

A. ĐẶT VẤN ĐỀ :

Phát triển năng lực trí tuệ cho học sinh là nhiệm vụ, mục đích trong công tác giảng dạy, là mong muốn của mỗi giáo viên đối với học sinh, đặc biệt trong môn toán ở trường trung học phổ thông. Toán học nói chung, hình học nói riêng là mảnh đất màu mỡ có thể khai thác để phát triển tư duy, trong đó tương tự hóa là một trong những thao tác tư duy quan trọng cần rèn luyện.

Tương tự hóa được hiểu là quá trình suy nghĩ phát hiện sự giống nhau giữa hai đối tượng để từ những sự kiện đã biết của đối tượng này dự đoán những sự kiện mới chưa biết tương ứng với đối tượng kia.

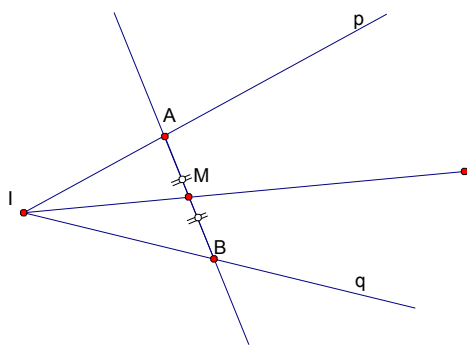
Trong mối liên hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian, với cơ sở là mặt phẳng là một bộ phận của không gian ta chú trọng tách các bộ phận phẳng ra khỏi không gian bằng các hình vẽ (các phần được tách ra thường là thiết diện, giao tuyến....) nhằm giúp học sinh liên tưởng đến các bài toán hình học phẳng để từ đó giải quyết được bài toán ban đầu. Trong quá trình giảng dạy tôi nhận thấy học sinh rất e ngại học môn hình học không gian vì các em nghĩ rằng nó rất trừu tượng, thiếu tính thực tế khách quan. Chính vì thế mà có rất nhiều học sinh học yếu môn học này, về phần giáo viên cũng gặp không ít khó khăn khi truyền đạt nội dung kiến thức. Để giải bài tập hình học không gian một cách thành thạo thì một trong yếu tố quan trọng là biết kết hợp các kiến thức của hình học không gian và hình học phẳng, phải tìm ra mối liên hệ của chúng; sự tương tự giữa HHP và HHKG, giúp học sinh ghi nhớ lâu các kiến thức hình học, vận dụng tốt các kiến thức đã học. Vì vậy để giúp học sinh học tốt môn hình học lớp 11 tôi đã chọn đề tài **“VẬN DỤNG TƯƠNG TỰ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN”**.

Việc sử dụng phương pháp giải đối với một bài toán hình học phẳng để giải một bài toán hình học không gian tương tự và mở rộng một số bài toán phẳng sang bài toán trong không gian mới sẽ giúp hoạt động giảng dạy và học tập môn hình học đạt hiệu quả cao hơn.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HOẠ

Bài toán 1: Trong mặt phẳng cho hai nửa đường thẳng q và p cắt nhau tại I . Một đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng q và p . Một đường thẳng di động song song với Δ và cắt hai đường thẳng q, p lần lượt tại A và B . Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng AB .

Nhận xét: Bài toán này có phương pháp giải khá đơn giản và được kết quả: Quỹ tích trung điểm đoạn thẳng AB là đường thẳng IM trong đó M là trung điểm của đoạn thẳng AB . (hình 1)



Hình 1

Bây giờ ta xét bài toán tương tự bài toán này trong không gian như sau:

Bài toán 1': Trong không gian, cho hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) , có giao tuyến là đường thẳng d và một đường thẳng Δ cắt (P) và (Q) . Một đường thẳng di động luôn song song với Δ cắt (P) và (Q) lần lượt tại A và B . Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng AB .

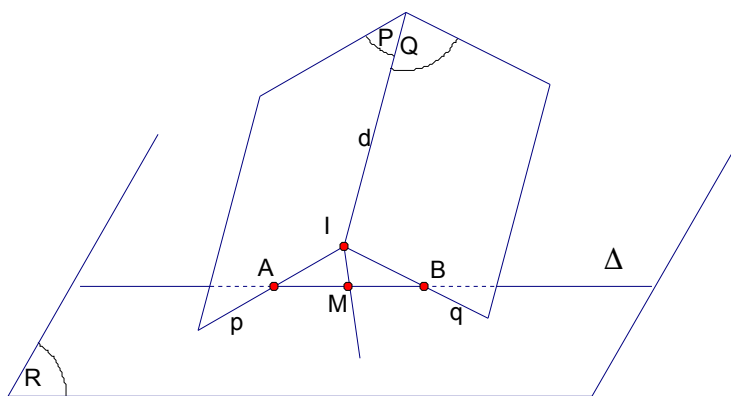
Giải

Ta xét trường hợp đặc biệt khi đường thẳng di động và song song với Δ nằm trong mặt phẳng (R) chứa đường thẳng Δ và cắt đường thẳng d tại I .

Mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P) và (Q) theo hai đường thẳng q và p . Trong mặt phẳng (R) quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là đường thẳng IM như hình vẽ 2).

Cho mặt phẳng (R) di động và song song với chính nó thì đoạn thẳng IM vạch trên nửa mặt phẳng (d, M) và đó là kết quả bài toán.

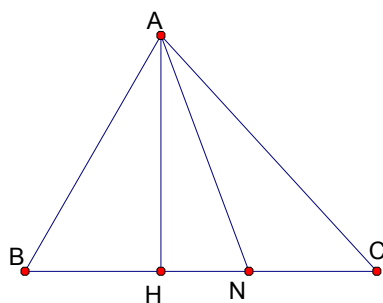
Tóm lại, quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là nửa mặt phẳng chứa đường thẳng d và trung điểm của một đoạn thẳng PQ bất kì.



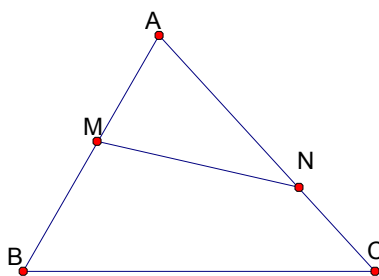
Hình 2

Bài toán 2: Trong mặt phẳng, chứng minh rằng độ dài cạnh dài nhất của tam giác là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì nằm trên cạnh của tam giác.

Giải



Hình 3



Hình 4

Gọi M, N là hai điểm bất kì nằm trên hai cạnh của tam giác ABC. Ta xét trường hợp đặc biệt:

+ Nếu M và N lần lượt trùng với hai đỉnh của tam giác ABC thì suy ra $MN \leq \max\{AB, BC, AC\}$.

+ Nếu M hoặc N trùng với một đỉnh của tam giác. Giả sử M trùng với A.

- Nếu N thuộc cạnh AB hoặc AC thì hiển nhiên.

- Nếu N thuộc BC:

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống cạnh BC.

Nếu N thuộc đoạn thẳng BH $\Rightarrow MN \leq AB$.

Nếu N thuộc đoạn thẳng CH $\Rightarrow MN \leq AC$

$\Rightarrow MN \leq \max\{AB, BC, CA\}$

+ Nếu M và N không trùng với đỉnh nào của tam giác.

Giả sử $M \in AB, N \in AC$. Nối B với N (hình 3)

Như trên suy ra $MN \leq \max\{AB, BN, NA\}$

$\leq \max\{AB, NB, CA\} \leq \max\{AB, BC, CA\}$.

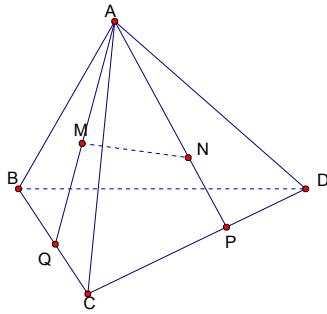
Tóm lại ta luôn có: $MN \leq \max\{AB, BC, CA\}$.

Bây giờ ta xét bài toán tương tự bài toán này trong không gian như sau:

Bài toán 2': Trong không gian, chứng minh rằng cạnh dài nhất của tứ diện là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì nằm trên tứ diện.

Nếu bài toán này trực tiếp giải thì đây có thể nói là một bài toán khá khó đối với học sinh phổ thông. Tuy nhiên nếu ta nhìn bài toán này ở một góc độ đơn giản hơn thì ta dễ thấy có một bài toán trong hình học phẳng tương tự với

bài toán này khi coi hình tứ diện trong hình học không gian tương tự với tam giác trong hình học phẳng.



Hình 5

Giải

Thật vậy, do M, N nằm trên tứ diện ABCD suy ra M nằm trên ít nhất một mặt của tứ diện. Giả sử $M \in (ABC)$, $N \in (ACD)$. (hình 3)

Đường thẳng AM cắt BC tại Q, đường thẳng AN cắt CD tại P.

