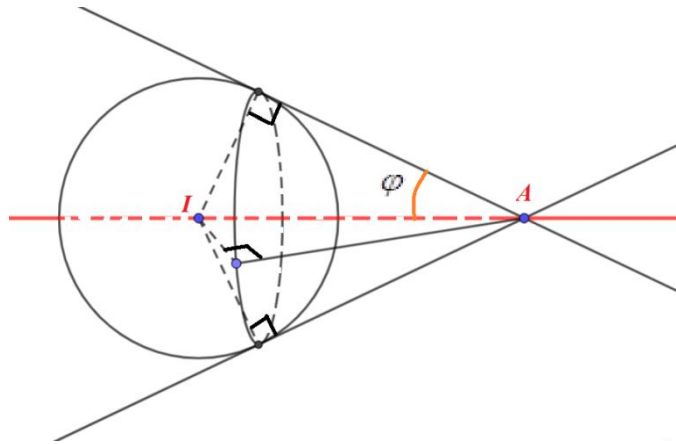
D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Đường thẳng d luôn đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ cố định (ứng với $t = 1$) và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m^2; -n^2; -\sqrt{2}mn)$.

Biết rằng tồn tại mặt cầu cố định (S) có tâm $I(4; b; c)$ và tiếp xúc với đường thẳng d nên tồn tại đường thẳng IA cố định tạo với d một góc φ ($0 < \varphi < 90^\circ$) không đổi.



Giả sử đường thẳng IA có 1 vectơ chỉ phương $\vec{v} = (A; B; C)$

$$+) \text{ Với } m = 1, n = 0 \text{ thì } \vec{u} = (1; 0; 0) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1)$$

$$+) \text{ Với } m = 0, n = 1 \text{ thì } \vec{u} = (0; -1; 0) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|-B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2)$$

$$+) \text{ Với } m = 1, n = \sqrt{2} \text{ thì } \vec{u} = (1; -2; -2)$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|A - 2B - 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|A - 2B - 2C|}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (3)$$

$$\text{Lấy } A = 1. \text{ Từ (1), (2), (3), suy ra: } \frac{1}{\sqrt{1^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|B|}{\sqrt{1^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 - 2B - 2C|}{3\sqrt{1^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |B|=1 \\ |3B|=|1-2B-2C| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\pm 1 \\ |3B|=|1-2B-2C| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} B=1 \\ 3=|-1-2C| \end{cases} \\ \begin{cases} B=-1 \\ 3=|3-2C| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} B=1 \\ C=1 \\ C=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ C=3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $\vec{v}=(1;1;1)$, $\vec{v}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;-1;0)$ hoặc $\vec{v}=(1;-1;3)$

TH1: $\vec{v}=(1;1;1) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ đường thẳng IA có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow I(4;5;2)$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = IA \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$$

TH2: $\vec{v}=(1;1;-2) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$ đường thẳng IA có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=-2t \end{cases} \Rightarrow I(4;5;-4)$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = IA \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{5}.$$

TH3: $\vec{v}=(1;-1;0) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ đường thẳng IA có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow I(4;1;0)$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = IA \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

TH4: $\vec{v}=(1;-1;3) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{11}}$ đường thẳng IA có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=3t \end{cases} \Rightarrow I(4;1;6)$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{11} \Rightarrow R = IA \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2} = 2\sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{10}.$$

Câu 41: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-m^2+m^2t \\ z=2m-2mt \end{cases} \text{ trong đó } m \text{ là tham số thực. Biết rằng tồn tại mặt cầu cố định (S)}$$

có tâm $I(a;b;c)$ đi qua $B(2;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng d . Biết bán kính R của mặt cầu (S) lớn hơn 1. Bán kính R bằng

- A. 2. B. 3. C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cho $t=1$, dễ thấy đường thẳng d luôn đi qua điểm $A(1;0;0)$ với mọi m .

Ta thấy nếu d tiếp xúc với mặt cầu cố định thì góc giữa d và đường thẳng AI không đổi.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (a-1; b; c); \vec{u}_d = (2; m^2; -2m);$

$$\cos(AI; d) = \left| \frac{2(a-1) + bm^2 - 2mc}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{4 + m^4 + 4m^2}} \right| = \left| \frac{bm^2 - 2mc + 2(a-1)}{(m^2 + 2)\sqrt{(a-1)^2 + b^2 + c^2}} \right| \quad (1)$$

$\cos(AI; d)$ không đổi suy ra đạo hàm của $f(m) = \frac{bm^2 - 2mc + 2(a-1)}{m^2 + 2}$ bằng 0 với mọi m .

