***Bài 2. Hàm số bậc hai***

**Từ khoá: Hàm số bậc hai; Tập giá trị của hàm số bậc hai; Biến thiên; Parabol; Đỉnh; Trục đối xứng; Quỹ đạo parabol.**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **Các hàm số này có chung đặc điểm gì?** | |

***1. Hàm số bậc hai***

 Khai triển biểu thức của các hàm số sau và sắp xếp theo thứ tự lũy thừa của giảm dần (nếu có thể). Hàm số nào có lũy thừa bậc cao nhất của là bậc hai?

a)

b)

c)

|  |
| --- |
| ***Hàm số bậc hai*** theo biến là hàm số cho bởi công thức có dạng với là các số thực và khác 0.  Tập xác định của hàm số bậc hai là . |

***Ví dụ 1***

Hàm số nào trong các hàm số sau đây là hàm số bậc hai?

a)

b)

c)

d)

e)

***Giải***

Hàm số và hàm số đều là hàm số bậc hai.

Các hàm số không phải là hàm số bậc hai.

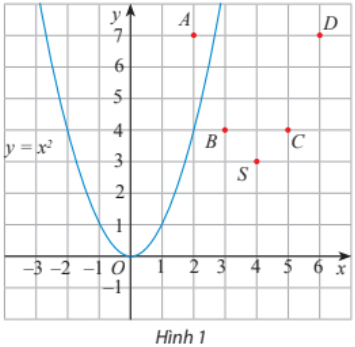
 Hàm số nào trong các hàm số được cho ở  là hàm số bậc hai?

***2. Đồ thị hàm số bậc hai***

 a) Xét hàm số:

có bảng giá trị:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 7 | 4 | 3 | 4 | 7 |



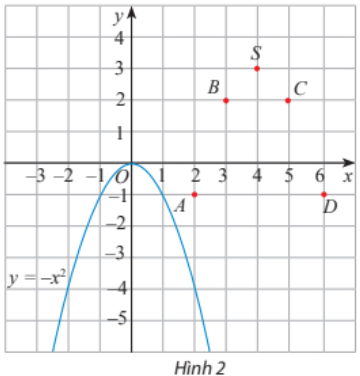
Trên mặt phẳng toạ độ, ta có các điểm với thuộc bảng giá trị đã cho (Hình 1).

Hãy vẽ đường cong đi qua các điểm và nêu nhận xét về hình dạng của đường cong này so với đồ thị của hàm số trên Hình 1.

b) Tương tự, xét hàm số:

có bảng giá trị:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | -1 | 2 | 3 | 2 | -1 |



Trên mặt phẳng toạ độ, ta có các điểm với x thuộc bảng giá trị đã cho (Hình 2).

Hãy vẽ đường cong đi qua các điểm A, B, S, C, D và nêu nhận xét về hình dạng của đường cong này so với đồ thị của hàm số trên Hình 2.

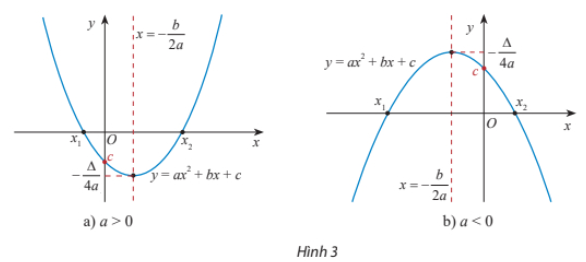
Từ , ta thấy hai dạng cơ bản của đồ thị hàm số bậc hai ứng với hai trường hợp và .

Một cách tổng quát, sau khi biến đổi với và người ta chứng minh được rằng trong mặt phẳng tọa độ , đồ thị hàm số bậc hai có hình dạng là một parabol và có đỉnh .

|  |
| --- |
| Trong mặt phẳng toạ độ , ***đồ thị hàm số bậc hai*** (với ) là một parabol ():  - Có ***đỉnh S*** với hoành độ , tung độ ;  - Có ***trục đối xứng*** là đường thẳng (đường thẳng này đi qua đỉnh và song song với trục );  - Bề lõm quay lên trên nếu , quay xuống dưới nếu ;  - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng , tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ . |

***Chú ý:*** a) Nếu thì () có đỉnh

b) Nếu phương trình có hai nghiệm thì đồ thị hàm số bậc hai cắt trục hoành tại hai điểm lần lượt có hoành độ là hai nghiệm này? (xem Hình 3).