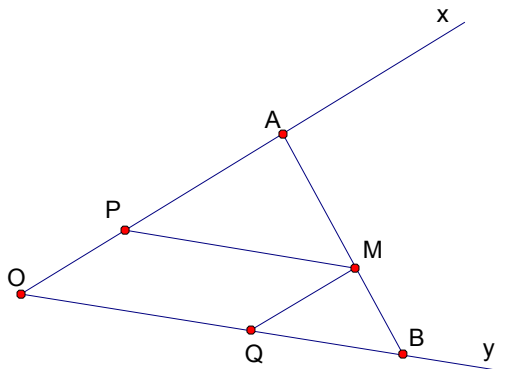
Áp dụng bài toán 2, ta có:

$$MN \leq \max \{AQ, AP, PQ\} \leq \max \{AB, BC, CA, PQ, AP\} \\ \leq \max \{AB, BC, CA, BD, CD, AD\}.$$

Vậy ta có: MN không lớn hơn cạnh lớn nhất của tứ diện nên cạnh dài nhất của tứ diện là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì nằm trên tứ diện. (đpcm)

Bài toán 3: Trong mặt phẳng, cho góc xOy và một điểm M nằm trong góc đó; Δ là một đường thẳng qua M và cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B. Xác định vị trí đường thẳng Δ để diện tích tam giác OAB đạt giá trị lớn nhất.

Giải:



Hình 6

Qua M ta kẻ lần lượt các đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại Q; song song với Oy cắt Ox tại P. (hình 6)

Vì M cố định nên P và Q cố định.

$$\text{Do } PM \parallel Oy \text{ và } QM \parallel Ox \text{ suy ra: } \frac{OP}{AO} = \frac{BM}{AB} = \frac{BQ}{OB} \Rightarrow \frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = \frac{BQ}{OB} + \frac{OQ}{OB} = \frac{OB}{OB} = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$1 = \left(\frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} \right)^2 \geq 4 \frac{OP}{OA} \cdot \frac{OQ}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB \geq 4 \cdot OP \cdot OQ$$

$$\text{Mặt khác, } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin O \geq 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin O = 4S_{OPQ}.$$

Do S_{OPQ} không đổi nên: $\max S_{OAB} = 4.S_{OPQ}$

Dấu bằng có được khi $\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} \Leftrightarrow AB \parallel PQ$

Từ đó ta có cách dựng: Qua M kẻ các đường thẳng song song với Ox và Oy, cắt Oy và Ox lần lượt tại P và Q. Qua M kẻ đường thẳng Δ song song với PQ thì Δ là đường thẳng cần dựng.

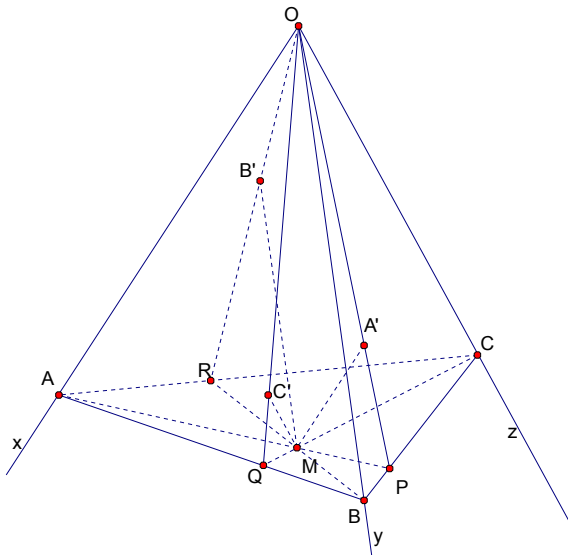
Nhận xét: Qua lời giải trên ta thấy bước quan trọng nhất là kẻ thêm hình (MP//Oy và MQ//Ox) và tìm mối liên hệ giữa diện tích của tam giác OAB và diện tích tam giác cố định OPQ. Khai thác phương hướng như vậy, ta giải quyết bài toán trong không gian như sau:

Bài toán 3': Trong không gian, cho góc tam diện Oxyz và một điểm M nằm trong góc tam diện; (α) là một mặt phẳng qua M và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Xác định vị trí của mặt phẳng (α) để thể tích tứ diện OABC đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Qua M kẻ lần lượt các đường thẳng song song với các tia Ox, Oy, Oz; cắt các mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy) lần lượt tại các điểm A', B' và C' (hình 4).

Do M cố định nên các điểm A', B' và C' cố định.



Hình 7

Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của đường thẳng AM với OA', CM với OC', BM với OB'. Suy ra $P \in BC$, $Q \in AB$, $R \in AC$.