Do đó

$$(2bm - 2c)(m^2 + 2) - 2m(bm^2 - 2mc + 2(a-1)) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c + 4c = 0 \\ 4b - 4(a-1) = 0 \\ -4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a-1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy tâm của mặt cầu (S) có dạng $I(a; a-1; 0)$.

Thay $b = a-1, c = 0$ vào (1) ta nhận được $\cos(AI; d) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra

$$AI = R\sqrt{2} \Leftrightarrow AI = IB\sqrt{2} \Leftrightarrow 2(a-1)^2 = 2[2(a-2)^2 + 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Với $a = 2, R = IB = 1$ (loại).

Câu 42: Với $a = 4, R = IB = 3$ (nhận). Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

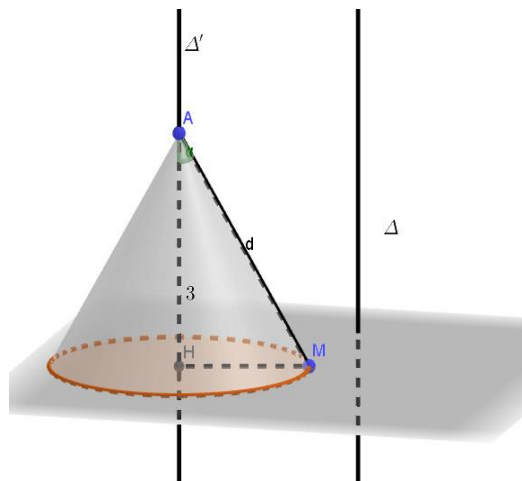
$(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$. Một đường thẳng d đi qua

$A(2; 0; 1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc bằng 60° . Gọi $M = d \cap (P)$. Giá trị lớn nhất của hoành độ của điểm M bằng

- A. $8 + 2\sqrt{2}$. B. $-1 + 4\sqrt{3}$. C. $3 + \sqrt{2}$. D. $3 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



* Ta có: $\vec{u}_\Delta = (1; 2; -2)$ là một VTCP của đường thẳng Δ , $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$ là một VTPT của mặt phẳng (P) .

* Ta có: $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \Delta \perp (P)$ và $d(A, (P)) = 3$.

* Gọi H là hình chiếu của A lên $(P) \Rightarrow H(3; 2; -1)$.

* Gọi Δ' đi qua A và H ($\Delta // \Delta'$), Δ' cố định. Đường thẳng d đi qua A cố định và $(d, \Delta') = (d, \Delta) = 60^\circ$. Nên tập hợp đường thẳng d là các đường sinh của hình nón (N) có đỉnh A , trục Δ' và góc ở đỉnh là $120^\circ \Rightarrow$ tập hợp các điểm M là đường tròn (C) như hình vẽ.

* Do $HM = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ nên M thuộc mặt cầu (S) có tâm H và $R = 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 27.$$

Vậy M thuộc đường tròn là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) . Nên tọa độ điểm

$$M(x; y; z) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 27 & (1) \\ x+2y-2z-9=0 & (2) \end{cases}$$

* Bài toán quy về tìm $\text{Max}_{\mathbb{R}}(x)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 27 & (1) \\ x+2y-2z-9=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 9 - 2y + 2z \quad \text{thay vào} \quad (1) \quad \text{ta được}$$

$$(1) \Leftrightarrow (6 - 2y + 2z)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 27 \quad (3).$$

Mà $[(z+1) - (y-2)]^2 \leq 2[(z+1)^2 + (y-2)^2]$ đồng thời đặt $a = z - y$.

$$(3) \Leftrightarrow (6 + 2a)^2 + \frac{(a+3)^2}{2} \leq 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}(a+3)^2 \leq 27 \Rightarrow a \leq \sqrt{6} - 3.$$

$$\Rightarrow x \leq 9 + 2(\sqrt{6} - 3) \Leftrightarrow x \leq 2\sqrt{6} + 3.$$

Câu 43: Dấu “=” xảy ra khi $y = \frac{4-\sqrt{6}}{2}; z = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$. Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt

phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2}$, điểm $A(1; 2; 0)$. Gọi N là điểm

di động chạy trên đường thẳng d và M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng NA luôn bằng 6.

Quỹ tích điểm M là một đường cong (ω) có diện tích bằng

A. $\frac{108\pi\sqrt{3}}{5}$.

B. $36\pi\sqrt{6}$.

C. $\frac{100\pi\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{71\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét rằng điểm $A(1; 2; 0)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) , thành ra đường thẳng NA chính là đường thẳng d . Do đó, quỹ tích các điểm M (đường cong (ω)) thực

chất là đường biên của thiết diện của mặt phẳng (P) và khối trụ tròn xoay (T) nhận d làm trục, bán kính bằng 6.

