|  |  |
| --- | --- |
| PHÒNG GD&ĐT **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ CHỌN ĐỘI DỰ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH****LỚP 9 NĂM HỌC 2023 - 2024** |
|  | Môn thi: **Toán** |
|  (*Đề thi gồm có 01 trang*) | Thời gian thi: ***150 phút*** (*Không kể thời gian giao đề*) |

**Câu 1.** (*3,0 điểm*)

1. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^{2}}+\frac{1}{(b-c)^{2}}+\frac{1}{(c-a)^{2}}}$ là số hữu tỉ.
2. Tính tổng các chữ số của A, biết $\sqrt{A}=99…96 (có 100 chữ số 9)$.

**Câu 2.** (*7,0 điểm*)

1. Tìm tất cả các bộ 3 số nguyên tố a, b, c thỏa mãn abc$ <ab+bc+ca$.
2. Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-2}=\frac{2x^{2}+2x-2}{3x-1}$$

**Câu 3.** (*2,0 điểm*)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn ab + bc + ca = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\left(1+a\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+c\right)^{2}}\geq \frac{3}{4}$$

**Câu 4.** (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên đoạn BH lấy M sao cho $\hat{AMC}=90^{0}$, trên đoạn CH lấy N sao cho $\hat{ANB}=90^{0}$ .

Chứng minh rằng:

1. Tam giác $∆AMN cân$
2. $S\_{ABN}=\sqrt{S\_{ABH}.S\_{ABC}}$
3. $\frac{EF}{BC}+\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}\leq \frac{3}{2}$

**Câu 5.** (*2,0 điểm*)

Trên mặt phẳng cho 2023 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Bất kỳ 3 điểm nào cũng là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không vượt quá 2024. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích 8096 chứa 2023 điểm đã cho.

**----------------HẾT---------------**

Họ tên thí sinh: ………………………………………… Số báo danh: ……………………

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**Lớp 9 Năm học: 2023 – 2024**

**THAM KHẢO**

Đề thi môn: **Toán**

***(Hội đồng chấm thi có hướng dẫn chi tiết riêng)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu** | **Ý** | **Nội dung cần đạt** | **Điểm** |
| **1** | 1. **2đ**
 | Ta có :( $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a})^{2}=\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(b-c\right)^{2}}+\frac{1}{\left(c-a\right)^{2}}+\frac{2}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}+\frac{2}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}+\frac{2}{\left(c-a\right)\left(a-b\right)}$$$=\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(b-c\right)^{2}}+\frac{1}{\left(c-a\right)^{2}}+\frac{2\left(a-b+b-c+c-a\right)}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}=\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(b-c\right)^{2}}+\frac{1}{\left(c-a\right)^{2}}$$$$\sqrt{\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(b-c\right)^{2}}+\frac{1}{\left(c-a\right)^{2}}}$$$$=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right| là số hữu tỉ$$ | 0.50.50.50.5 |
| 1. **1đ**
 | Ta có: A =$ \sqrt{A}^{2}-16+16$$$=\left(\sqrt{A}+4\right)\left(\sqrt{A}-4\right)+16=\left(100…0\right).\left(99…92\right)+16=99…9200..016 $$$$ (100 chữ số 9, 101 chữ số 0)$$Tổng các chữ số của A là : 100.9 + 2 + 1 +6 = 909 | 0.250.250.250.25 |
| **2** | 1. **3đ**
 | $$Giả sử a\leq b\leq c⇒ab+bc+ca\leq 3bc$$$$⇒abc<3bc$$$$⇒a<3, mà a là số nguyên tố nên a=2.$$$$⇒2bc<2b+2c+bc⇒bc<2\left(b+c\right)vì b\leq c nên bc<4c⇒b<4.$$Nếu b= 2$⇒2c<4+2c \left( luôn đúng \right)$Nếu b = 3$⇒c<6⇒c=3 hoặc c=5.$Vậy các bộ số (2;2;c), (2;3;3),(2;3;5) và các hoán vị với c là số nguyên tố tùy ý. | 0.250.250.250.250.250.50.50.75 |
| 1. **4đ**
 | $$\sqrt{3x-2}=\frac{2x^{2}+2x-2}{3x-1}$$ĐKXĐ: $x\geq \frac{2}{3}$$$2x^{2}+2x-2-\left(3x-1\right)\sqrt{3x-2}=0$$3x -2 $-\left(3x-1\right)\sqrt{3x-2}+2x^{2}-x=0$3x -2 $-\left(3x-1\right)\sqrt{3x-2}+x\left(2x-1\right)=0$($\sqrt{3x-2}-x)\left(\sqrt{3x-2}-2x+1\right)=0$* $\sqrt{3x-2}-x=0$