Lấy các điểm A'', B'', C'' lần lượt đối xứng với các điểm A', B', C' qua điểm M. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A₀, B₀, C₀ sao cho: OA₀ = MA'', OB₀ = MB'', OC₀ = MC''.

$$\Rightarrow \frac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABC}} = \frac{OA_0 \cdot OB_0 \cdot OC_0}{OA \cdot OB \cdot OC} = \frac{MA'}{OA} \cdot \frac{MB'}{OB} \cdot \frac{MC'}{OC}$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \frac{MA'}{OA} + \frac{MB'}{OB} + \frac{MC'}{OC} = \frac{PM}{AP} + \frac{MK}{BK} + \frac{MQ}{CQ} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si:

$$1 = \left(\frac{MA'}{OA} + \frac{MB'}{OB} + \frac{MC'}{OC} \right)^3 \geq 27 \frac{MA'}{OA} \cdot \frac{MB'}{OB} \cdot \frac{MC'}{OC} (*)$$

Do M cố định suy ra: MA', MB', MC' không đổi

Từ (*) ta có: $OA \cdot OB \cdot OC \geq 27 \cdot MA' \cdot MB' \cdot MC'$

Suy ra: $V_{OABC} \geq V_{OA'B'C'}$

$$\Rightarrow \min V_{OABC} = 27 \cdot V_{OA'B'C'} \Leftrightarrow \frac{MA'}{OA} = \frac{MB'}{OB} = \frac{MC'}{OC} \Leftrightarrow \frac{MR}{AR} = \frac{MP}{BP} = \frac{MQ}{CQ} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC .

Từ đây ta có cách dựng hình của bài toán:

Gọi Δ là đường thẳng qua M và song song với Ox cắt mặt phẳng (Oyz) tại A' .

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Ox và M cắt mặt phẳng (Oyz) theo đường thẳng $\Delta' \Rightarrow A \in \Delta'$.

Trên Δ' lấy điểm P sao cho A' nằm giữa O và R thỏa mãn: $OP = \frac{3}{2}OA'$

Đường thẳng MR cắt Ox tại A .

Dựng các điểm B, C tương tự với điểm A .

Theo chứng minh thì ta dựng được mặt phẳng (α) qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C để thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị lớn nhất. Theo cách dựng thì mặt phẳng (α) là duy nhất. (đpcm)

Bài toán 4: Trong mặt phẳng, tìm những điểm từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với một đường tròn cho trước và vuông góc với nhau.

Nhận xét: Đây là một bài toán rất đơn giản và dễ dàng ta có kết quả: Quỹ tích những điểm thỏa mãn bài toán là một đường tròn đồng tâm với đường tròn đã cho và có bán kính là $\sqrt{2}R$. (với R là bán kính đường tròn đã cho).

Với kết quả như vậy ta có thể dự đoán kết quả của bài toán sau:

Bài toán 4': Trong không gian, tìm quỹ tích những điểm từ đó có thể dựng đến một mặt cầu cho trước ba tiếp tuyến đôi một vuông góc nhau.

Dự đoán: quỹ tích là một mặt cầu đồng tâm với mặt cầu đã cho.

Để chứng minh dự đoán này ta phải chứng minh nếu M là một điểm thuộc quỹ tích thì OM luôn không đổi (O là tâm mặt cầu đã cho).

Giải

Gọi M là một điểm thuộc quỹ tích bài toán; MA, MB, MC là ba tiếp tuyến từ M đến mặt cầu cho trước $(O; R)$. (hình 5)

Ta có: $MA = MB = MC$ và $MA \perp MB, MB \perp MC, MC \perp MA$.

Do đó tam giác ABC là tam giác đều và đường vuông góc AI hạ từ A xuống MO cũng là đường cao của ΔABC .

Đặt: $MA = a; OA = R$, ta có: $AB^2 = MA^2 + MB^2 = 2a^2$.

$$\Rightarrow AB = BC = CA = a\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{1}{\sqrt{3}} AB = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Mặt khác trong tam giác vuông BMO ta có: $BM \cdot BO = BI \cdot BO$

$$\Rightarrow MO = \frac{BM \cdot BO}{BI} = \frac{a \cdot R \cdot \sqrt{3}}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$$

Vậy điểm M thuộc quỹ tích thì nó phải nằm trên mặt cầu $(O; \frac{R\sqrt{6}}{2})$.

Trong các bài toán toán trên ta đã vận dụng sự tương tự từ lời giải một bài toán trong hình học phẳng để tìm ra lời giải của bài toán trong hình học không gian. Tuy nhiên có những bài toán tương tự như nhau nhưng lời, phương pháp giải lại hoàn toàn khác nhau, có thể trong hình học phẳng thì lại đơn giản nhưng

khi chuyển sang hình học không gian thì rất khó. Chính vì lẽ đó mà vận dụng sự tương tự giữa hình học phẳng và hình học không gian để giải các bài toán trong hình học không gian chỉ là cung cấp thêm một phương pháp suy nghĩ, một phương pháp giải toán áp dụng cho một số bài toán hình học không gian.