Gọi (Q) là một mặt phẳng vuông góc với d và cắt khối trụ tròn xoay (T) theo thiết diện là một hình tròn có diện tích là $S_1 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}) \right| = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d) \right| = \frac{5}{3\sqrt{3}}$.

Gọi S_2 là diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong (ω) , ta có:

$$S_1 = S_2 \cos \varphi \Rightarrow S_2 = \frac{S_1}{\cos \varphi} = \frac{36\pi}{\frac{5}{3\sqrt{3}}} = \frac{108\sqrt{3}\pi}{5} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Từ A kẻ tiếp tuyến AM với mặt cầu (S) (M là tiếp điểm) sao cho góc giữa đường thẳng AM và đường thẳng d là nhỏ nhất. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ với $x_0 > 1$, tính giá trị biểu thức $x_0 + 2y_0 + 3z_0$.

A. $\frac{2\sqrt{3}+6}{15}$.

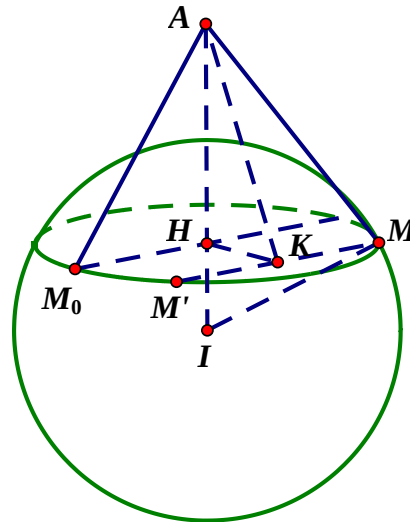
B. $\frac{2\sqrt{5}+6}{15}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}-6}{15}$.

D. $\frac{2\sqrt{5}-6}{15}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=1$.

Ta thấy $\vec{IA} = (0;1;2)$, $IA = \sqrt{5} > R$ nên từ A kẻ được vô số tiếp tuyến với mặt cầu (S) . Do M là tiếp điểm nên M thuộc mặt phẳng (P) vuông góc với IA .

Gọi $H = IA \cap (P)$, suy ra $MH \perp AI$. Trong tam giác vuông AMI ta có

$$AM^2 = AH \cdot AI \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AM^2}{AI^2} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \vec{AH} = \frac{4}{5} \vec{AI} \Rightarrow H\left(1; \frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right).$$

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (2; -2; 1)$.

Do $\vec{u}_d \cdot \vec{IA} = 0 - 2 + 2 = 0$ nên $d \parallel (P)$ (d có thể nằm trên (P)).

Ta thấy $H \notin d$, từ H kẻ đường thẳng $\Delta \parallel d$ cắt mặt cầu (S) tại M_0 , suy ra $\Delta \subset (P)$ và AM_0 là một tiếp tuyến của (S) .

Từ M kẻ $\Delta' \parallel \Delta$ (Δ' có thể trùng với Δ), Δ' cắt (S) tại điểm thứ hai là M' . Gọi K là trung điểm của MM' , suy ra $AK \perp MM'$. Ta có $\sin(AM, d) = \sin(AM, \Delta') = \sin AMK = \frac{AK}{AM} \geq \frac{AH}{AM_0} = \sin AM_0H = \sin(AM_0, \Delta)$.

Do đó góc giữa đường thẳng AM và đường thẳng d là nhỏ nhất bằng góc AM_0H khi $M \equiv M_0$.

Do $\Delta \parallel d$ nên $\vec{u}_d$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ . Do $M \equiv M_0 \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{HM} = t \cdot \vec{u}_d$,

$$\Rightarrow M \left(1 + 2t; \frac{1}{5} - 2t; -\frac{3}{5} + t \right).$$

$$\text{Do } M \in (S) \Rightarrow (2t)^2 + \left(\frac{1}{5} - 2t \right)^2 + \left(t + \frac{2}{5} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow 9t^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow t^2 = \frac{4}{45}$$

$$\text{Do } x_0 > 1 \text{ nên } t > 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \text{ suy ra } x_0 + 2y_0 + 3z_0 = t - \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{5} - 6}{15}.$$

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Gọi (T) là khối trụ nội tiếp trong mặt cầu (S) và có một đáy là đường tròn (C) . Khi (T) có thể tích lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) là $ax + by + cz + d = 0$, với $b \in \mathbb{N}^*$, $b \leq 10$. Tính $a + b + c + d$.