|  |
| --- |
| Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai (với 0):  1) *Xác định toạ độ đỉnh* .  2) *Vẽ trục đối xứng* là đường thẳng  3) *Tìm toạ độ giao điểm* của đồ thị với trục tung (điểm ) và giao điểm của đồ thị với trục hoành (nếu có).  Xác định thêm điểm đối xứng với qua trục đối xứng d, là điểm  4) *Vẽ parabol* có đỉnh , có trục đối xứng , đi qua các điểm tìm được. |

***Ví dụ 2***

Vẽ đồ thị các hàm số :

a) ;

b)

***Giải***

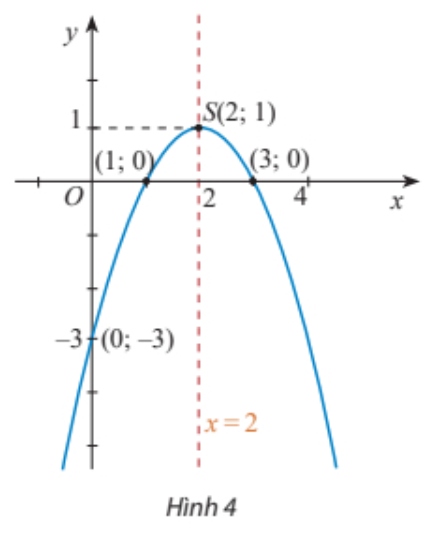
a) Trong mặt phẳng toạ độ , đồ thị hàm số bậc hai là một parabol ():

- Có đỉnh với hoành độ , tung độ ;

- Có trục đối xứng là đường thẳng x = 2 (đường thẳng này đi qua đỉnh và song song với trục );

- Bề lõm quay xuống dưới vì ;

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng , tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ .



Ngoài ra, phương trình có hai nghiệm phân biệt và nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (1; 0) và (3; 0).

Ta vẽ được đồ thị như Hình 4.

b) Trong mặt phẳng toạ độ , đồ thị hàm số bậc hai là một parabol ():

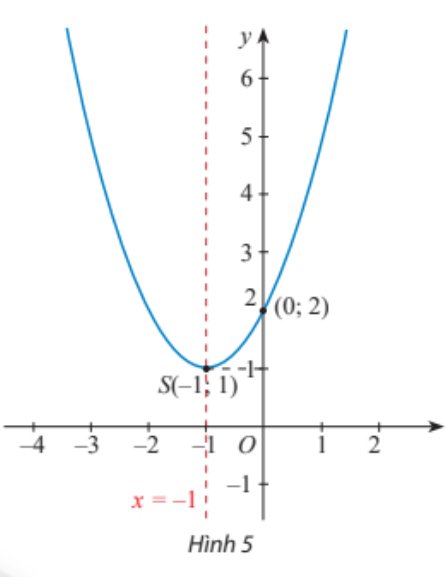
- Có đỉnh với hoành độ , tung độ ;

- Có trục đối xứng là đường thẳng (đường thẳng này đi qua đỉnh và song song với trục );

- Bề lõm quay lên trên vì a > 0;

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ (0; 2).

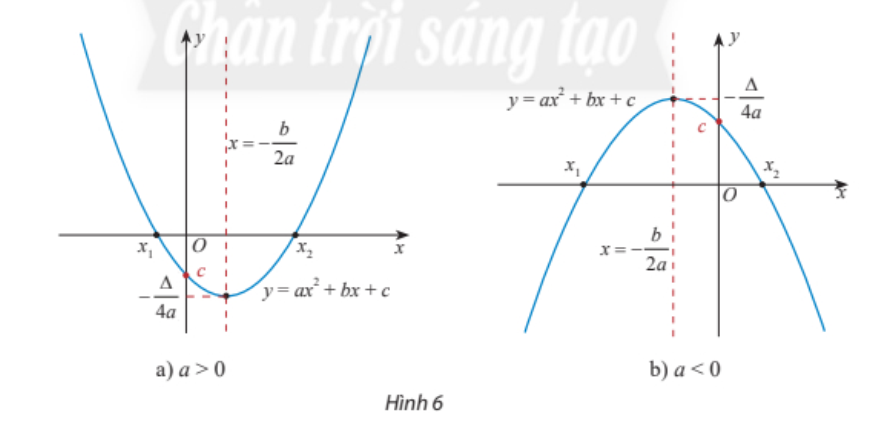
Ta vẽ được đồ thị như Hình 5.