Nếu như trong giải toán hình học không gian nhờ vào tương tự giữa nó với một bài toán tương tự trong hình học phẳng đòi hỏi học sinh có một kiến thức vững vàng về hình học phẳng, có trí tưởng tượng hình học không gian tốt thì quá trình suy nghĩ từ một bài toán hình học phẳng rồi đề xuất một bài toán tương tự trong hình học không gian sau đó tìm cách giải quyết bài toán mới đó đòi hỏi ở học sinh ngoài những kiến thức cần thiết như trên mà còn cần ở các em có khả năng nhìn nhận vấn đề dưới từng góc độ và nhiều phương diện khác nhau. Muốn thực hiện được điều đó trước tiên phải nắm được và hiểu được các yếu tố, mối quan hệ tương tự có tính chất cơ bản giữa hình học phẳng và hình học không gian. Sau đó là sử dụng các kiến thức hình học không gian hoặc áp dụng tính chất tương tự trong lời giải của bài toán hình học phẳng để giải bài toán đặt ra, nhiều khi bài toán đặt ra lại rất khó.

Trong điều kiện giảng dạy nếu người thầy giáo khai thác được các vấn đề đó là đã tạo điều kiện thuận lợi cho sự phát triển năng lực trí tuệ đặc biệt là năng lực tương tự hóa của học sinh trong khi học hình học không gian.

Bài toán 5: Trong mặt phẳng, ba đường trung tuyến trong tam giác đồng quy tại một điểm và điểm đó cách mỗi đường trung tuyến bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài của đường trung tuyến đó. Giao điểm ba đường trung tuyến được gọi là trọng tâm tam giác.

Đây là bài toán cơ bản trong hình học phẳng, bây giờ ta khai thác yếu tố "đường trung tuyến".

Nhận xét: Nếu ta nhìn đường trung tuyến dưới góc độ: Đường trung tuyến là đường nối đỉnh của tam giác với trung điểm cạnh đối diện thì ta có khái niệm đường trọng tuyến trong tứ diện là đường nối đỉnh của tứ diện với trọng tâm của mặt đối diện. Khi đó ta có bài toán tương tự:

Bài toán 5': Trong không gian, bốn đường trọng tuyến trong một hình tứ diện đồng quy tại một điểm, điểm đó cách mỗi đường bằng $\frac{1}{4}$ độ dài mỗi đường. Giao điểm của bốn đường trọng tuyến trong tứ diện gọi là trọng tâm của tứ diện. Ta lại xem yếu tố "đường trung tuyến" của tam giác dưới góc độ tương tự với mặt "trung tuyến" của tứ diện (mặt trung tuyến của tứ diện là mặt phẳng chứa một cạnh và đi qua trung điểm cạnh đối diện của tứ diện). Khi đó ta có một bài toán tương tự với bài toán 5 như sau:

Bài toán 5'': Trong không gian, sáu mặt trung tuyến của một tứ diện đồng quy tại một điểm.

Bây giờ ta xem "đường trung tuyến" trong tam giác dưới một góc độ khác nữa: Coi nó tương tự với đường nối trung điểm hai cạnh đối diện trong tứ diện lúc đó ta có bài toán sau:

Bài toán 5''': Trong không gian, ba đường thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện trong một tứ diện đồng quy tại một điểm.

Nhận xét: Vậy từ bài toán 5 về đường trung tuyến của tam giác, theo từng góc độ ta có các bài toán tương tự 5', 5'', 5'''. Bây giờ ta xét một bài toán về đường cao trong tam giác.

Bài toán 6: Trong mặt phẳng, ba đường cao của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó là trực tâm của tam giác.

Nhận xét: Nếu trong tứ diện ta gọi đường cao của tứ diện là đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt đối diện của tứ diện, thì đường cao trong tam giác được coi là tương tự với đường cao của tứ diện. Ta có bài toán tương tự sau:

Bài toán 6': Trong không gian, bốn đường cao của một tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm.

Dưới một góc độ khác ta nhìn đường cao trong tam giác tương tự với mặt cao trong tứ diện trực tâm (mặt cao của tứ diện là mặt phẳng chứa một cạnh của tứ diện và vuông góc với cạnh đối diện. Chỉ tồn tại với tứ diện trực tâm) khi đó ta có bài toán tương tự.

Bài toán 6'': Trong không gian, sáu mặt cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm.