A. 8.

B. 7.

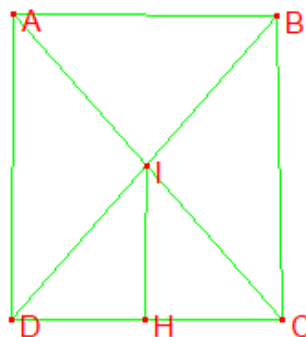
C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Gọi thiết diện qua trục của hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$



Ta có: $O \in d \subset (P) \Rightarrow d = 0$

Lại có: $d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0$

Gọi I là tâm mặt cầu (S) . IH : là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng (P) .

Đặt $d_{(I,(P))} = x$. Suy ra $HC = \sqrt{6-x^2}$ Vậy:

$$V_{tru} = \pi(6-x^2).2x \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow IH = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 5b^2+8ab=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0(L) \\ b=-\frac{8}{5}a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-5, b=8, c=3$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=6$$

Câu 46: Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+4}{6} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{-1}$. Từ điểm $M \in \Delta$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và gọi (C) là tập hợp các tiếp điểm. Biết khi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) đạt giá trị nhỏ nhất thì (C) thuộc mặt phẳng $x+by+cz+d=0$. Tìm $b+c+d$?

A. 4.

B. -2.

C. 2.

D. -4.

Lời giải

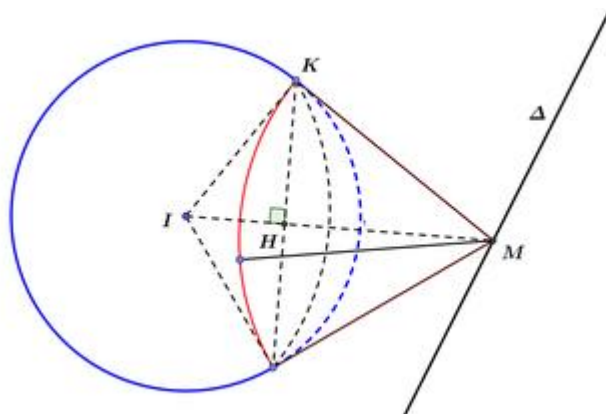
Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

$$\text{Đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 6 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u} = (6; -2; -1)$$

Ta có $d(I, \Delta) = 3 > R$ (dùng công thức tính).

(Gọi các điểm như hình vẽ đính kèm).



Gọi H là tâm của đường tròn (C) , K là một tiếp điểm của (S) và tiếp tuyến Δ kẻ từ M .

Ta có diện tích của (C) là $s = \pi.r^2$, $r = HK$

$$\text{Mặt khác ta có } IK^2 = IH.IM \Rightarrow IH = \frac{3}{IM}. \text{ Đặt } IM = x$$

$$\text{Mà } HK^2 = IK^2 - IH^2 = 3 - \frac{9}{x^2}$$

Suy ra diện tích của (C) nhỏ nhất khi $r = HK$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất.

Ta lại có $IM \geq d(I, \Delta) \Rightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM = 3$. Khi đó M là hình chiếu vuông góc của I lên Δ .

Gọi $M(-4+6t; 6-2t; 2-t) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IM} \perp \vec{u} \Rightarrow M(2; 4; 1)$

Khi đó $r = \sqrt{2} \Rightarrow IH = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IM} \Rightarrow H(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{1}{3}); \overrightarrow{IM} = (1; 2; 2)$

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó (P) qua H và có vtpt là $\overrightarrow{IM}$

$\Rightarrow (P): x + 2y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow b + c + d = -2$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2; -1; 3)$. B. $I(-1; -2; 3)$. C. $K(3; 0; 15)$. D. $J(-3; 2; 7)$.

Lời giải

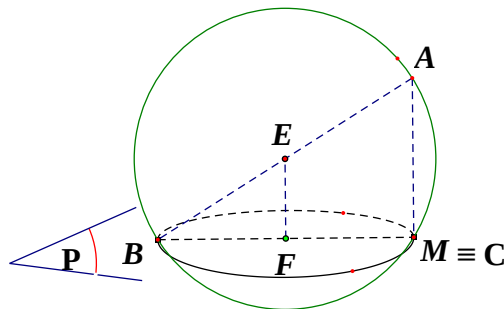
Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ có phương

$$\text{trình là } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}.$$

Vì $B \in d$ nên $B(1+3t; 2+4t; -3-4t)$ mà $B \in (P)$ nên ta có phương trình $2(1+3t) + 2(2+4t) - (-3-4t) + 9 = 0 \Leftrightarrow 18t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1)$.