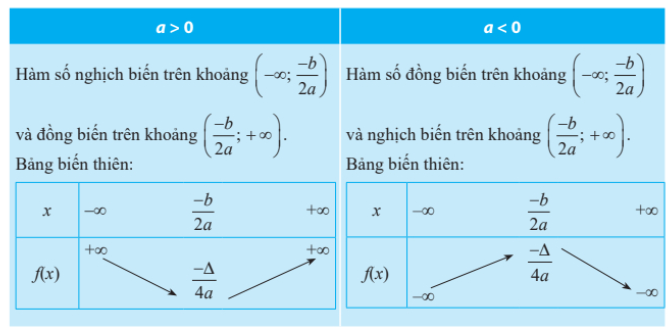
 Vẽ đồ thị hàm số rồi so sánh đồ thị hàm số này với đồ thị hàm số trong Ví dụ 2a. Nêu nhận xét về hai đồ thị này.

***3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai***

 Từ đồ thị của hàm số bậc hai cho ở hai hình sau, tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số trong mỗi trường hợp.



Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai (với ), ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số này như sau:



***Chú ý:***

Từ bảng biến thiên của hàm số bậc hai, ta thấy:

- Khi , hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng tại và hàm số có tập giá trị là .

- Khi , hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng tại và hàm số có tập giá trị là .

***Ví dụ 3***

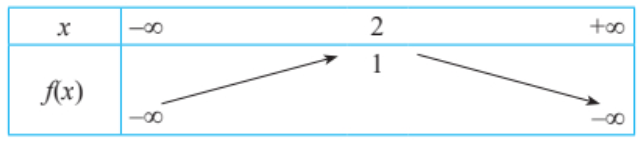
Lập bảng biến thiên của hàm số . Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

***Giải***

Đỉnh có tọa độ

Hay

Vì hàm số bậc hai có nên ta có bảng biến thiên sau:



Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi .

 Tìm khoảng đồng biền, khoảng nghịch biến của hàm số. Hàm số này có thể đạt giá trị bằng -1 không? Tại sao?

***4. Ứng dụng của hàm số bậc hai***

**Tầm bay cao và tầm bay xa**



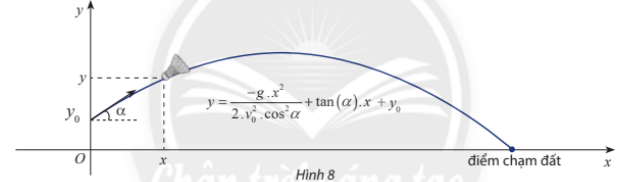
Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng toạ độ , chọn điểm có toạ độ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

trong đó:

* g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là 9,8 m/s2);
* là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
* là vận tốc ban đầu của cầu;
* là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.



Xét trường hợp lặng gió, với vận tốc ban đầu và góc phát cầu đã biết, cầu chuyển động theo quỹ đạo parabol nên sẽ:

- Đạt vị trí cao nhất tại đỉnh parabol, gọi là *tầm bay cao*;

- Rơi chạm đất ở vị trí cách nơi đứng phát cầu một khoảng, gọi là *tầm bay xa*.

**Bài toán ứng dụng**

Một người đang tập chơi câu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 30o (so với mặt đất).

a) Hãy tính khoảng cách từ vị trí người này đến vị tri cầu rơi chạm đất (tầm bay xa), biết cầu rời mặt vợt ở độ cao 0,7 m so với mặt đất và vận tốc ban đầu của cầu là 8 m/s (bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng).

b) Giữ giả thiết như câu a) và cho biết khoảng cách từ vị trí phát câu đến lưới là 4 m. Lần phát cầu này có bị xem là hỏng không? Tại sao?