Nhận xét: Bài toán 6 đúng trong tam giác bất kì. Bài toán 6' và 6'' chỉ đúng trong trường hợp tứ diện trực tâm. Vậy ta có kết luận sau:

"Trong không gian, bốn đường cao, sáu mặt cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm (Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện).

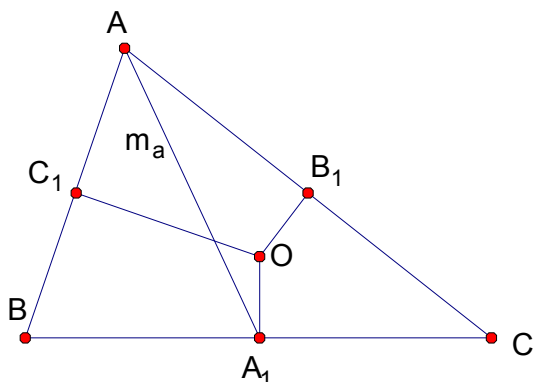
Từ bài toán trên cho thấy kết quả của tương tự chỉ là "giả thiết", vì vậy trong dạy học người thầy cần làm rõ cho học sinh biết được tính chất đó, kết quả tương tự có thể đúng hoặc sai, người thầy cần điều chỉnh con đường suy luận tương tự cho học sinh theo hướng đúng đắn, hợp lí theo tính chất toán học, giúp học sinh tìm cách bác bỏ những giả thuyết tương tự sai.

Bây giờ, ta xét một bất đẳng thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác qua bài toán sau.

Bài toán 7: Gọi $h_a, h_b, h_c; m_a, m_b, m_c; r; R$ lần lượt là độ dài các đường cao; đường trung tuyến; bán kính đường tròn nội tiếp; bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng: $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$.

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 và O lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác.



$$\text{Ta có: } AA_1 \leq OA + OA_1 \Rightarrow \frac{m_a}{h_a} \leq \frac{OA}{h_a} + \frac{OA_1}{h_a} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{m_b}{h_b} \leq \frac{OB}{h_b} + \frac{OB_1}{h_b} \quad (2)$$

$$\frac{m_c}{h_c} \leq \frac{OC}{h_c} + \frac{OC_1}{h_c} \quad (3)$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{OA}{h_a} + \frac{OB}{h_b} + \frac{OC}{h_c} + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq R \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}$$

$$\text{mà } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a+b+c}{(a+b+c)r} = \frac{1}{r}$$

$$\text{và } \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = \frac{\frac{2S_{OBC}}{a}}{\frac{2S_{ABC}}{a}} + \frac{\frac{2S_{OCA}}{b}}{\frac{2S_{ABC}}{b}} + \frac{\frac{2S_{OAB}}{c}}{\frac{2S_{ABC}}{c}} = \frac{S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$$

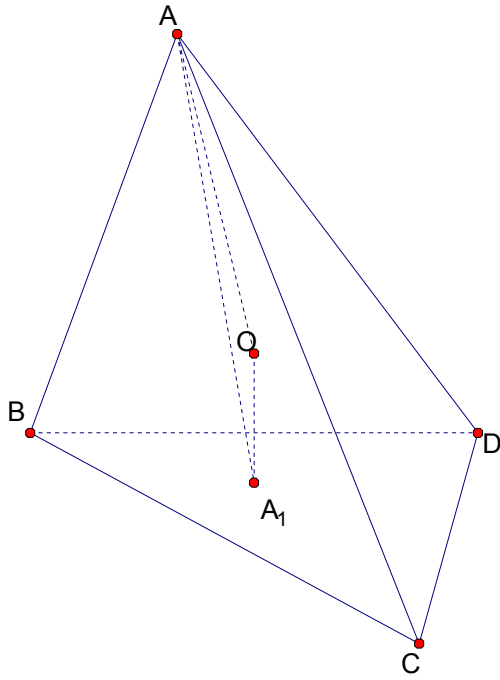
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow$ ABC đều.

Từ bài toán trên ta suy nghĩ để tìm ra bất đẳng thức tương tự đối với tứ diện: để có thể sử dụng bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện thì OA_1, OB_1, OC_1 trong tam giác phải tương tự với các trục của các tam giác là các mặt của tứ diện. Khi đó ta có AA_1 trong tam giác phải tương tự với khoảng cách từ đỉnh đến tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đối diện với đỉnh đó. Ta có bài toán tương tự như sau:

Bài toán 7': Gọi $h_a, h_b, h_c, h_d; m_a, m_b, m_c, m_d; r; R$ lần lượt là độ dài các đường cao; các đoạn thẳng nối đỉnh với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đối diện trong tứ diện; bán kính mặt cầu nội tiếp; bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác nhọn

ABC. Chứng minh rằng: $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} + \frac{m_d}{h_d} \leq 1 + \frac{R}{r}$.