Do M luôn nhìn AB dưới một góc vuông nên M thuộc mặt cầu (S) tâm $E(-\frac{1}{2}; 0; -1)$ đường kính AB , mà M thuộc mặt phẳng (P) nên M thuộc đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) (vì $d(E; (P)) < R = \frac{AB}{2}$).



Gọi F là tâm của đường tròn giao tuyến.

Ta có MB là dây cung của đường tròn (F) nên $MB \leq BC$ với BC là đường kính của (F).

Do đó MB lớn nhất bằng BC khi $M \equiv C$. Chú ý rằng $AC \parallel EF$, $EF \perp (P)$ nên $AC \perp (P)$, tức là M là hình chiếu vuông góc của A trên (P) .

Đường thẳng AC đi qua $A(1;2;-3)$, vuông góc với mặt phẳng (P) nên AC có véc tơ chỉ

$$\text{phương là } \vec{u}_{AC} = (2; 2; -1) \text{ có phương trình là } \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = -3 - t' \end{cases} \text{ với } t' \in \mathbb{R}.$$

Vì $C \in AC$ nên $C(1+2t'; 2+2t'; -3-t')$.

Vì $C \in (P)$ nên

$$2(1+2t') + 2(2+2t') - (-3-t') + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t' + 18 = 0 \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow C(-3; -2; -1).$$

Đường thẳng MB đi qua $B(-2; -2; 1)$, có vector chỉ phương $\vec{BC} = (-1; 0; -2)$ nên có phương

$$\text{trình là } \begin{cases} x = -2 - l \\ y = -2 \\ z = 1 - 2l \end{cases} \text{ với } l \in \mathbb{R}.$$

Thử các đáp án thấy điểm $I(-1; -2; 3)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}. \text{ Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng thuộc mặt cầu } (S) \text{ sao cho } MA, MB,$$

MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Khi đó z_0 gần nhất với số nào trong các số sau?

A. 3.

B. -1.

C. 2.

D. 5.

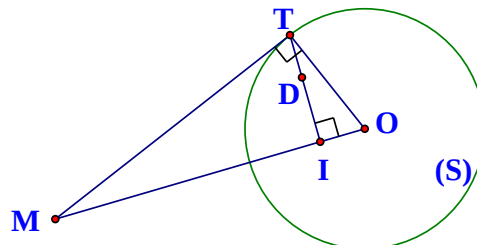
Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm A, B và C ; $I = MO \cap (P)$.

Gọi T là giao điểm của ID với (S) .



$$\text{Ta có } OT^2 = OI \cdot OM \Rightarrow OI \cdot OM = 9.$$

$M(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = \vec{OM} = (x_0; y_0; z_0)$ là vector pháp tuyến của (P) .

Phương trình mặt phẳng (P) :

$$x_0(x-1) + y_0(y-1) + z_0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x_0x + y_0y + z_0z + x_0 + y_0 + 2z_0 = 0.$$

Ta lại có $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ và $OI = d[O; (P)] = \frac{|x_0 + y_0 + 2z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$.

Do vậy $|x_0 + y_0 + 2z_0| = 9$. Mặt khác $M \in d \Rightarrow M(1+t; 1+2t; 2-3t)$

Suy ra $|1+t+1+2t+4-6t| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow M(0; -1; 5) \\ t = 5 \Rightarrow M(6; 11; -13) \end{cases}$.

Do đó $M(0; -1; 5) \Rightarrow z_0 = 5$.

Câu 49: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là

tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- A. 30. B. 20. C. 21. D. 26.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 3$.

Giả sử $A(x; y; z)$ do MA là tiếp tuyến của mặt cầu nên $\overline{MA} \perp \overline{OA}$.

Ta có $\begin{cases} \overline{MA} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \\ \overline{OA} = (x; y; z) \\ A \in (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_0x + y_0y + z_0z = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow x_0x + y_0y + z_0z = 9$.

Suy ra mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C là $x_0x + y_0y + z_0z - 9 = 0$.

Theo bài ra mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$ nên $x_0 + y_0 + 2z_0 - 9 = 0$ (*).

Mặt khác điểm M thuộc đường thẳng d nên $\begin{cases} x_0 = 1+t \\ y_0 = 1+2t \\ z_0 = 2-3t \end{cases}$

Thay vào (*) ta được $1+t+1+2t+2(2-3t)-9=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Từ đó suy ra $x_0 = 0, y_0 = -1, z_0 = 5 \Rightarrow T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 26$.

