

Người làm: Nguyễn Quang Quý

Zalo: Quang Quy

Email: quangquytk@gmail.com

- số đt zalo: 0979880759

CD10: CHỨNG MINH BĐT VÀ TÌM GTLN,GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Câu 1: (HSG 7 huyện Đức Thọ 2016 - 2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức $A = |x + 5| + 5$.

Lời giải

Ta có: $|x + 5| \geq 0$ nên $A = |x + 5| + 5 \geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5, đạt được khi $x = -5$.

Câu 2: (HSG 7 THCS Cự Khê 2013 - 2014)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3$.

Lời giải

Ta có: $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x

$|y - x| \geq 0$ với mọi x, y

$\Rightarrow A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3 \geq 3$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ |y - x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A nhỏ nhất bằng 3, đạt được khi $x = 2; y = 2$.

Câu 3: (HSG 7 Tỉnh Bắc Giang, 2012 - 2013)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên.

Lời giải

$P = |x - 2012| + |x - 2013|$

Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

Nếu $x > 2013$ thì $x - 2012 > 1 > 0 \Rightarrow |x - 2012| = x - 2012 > 1$

Nên $P = |x - 2012| + |x - 2013| > 1 + |x - 2013| > 1$

Nếu $x < 2012$ thì $x - 2013 < -1 < 0 \Rightarrow |x - 2013| = 2013 - x$

Mà $x - 2013 < -1 \Rightarrow 2013 - x > 1 \Rightarrow |x - 2013| = 2013 - x > 1$

Nên $P = |x - 2012| + |x - 2013| > |x - 2012| + 1 > 1$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$.

Câu 4: (HSG 7 huyện.(đề 333) 2016 - 2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 2006| + |2007 - x|$ khi x thay đổi.

Lời giải

+ Nếu $x < 2006$ thì $x - 2006 < 0 \Rightarrow |x - 2006| = 2006 - x$

Vì $x < 2006 \Rightarrow x < 2007 \Rightarrow x - 2007 < 0 \Rightarrow 2007 - x > 0 \Rightarrow |2007 - x| = 2007 - x$

nên $A = -x + 2006 + 2007 - x = -2x + 4013$

Do $x < 2006 \Rightarrow -x > -2006 \Rightarrow -2x + 4013 > 2 \cdot (-2006) + 4013 = 1 \Rightarrow A > 1$

+ Nếu $2006 \leq x \leq 2007$

Vì $x \leq 2007 \Rightarrow 2007 - x \geq 0 \Rightarrow |2007 - x| = 2007 - x$

Vì $x \geq 2006 \Rightarrow x - 2006 \geq 0 \Rightarrow |x - 2006| = x - 2006$

Nên $A = x - 2006 + 2007 - x = 1$

+ Nếu $x > 2007$ thì $x > 2007 \Rightarrow 2007 - x < 0 \Rightarrow |2007 - x| = x - 2007$

Vì $x > 2007 \Rightarrow x > 2006 \Rightarrow x - 2006 > 0 \Rightarrow |x - 2006| = x - 2006$

Nên $A = x - 2006 + x - 2007 = 2x - 4013$

Mặt khác vì $x > 2007 \Rightarrow 2x - 4013 > 2 \cdot 2007 - 4013 = 1 \Rightarrow A > 1$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $2006 \leq x \leq 2007$.

Câu 5: (HSG 7 THCS Tân Ước 2013 - 2014)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$.

Lời giải

Ta có $A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 2013 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2011, đạt được với $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$.

Câu 6: (HSG 7 huyện Việt Yên 2013 - 2014)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2003|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2003| = |2x - 2| + |2003 - 2x| \geq |2x - 2 + 2003 - 2x| = 2001$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x - 2)(2003 - 2x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 2003 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2003}{2}$

Mà x là số nguyên nên $1 \leq x \leq 1001; x \in \mathbb{Z}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2001, đạt được với các giá trị nguyên của x thỏa mãn $1 \leq x \leq 1001$.

Câu 7: (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4|$.

Lời giải

Ta có: $|x - 2| + |3x - 4| = |2 - x| + |3x - 4| \geq |2 - x + 3x - 4| = |2x - 2|$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2-x)(3x-4) \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$

Lại có $|2x-3| + |2x-2| = |3-2x| + |2x-2| \geq |3-2x+2x-2| = |1| = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x-3)(2x-2) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Do đó $A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4| \geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1, đạt được khi $\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Câu 8: (HSG 7 trường THCS (đề 351) 2014 - 2015)

Cho $M = \frac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $M = \frac{42-x}{x-15} = -1 + \frac{27}{x-15}$

Để M đạt giá trị nhỏ nhất cần $\frac{27}{x-15}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Xét $x-15 > 0$ thì $\frac{27}{x-15} > 0$

Xét $x-15 < 0$ thì $\frac{27}{x-15} < 0$

Vậy $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x-15}$ (với x là số nguyên) có tử dương ($27 > 0$) và mẫu âm $x-15 < 0$

Nên $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất
 $\Rightarrow x-15 = -1 \Rightarrow x = 14$

Khi đó $M = -1 + \frac{27}{-1} = -28$

Vậy với $x = 14$ thì M đạt giá trị nhỏ nhất là -28 .