Giải



Gọi O, A₁, B₁, C₁, D₁ lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm các đường tròn ngoại tiếp các mặt bên BCD, ACD, ABD, ABC của tứ diện ABCD.

AA₁ = m_a, BB₁ = m_b, CC₁ = m_c, DD₁ = m_d.

Ta có: AA₁ ≤ OA + OA₁ ⇒ $\frac{m_a}{h_a} \leq \frac{OA}{h_a} + \frac{OA_1}{h_a}$ (1)

Tương tự ta có:

$$\frac{m_b}{h_b} \leq \frac{OB}{h_b} + \frac{OB_1}{h_b} \quad (2)$$

$$\frac{m_c}{h_c} \leq \frac{OC}{h_c} + \frac{OC_1}{h_c} \quad (3)$$

$$\frac{m_d}{h_d} \leq \frac{OD}{h_d} + \frac{OD_1}{h_d} \quad (4)$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức (1), (2), (3), (4) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} + \frac{m_d}{h_d} &\leq \frac{OA}{h_a} + \frac{OB}{h_b} + \frac{OC}{h_c} + \frac{OD}{h_d} + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} + \frac{OD_1}{h_d} \\ &\Leftrightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} + \frac{m_d}{h_d} \leq R \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \right) + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} + \frac{OD_1}{h_d} \\ \text{mà } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} &= \frac{1}{r} \text{ và } \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} + \frac{OD_1}{h_d} = 1 \end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} + \frac{m_d}{h_d} \leq 1 + \frac{R}{r}$ (đpcm)

Nhận xét: Từ bài toán này ta thấy nếu ta xét tính tương tự: đường trung tuyến trong tam giác tương tự như đường trọng tuyến của tứ diện thì sẽ cho ta bài toán tương tự không đúng trong không gian, nhưng nếu ta nhìn vào cách giải của bài toán 7 thì cho ta kết quả là bài toán tương tự 7'. Thông thường nếu ta nhìn vào bản chất vấn đề, tạm thời bỏ qua các yếu tố bên ngoài thì dễ đưa ta đến kết quả tương tự đúng. Vì vậy trong dạy học, người thầy cần hướng dẫn học sinh đề xuất

và giải quyết bài toán mới tương tự với bài toán hình học phẳng đã biết không những phải dựa vào yếu tố tương tự giữa hình học phẳng và hình học không gian mà còn phải quan tâm đến cách giải bài toán, nhìn vào bản chất của vấn đề ta sẽ thu được kết quả tốt hơn.

Tương tự làm như vậy, ta cũng có một số bài toán và khái niệm tương tự

Bài toán	Hình học phẳng	Hình học không gian
8	Ba đường trung trực ứng với ba cạnh của một tam giác đồng quy tại một điểm	Sáu mặt phẳng trung trực ứng với sáu cạnh của một tứ diện đồng quy tại một điểm.
	Tồn tại duy nhất một đường tròn ngoại tiếp tam giác.	Tồn tại duy nhất một mặt cầu ngoại tiếp một hình tứ diện.
9	Khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $d: Ax+By+C=0$ là: $d(M, d) = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ là: $d(M, d) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
10	Khái niệm phương tích của 1 điểm M đối với đường tròn (I, R) . $P_{M/(I, R)} = MI^2 - R^2$	Khái niệm phương tích của 1 điểm M đối với một mặt cầu $S(I, R)$ $P_{M/S(I, R)} = MI^2 - R^2$
11	Gọi a, b, c, R lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2.R$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ca.\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$	Cho góc tam diện $Oxyz$, ba góc phẳng ở đỉnh là α, β, γ . Các góc nhị diện đối diện với các mặt đó là A, B, C . ta có: $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$ $\cos \alpha = \cos \beta . \cos \gamma + \sin \beta . \sin \gamma . \sin A$ $\cos A = \sin B . \sin C . \cos \alpha - \cos B . \cos C$
12	Trong tam giác, ba đường trung tuyến đồng quy tại một điểm và điểm này chia các đường trung tuyến theo tỉ lệ 2:1. Độ dài đường trung tuyến m_a đi qua đỉnh A của tam giác ABC được xác định theo độ dài các cạnh là a, b, c của tam giác ABC như sau: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$	Trong tứ diện bốn đường trọng tuyến đồng quy tại một điểm và điểm này chia các đường trọng tuyến theo tỉ lệ 3:1. Độ dài đường trọng tuyến đi qua đỉnh A của tứ diện $ABCD$ được tính theo độ dài của các cạnh của tứ diện như sau: $m_a^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (d^2 + e^2 + f^2)}{9}$ trong đó: a, b, c là độ dài 3 cạnh của tứ diện đi qua đỉnh A. d, e, f là độ dài 3 cạnh của tứ diện không đi qua A.