Câu 50: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3; 1; 2), B(-1; 3; -2)$ và đường thẳng

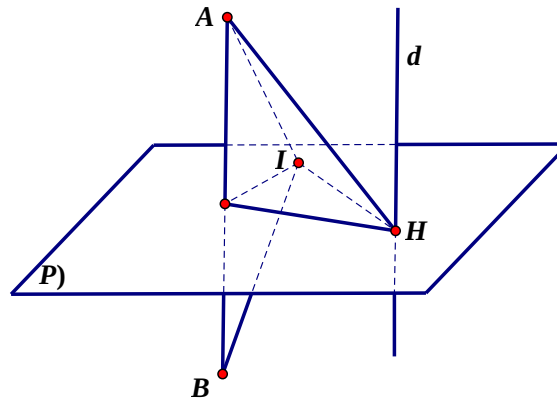
$d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Mặt cầu (S) qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng d có

bán kính nhỏ nhất thì hoành độ tâm mặt cầu khi đó bằng

- A. 3. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi mặt cầu (S) có tâm I và bán kính là R .

Mặt cầu (S) qua hai điểm A, B nên I thuộc mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của AB .

Ta có $(P): 2x - y + 2z = 0$.

Nhận xét thấy đường thẳng $d \perp (P)$ tại $H(2; 6; 1)$, hình chiếu vuông góc của I lên (d) là H . Do đó mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) tại H .

Mặt cầu (S) qua hai điểm A, H nên I thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của AH .

Ta có $(Q): -2x + 10y - 2z - 27 = 0$.

Vì $I \in (P); I \in (Q)$ nên $I \in (\Delta)$ với Δ là giao tuyến của $(P), (Q)$.

$$\text{Ta có } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = \frac{1}{2} - t \end{cases} \Rightarrow I\left(1+t; 3; \frac{1}{2}-t\right) \Rightarrow R = AI = \sqrt{(t-2)^2 + 4 + \left(-t - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\text{Hay } R = \sqrt{2t^2 - t + \frac{41}{4}}. \text{ Suy ra, } R_{\min} \text{ khi } t = \frac{1}{4} \Rightarrow I\left(\frac{5}{4}; 3; \frac{1}{4}\right)$$

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ và đường thẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases}, \text{ với } m \text{ là tham số. Hai mặt phẳng } (P), (Q) \text{ cùng chứa } \Delta \text{ và tiếp xúc với}$$

mặt cầu (S) tại M, N . Khi độ dài đoạn MN ngắn nhất thì $m = \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)$ phân số tối giản). Tính

$$a^3 + b^3.$$

A. 35.

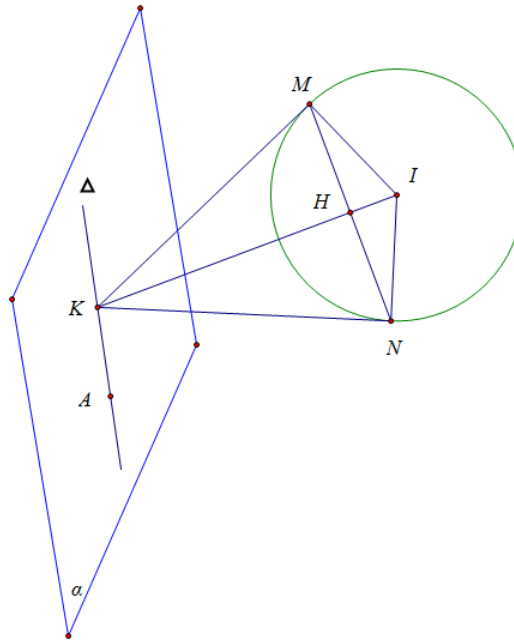
B. 126.

C. 133.

D. 152.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 2$

Gọi K là hình chiếu của I lên Δ . Do $\begin{cases} IM \perp (P) \\ IN \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (IMN) \Rightarrow K \in (IMN)$.

Nói KI cắt MN tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm của MN và $MH \perp KI$.

Trong tam giác vuông KIM có $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{KI^2 - R^2}$.

Độ dài đoạn MN ngắn nhất $\Leftrightarrow MH$ ngắn nhất $\Leftrightarrow KI$ ngắn nhất.

Ta lại có đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;0)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -m; m-1)$.

Gọi $\vec{n} = (1;1;1)$, ta có: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \forall m$ nên đường thẳng Δ luôn nằm trong mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;0;0)$ và nhận $\vec{n}(1;1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y + z - 1 = 0$

Gọi J là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) . Ta có $KI \geq IJ$. Do đó KI ngắn nhất bằng IJ .

Khi đó đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A; J$.

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $I(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u \end{cases}$$

$\Rightarrow J$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

Xét phương trình: $1 + u + 2 + u + 3 + u - 1 = 0 \Leftrightarrow 3u + 5 = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{5}{3} \Rightarrow J\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Một vtcp của đường thẳng Δ là: $\overrightarrow{AJ} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \vec{u} = \left(1; -\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow m = \frac{1}{5}$.