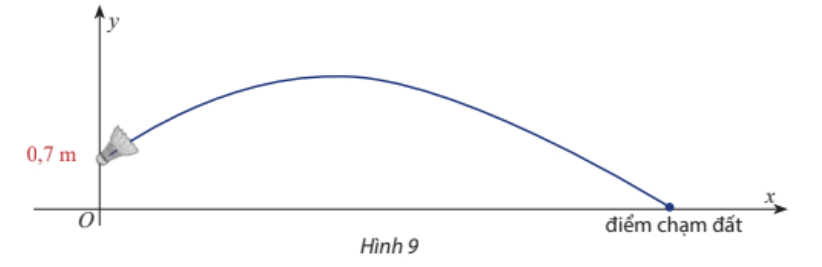
(*Thông tin bổ sung*:

- Mẹp trên của lưới câu lông cách mặt đất 1,524 m;

- Gia tốc trọng trường được chọn là 9,8 m/s2.)

***Giải***

a) Chọn hệ trục toạ độ như Hình 9 (vị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu với mặt vợt thuộc trục tung).



Với = 9,8 m/s2, góc phát cầu, vận tốc ban đầu = 8 m/s, phương trình quỹ đạo của cầu là:

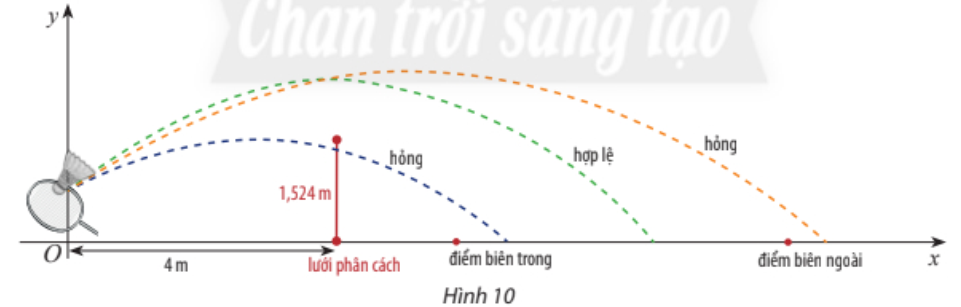
(với ).

Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên giải phương trình ta được và .

Giá trị nghiệm dương cho ta khoảng cách từ vị trí người chơi cầu lông đến vị trí câu rơi chạm đất là 6,68 m.

b) Khi cầu bay tới vị tri lưới phân cách, nếu nó ở bên trên mặt lưới và điểm rơi không ra khỏi đường biên phía bên sân đối phương thì lần phát cầu mới được xem là hợp lệ.

Ta cần so sánh tung độ của điểm trên quỹ đạo (có hoành độ bằng khoảng cách từ gốc toạ độ đến chân lưới phân cách) với chiều cao mép trên của lưới để tìm câu trả lời.



Khi , ta có . Suy ra .

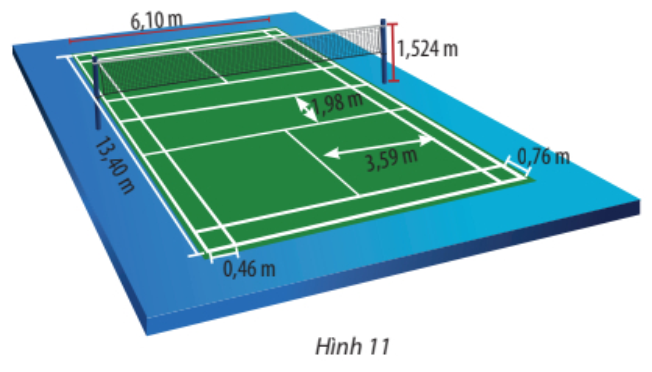
Như vậy lần phát cầu đã bị hỏng vì điểm trên quỹ đạo của cầu thấp hơn mép trên của lưới.

Trong bài toán ứng dụng, khi chơi trên sân cầu lông đơn, các lần phát cầu với thông tin như sau có được xem là hợp lệ không ? (Các thông tin không được đề cập thì vẫn giữ như trong giả thiết bài toán trên).

a) Vận tốc xuất phát của cầu là 12 m/s.

b) Vị trí phát cầu cách mặt đất 1,3 m.

Lưu ý: Các thông số về sân cầu lông đơn được cho trong Hình 11.



***BÀI TẬP***

1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai?

a) ;

c) ;

b) ;

d) .

2. Tìm điều kiện của để hàm số là hàm số bậc hai.

a) ;

b) .

3. Lập bảng biến thiên của hàm số. Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

4. Cho hàm số bậc hai có .

a) Hãy xác định giá trị của các hệ số a, b và c.

b) Xác định tập giá trị và khoảng biến thiên của hàm số.