13	Ba đường phân giác trong tam giác đồng quy tại một điểm và một đường phân giác trong của một góc tam giác ứng với một đỉnh chia cạnh đối diện thành hai phần có độ dài tương ứng tỉ lệ với độ dài hai cạnh của góc đó	Các mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện tương ứng với các cạnh của tứ diện đồng quy tại một điểm và mỗi mặt phẳng phân giác của góc nhị diện ứng với một cạnh chia cạnh đối diện làm hai phần có độ dài tương ứng tỉ lệ với diện tích hai mặt của góc nhị diện đó.
	Tồn tại và duy nhất một đường tròn nội tiếp trong một tam giác.	Tồn tại và duy nhất một mặt cầu nội tiếp trong một tứ diện .
14	Gọi $AA_1, BB_1, CC_1, H, M, N, P$ lần lượt là đường cao, trục tâm, trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . I, J, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AH, BH, CH . Khi đó $A_1, B_1, C_1, M, N, P, I, J, K$ cùng nằm trên một đường tròn (đường tròn Ôle)	Trong tứ diện có các cạnh đối diện vuông góc với nhau. Gọi AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 , lần lượt là các đường cao của tứ diện $ABCD$ và gọi H là giao điểm của các đường cao. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các mặt của tứ diện; gọi I, J, K, F thuộc các đoạn thẳng HA, HB, HC, HD sao cho: $\frac{HI}{HA} = \frac{HJ}{HB} = \frac{HK}{HC} = \frac{HF}{HD} = \frac{1}{3}$. khi đó 12 điểm: $A_1, B_1, C_1, D_1, M, N, P, Q, I, J, K, F$ cùng nằm trên một mặt cầu.
15	Một đường thẳng d cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại B', C' . Ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB.AC}{AB'.AC'}$	Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AB, AC, AD của tứ diện $ABCD$ lần lượt tại B', C', D' . Ta có $\frac{V_{ABC}}{V_{AB'C'D'}} = \frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}$
16	Một điểm M nằm trong tam giác ABC , các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh của tam giác tại A', B', C' . Ta có $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$	Một điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$, các đường thẳng AM, BM, CM, DM lần lượt cắt các mặt của tứ diện tại A', B', C', D' . Ta có: $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} = 1$

C.KẾT LUẬN

Trên đây chỉ giải quyết được một số mối quan hệ tương tự nhỏ giữa hình học phẳng và hình học không gian thông qua một số bài toán cụ thể, trong đó thể hiện rõ nhất là các bài tương tự giữa tam giác và tứ diện. Qua việc khai thác mối quan hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian sẽ giúp cho các em học sinh nắm bắt kiến thức hình học không gian một cách nhanh chóng, vững vàng khi đã được học những kiến thức hình học phẳng ở những lớp dưới và có cái nhìn về mối quan hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian trong một thể thống nhất, biện chứng.

Để hiểu sâu hơn về vấn đề này, nhất là việc ứng dụng trong việc giảng dạy và học tập tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp rút kinh nghiệm của các đồng nghiệp để bài viết thêm đầy đủ, có thể trở thành một tài liệu tham khảo tốt phục vụ cho việc giảng dạy của giáo viên và kích thích hứng thú học tập, tìm tòi của học sinh.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 05 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến kinh nghiệm của mình viết, không sao chép nội dung người khác.

Trần Ngọc Thắng

D.TÀI LIỆU THAM KHẢO.

- [1] Hàn Liên Hải - Phan Huy Khải, Toán bồi dưỡng học sinh THPT HH 10, 11 ,NXB Hà Nội 2001.
- [2] Hoàng Chúng, Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông, NXB Giáo dục 199.
- [3] Nguyễn Đức - Nguyễn Việt Hải, Các bài toán về diện tích đa giác, NXB Hải Phòng.
- [4] Phan Huy Khải - Nguyễn Đạo Phương, Các bài toán chọn lọc về hệ thức lượng trong tam giác và tứ diện, NXB Giáo Dục 2001.
- [5] Văn Như Cương, Hình Học 10, 11, Hình hộp và tứ diện, NXB Giáo Dục.
- [6] Tài liệu tìm hiểu trên mạng.