Vậy $a^3 + b^3 = 1^3 + 5^3 = 126$.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt cầu có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và $(x+4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 16$. Gọi M là điểm di động ở ngoài ba mặt cầu và X, Y, Z là các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ M đến ba mặt cầu sao cho $MX = MY = MZ$. Khi đó tập hợp các điểm M là đường thẳng d cố định. Hỏi d vuông góc với mặt phẳng nào?

A. $(P_3): x + 2y + 4z = 2020$.

B. $(P_4): x + 2y + 6z = 2020$.

C. $(P_2): 3x + 2y + 4z = 2020$.

D. $(P_1): 5x + 2y + 4z = 2020$.

Lời giải

GVSB: Trần Xuân Thiện; GVPB: Nguyễn Minh Luận

Chọn C

Gọi tọa độ điểm M là $(a; b; c)$.

Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R_1 = 1$ và MX là tiếp tuyến với mặt cầu nên $MX^2 = MO^2 - r_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 1$.

Tương tự, ta có $MY^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+2)^2 - 4$ và $MZ^2 = (a+4)^2 + b^2 + (c-3)^2 - 16$.

Theo đề, $MX = MY = MZ$ nên $MX^2 = MY^2 = MZ^2$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+2)^2 - 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a+4)^2 + b^2 + (c-3)^2 - 16 \end{cases}.$$

$$\text{Rút gọn ta được } \begin{cases} 2a + b - 2c - 3 = 0 \\ 4a - 3c + 5 = 0 \end{cases}.$$

Từ đó, M thuộc đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 3 = 0$ và $(\beta): 4x - 3z + 5 = 0$.

Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}] = (-3; -2; -4)$.

Do đó, d vuông góc với mặt phẳng $(P_2): 3x + 2y + 4z = 2020$.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $C(-1; 2; 11), H(-1; 2; -1)$, hình nón (N) có đường cao $CH = h$ và bán kính đáy là $R = 3\sqrt{2}$. Gọi M là điểm trên đoạn CH , (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục CH tại M của hình nón (N) . Gọi (N') là khối nón có đỉnh H đáy là (C) . Khi thể tích khối nón (N') lớn nhất thì mặt cầu ngoại tiếp nón (N') có tọa độ tâm $I(a; b; c)$, bán kính là d . Giá trị $a + b + c + d$ bằng

A. 1.

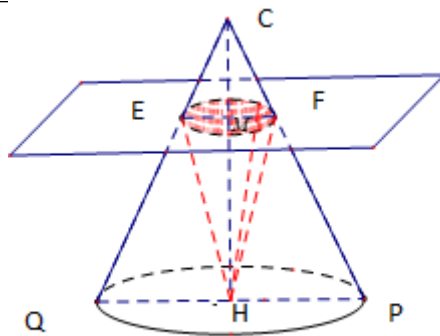
B. 3.

C. 6.

D. -6.

Lời giải

Chọn C



Đặt $HM = x$, $0 < x < h$. Gọi I, R, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của nón (N) , bán kính đường tròn (C) . Khi đó ta có $CH = h = 12$ là chiều cao của (N) , $R = 3\sqrt{2}$.

Khi đó C, I, H thẳng hàng (I nằm giữa C, H).

Do tam giác $\triangle CEM \sim \triangle CQH$ nên $\frac{EM}{QH} = \frac{CM}{CH} \Leftrightarrow EM = \frac{QH \cdot CM}{CH}$

$$\Leftrightarrow r = EM = FM = \frac{R(h-x)}{h}.$$

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là

$$V = \frac{1}{3} \pi EM^2 \cdot HM = \frac{1}{3} \pi \left[\frac{R(h-x)}{h} \right]^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x.$$

Ta có Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$, ($0 < x < h$)

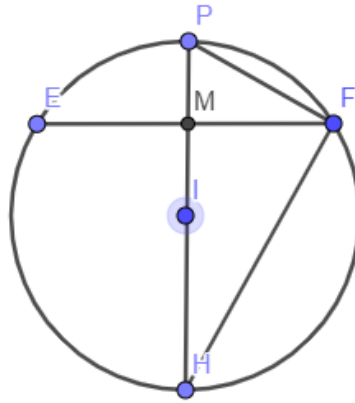
$$f'(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x) \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}.$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$		