5. Cho hàm số . Hãy xác định giá trị của để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5.

6. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)

c) ;

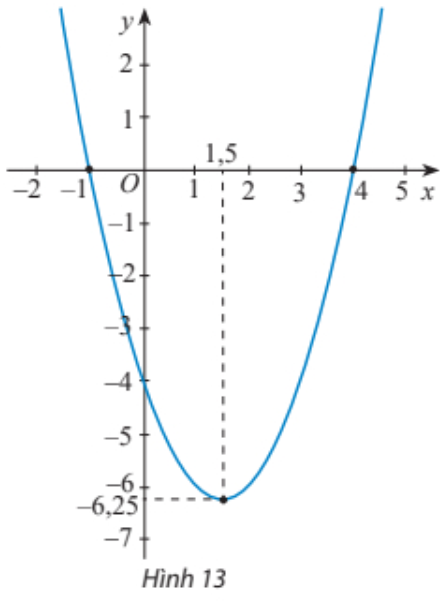
b)

d) .

7. Hãy xác định đúng đồ thị của mỗi hàm số sau trên Hình 12.



8. Tìm công thức của hàm số bậc hai có đồ thị như Hình 13.



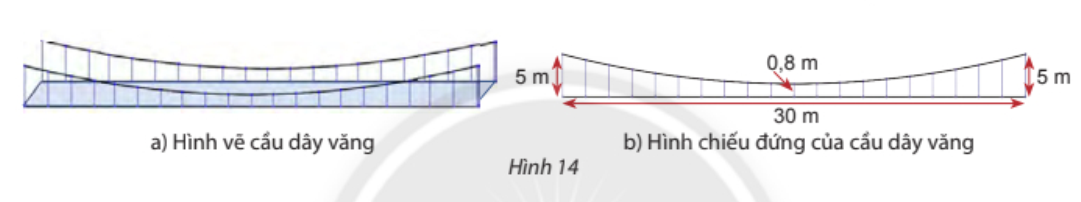
9. Chiếc câu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.

Dựa vào bản vẽ ở Hình 14, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết:

- Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

- Nhịp cầu dài 30 m.

- Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Bạn có biết?***  **Quy luật tự nhiên và hình dạng parabol**  Vật chuyển động bởi ném xiên hay ném ngang có quỹ đạo là một phần của parabol.  Hiện tượng này quan sát được khi ném bóng, nhảy xa, trượt tuyết nhảy trên không, vòi nước phun,…  Trong khi đó, chuyển động rơi tự do hoặc chuyển động lăn trên mặt phẳng nghiêng có  độ dài quãng đường tuân theo quy luật một hàm số bậc hai theo thời gian , mặc dù quỹ đạo chuyển động là đường thẳng. Nhà vật lí học Galilei, đồng thời cũng là một nhạc sĩ, đã thiết kế bộ dụng cụ đo quãng đường lăn của vật nặng trên mặt phẳng nghiêng sau những khoảng thời gian như nhau để chứng minh kết quả này. Thời đó chưa có thiết bị phủ hợp nên ông đã dùng những chiếc chuông để phát ra âm thanh cách đều thời gian mỗi khi viên bi lăn tới. Thật khó tin nhưng Galilei nhạy bén với âm thanh và ông nhận ra quãng đường lại không như nhau dù các khoảng thời gian là đều nhau.      **Quỹ đạo parabol**  Khi một vật từ vị trí bị ném xiên lên cao theo góc (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu thì phương trình quỹ đạo của vật này là:  Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động là một parabol.    Khoảng cách được gọi là *tầm bay cao*, còn khoảng cách được gọi là *tầm bay xa*.  Nếu vận tốc ban đầu có độ lớn không đổi, thì góc ném ảnh hướng đến tầm bay cao và tầm bay xa.  - Trong thể thao, vận động viên môn ném lao, ném đĩa hay nhảy xa, … có lực ném gần như ổn định. Do vậy, việc điều chỉnh góc ném chính là kĩ thuật để đạt mục tiêu xa nhất.  - Binh chủng Pháo binh Việt Nam có câu khẩu hiệu “Chân đồng, vai sắt, đánh giới, bắn trúng” gắn liền với kĩ thuật điều chinh vận tốc ban đầu và góc để đạn pháo trúng mục tiêu.  *(Nguồn:* https://www.researchgate.net) |  |