$$⇔\sqrt{3x-2}=x⇔x^{2}-3x+2=0$$$$⇒x=1 \left(TM\right), x=2(TM)$$* $\sqrt{3x-2}-2x+1=0⇔\sqrt{3x-2}=2x-1⇔4x^{2}-7x+3=0⇒x=1 \left(TM\right), x=\frac{3}{4}(TM)$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm X=1, x= 2, x= $\frac{3}{4}$ | 0.250.250.250.250.51.01.00.5 |
| **3** | **2.0đ** | Chứng minh bài toán phụ: Với x,y là các số thực dương ta luôn có$$\frac{1}{\left(1+x\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+y\right)^{2}}\geq \frac{1}{1+xy}$$Dấu “=” xảy ra khi x= y = 1.$$\frac{1}{\left(1+a\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+b\right)^{2}}\geq \frac{1}{1+ab}$$$$\frac{1}{\left(1+b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+c\right)^{2}}\geq \frac{1}{1+bc}$$$$\frac{1}{\left(1+c\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+a\right)^{2}}\geq \frac{1}{1+ca}$$$$\frac{1}{\left(1+a\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+b\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+c\right)^{2}}\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)$$$$\geq \frac{1}{2}.\frac{9}{1+ab+1+bc+1+ca}=\frac{1}{2}.\frac{9}{6}=\frac{3}{4}$$Dấu “=” xảy ra khi a = b = c = 1 | 1.00.250.250.250.25 |
| **4** |  |  |  |
| 1. **2đ**
 | Chứng minh: Tam giác $∆AMN cân$Tam giác ABN vuông tại N, NF là đường cao nên $AN^{2}=AF.AB \left(1\right)$Tam giác AMC vuông tại M , có đường cao ME nên $AM^{2}=AE.AC \left(2\right)$Chứng minh được $$AF.AB= AE.AC (3)$$$$Từ \left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)suy ra$$$$ AN^{2}=AM^{2}⇒AM=AN⇒Tam giác AMN cân tại A$$ | 0.50.50.50.5 |
| 1. **2đ**
 | Chứng minh $S\_{ABN}=\sqrt{S\_{ABH}.S\_{ABC}}$$S\_{ABN}=\frac{1}{2}NF.AB$ (1)$$\sqrt{S\_{ABH}.S\_{ABC}}=\sqrt{\frac{1}{2}HF.AB.\frac{1}{2}CF.AB}$$$=\frac{1}{2}\sqrt{HF.CF}.AB$ (2)Chứng minh được HF.CF =AF.FB (3)Chứng minh được $NF^{2}=AF.FB$ (4)Từ (1), (2), (3), (4) ta được $S\_{ABN}=\sqrt{S\_{ABH}.S\_{ABC}}$ | 0.50.50.50.5 |
| 1. **2đ**
 | $$Chứng mimh \frac{EF}{BC}+\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}\leq \frac{3}{2}$$$$Tam giác AEF đồng dạng với$$$$ tam giác ABC nên$$$$\frac{EF}{BC}=\sqrt{\frac{S\_{AEF}}{S\_{ABC}}}=\sqrt{\frac{AE.AF}{AB.AC}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{AC}+\frac{AF}{AB}\right)}$$Tương tự: $\frac{DE}{AB}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{CD}{BC}+\frac{CE}{AC}\right)$$$\frac{DF}{AC}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{BC}+\frac{BF}{AB}\right)$$$$\frac{EF}{BC}+\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{AC}+\frac{AF}{AB}+\frac{CD}{BC}+\frac{CE}{AC}+\frac{BD}{BC}+\frac{BF}{AB}\right)=\frac{3}{2}$$Dấu “=” khi tam giác ABC đều. | 0.50.50.250.250.5 |
| **5** | **2đ** | Do số tam giác là hữu hạn nên tồn tại một tam giác trong số các tam giác tạo thành có diện tích lớn nhất. Gọi tam giác đó là $∆ABC, $$⇒S\_{ABC}\leq 2024$.Qua các đỉnh của tam giác ABC vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chúng cắt nhau tại M, N, P. Vì $S\_{ABC}\leq 2024⇒S\_{MNP}\leq 8096$Ta chứng minh được tam giác MNP chứa 2023 điểm đã cho.Thật vậy, giả sử có điểm D trong 2023 điểm đã cho nằm ngoài tam giác MNP (h. vẽ)Khi đó $S\_{DBC}>S\_{ABC}$ ( trái với giả thiết tam giác ABC có diện tích lớn nhất).Vậy tồn tại một tam giác có diện tích 8096 chứa 2023 điểm đã cho. | 0.50.50.50.5 |

 --------------- Hết -------------