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x = \frac{h}{3}$

Chú ý: Có thể đánh giá dựa vào



$$(h-x)^2 x = (h-x)(h-x)x = \frac{1}{2}(h-x)(h-x)2x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{h-x+h-x+2x}{3}\right)^3 \text{ với } 0 < x < h. \text{ Dấu "="}$$

$$\text{xảy ra khi ba số } (h-x) = (h-x) = 2x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}.$$

$$\text{Khi đó } HM = x = \frac{h}{3} = 4, r = \frac{R \cdot CM}{h} = \frac{R \cdot (h-x)}{h} = 2\sqrt{2} = MF$$

Gọi P là giao điểm của HM với mặt cầu ngoại tiếp nón (N'). Ta có $\triangle HFP$ vuông tại F
 $\Rightarrow HF^2 = HM \cdot HP$

$$\Leftrightarrow HM^2 + MF^2 = HM \cdot HP \Leftrightarrow 16 + (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot HP \Rightarrow HP = 6$$

$$\Rightarrow d = HI = 3 = \frac{1}{4}HC \Rightarrow \overrightarrow{HI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HC} \Rightarrow I(-1; 2; 2).$$

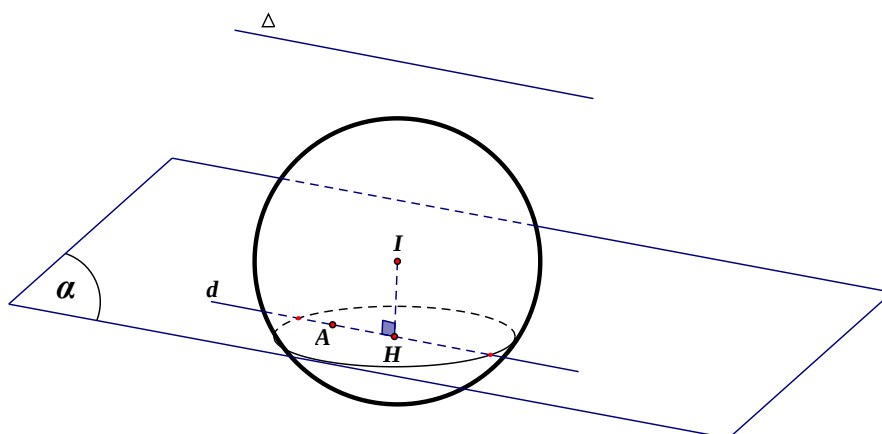
Vậy $a+b+c+d = 6$.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-3)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$. Mặt phẳng (α) thay đổi, luôn đi qua A và song song với Δ . Trong trường hợp (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì (α) có phương trình $ax+by+cz-3=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=3a-2b-2c$.

- A. 12. B. 9. C. 4. D. $\frac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;1)$, bán kính $R = 5$.

Để thấy A nằm trong mặt cầu (S) nên (α) luôn cắt (S) theo một đường tròn (C) .

Đường thẳng d đi qua A và song song với Δ có phương trình là $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên $d \Rightarrow H(3;-1;-1)$.

Gọi r là bán kính của đường tròn (C) , ta có: $r^2 = R^2 - [d(I, (\alpha))]^2 \geq R^2 - IH^2 = 16 \Leftrightarrow r \geq 4$.

Chu vi của (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = IH \Leftrightarrow H$ là hình chiếu của I trên (α) .

Khi đó, (α) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IH}(2;-1;-2)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$2x - y - 2z - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 3 = 0.$$

Từ đó, suy ra: $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3a - 2b - 2c = 4$.

Cách 2. Vì $(\alpha) \cap \Delta$ nên $a - 2b + 2c = 0$ (1).

Vì $A(2;1;-3) \in (\alpha)$ nên $2a + b - 3c - 3 = 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{4c+6}{5}, b = \frac{7c+3}{5}$.

Điểm A nằm bên trong mặt cầu (S) nên mặt phẳng (α) luôn cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{25 - h^2}$, với $h = d(I(1;0;1), mp(\alpha))$.

$$\text{Ta có } h = \frac{|a + c - 3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{c^2 - 2c + 1}{10c^2 + 10c + 5}}.$$

Với mọi $c \in \mathbb{R}$ ta có $(3c + 2)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9c^2 + 12c + 4 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 \leq 10c^2 + 10c + 5 \quad (3).$$

Mà $10c^2 + 10c + 5 > 0, \forall c \in \mathbb{R}$, nên $(3) \Leftrightarrow \frac{c^2 - 2c + 1}{10c^2 + 10c + 5} \leq 1$. Dẫn tới $h \leq 3$, từ đó

$$r = \sqrt{25 - h^2} \geq 4, \text{ dấu "}" xảy ra khi } c = -\frac{2}{3}.$$

Vậy, đường tròn giao tuyến của (S) và (α) có chu vi nhỏ nhất khi

$$c = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = 4.$$