Câu 9: (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{8-x}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$

Để B đạt giá trị nhỏ nhất cần $\frac{5}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Xét $x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$ thì $\frac{5}{x-3} > 0$

Xét $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{5}{x-3} < 0$

Vậy $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi $x - 3 < 0$

Phân số $\frac{5}{x-3}$ (với x là số nguyên) có tử dương ($5 > 0$) và mẫu âm ($x - 3 < 0$)

Nên $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi $(x-3)$ là số nguyên âm lớn nhất
 $\Rightarrow x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

Khi đó $B = \frac{5}{-1} - 1 = -6$

Vậy với $x = 2$ thì B đạt giá trị nhỏ nhất là -6 .

Câu 10: (HSG 7 THCS Xuân Dương 2013 - 2014)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15-x}{5-x}$.

Lời giải

Ta có $M = \frac{15-x}{5-x} = 1 + \frac{10}{5-x}$

Để M có giá trị nguyên lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{5-x}$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Với $x > 5$ thì $\frac{10}{5-x} < 0$

Với $x < 5$ thì $\frac{10}{5-x} > 0$

Vậy $\frac{10}{5-x}$ đạt giá trị nguyên lớn nhất khi $x < 5$

Phân số $\frac{10}{5-x}$ (với x là số nguyên) có tử dương ($10 > 0$) và mẫu dương ($x < 5$)

Nên $\frac{10}{5-x}$ đạt giá trị nguyên lớn nhất khi $5-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất và là ước của 10
 $\Rightarrow 5-x = 1 \Rightarrow x = 4$

Khi đó $M = 1 + \frac{10}{1} = 11$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của M bằng 11, đạt được khi $x = 4$.

Câu 11: (HSG 7 Trường Cao Dương 2016 - 2017)

$$A = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

Với $4 > 0$, để $A = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$ có giá trị lớn nhất cần $(2x-3)^2+5$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$(2x-3)^2+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{4}{(2x-3)^2+5} \leq \frac{4}{5}$$

Mà

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{4}{5}$, đạt được khi $x = \frac{3}{2}$.

Câu 12: (HSG 7 Trường Bồ Lý 2015 - 2016)

$$B = \frac{x^2+15}{x^2+3}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{x^2+15}{x^2+3} = \frac{x^2+3+12}{x^2+3} = 1 + \frac{12}{x^2+3}$$

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2+3 \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2+3} \leq 1+4 \Rightarrow B \leq 5$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 5 , đạt được khi $x=0$.

Câu 13: (HSG 7 huyện Đức Thọ 2016 - 2017)

$$B = \frac{x^2+17}{x^2+7}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{x^2+17}{x^2+7} = \frac{x^2+7+10}{x^2+7} = 1 + \frac{10}{x^2+7}$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \text{ nên } x^2+7 \geq 7 \Rightarrow \frac{10}{x^2+7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2+7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ $x=0$

Vậy giá trị lớn nhất của $B = \frac{x^2+17}{x^2+7}$ là $\frac{17}{7}$, đạt được khi $x=0$.

Câu 14: (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

$$C = \frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2+2}$$

Cho biểu thức $C = \frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2+2}$. Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có
$$C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2} = \frac{2(x-1)^2 + 4}{(x-1)^2 + 2} - \frac{3}{(x-1)^2 + 2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2}$$

Để C đạt giá trị nhỏ nhất cần $\frac{3}{(x-1)^2 + 2}$ có giá trị lớn nhất.

Vì $(x-1)^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2$ với mọi x nên $\frac{3}{(x-1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \geq 2 - \frac{3}{2}$ hay $C \geq \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{1}{2}$ đạt được khi $x = 1$.

Câu 15: (HSG 7 THCS Bích Hòa 2013 - 2014)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$A = \frac{|x| + 1996}{-1997}$$

Lời giải

Vì $|x| + 1996 > 0$ với mọi x và $-1997 < 0 \Rightarrow A < 0$ với mọi x

nên A đạt giá trị lớn nhất khi $|A|$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$|A| = \left| \frac{|x| + 1996}{-1997} \right| = \frac{|x| + 1996}{1997}$$

Ta có $|x| \geq 0 \forall x$ nên $|x| + 1996 \geq 1996 \Rightarrow \frac{|x| + 1996}{1997} \geq \frac{1996}{1997} \Rightarrow |A| \geq \frac{1996}{1997}$

Mà $A < 0$ nên $-A \geq \frac{1996}{1997} \Rightarrow A \leq -\frac{1996}{1997}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $-\frac{1996}{1997}$, đạt được với $x = 0$.

Câu 16: (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho $x + y = 1, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (với a và b là hằng số dương).

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x+y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x+y)}{y} \\ &= a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} = \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{xy} = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2ay \cdot bx}{xy} + 2ab = \frac{a^2 y^2 - ay \cdot bx - ay \cdot bx + b^2 x^2}{xy} + 2ab$$

$$= \frac{ay(ay - bx) - bx(ay - bx)}{xy} + 2ab = \frac{(ay - bx)^2}{xy} + 2ab \geq \frac{0}{xy} + 2xy \geq 2ab \quad (\text{vì } x > 0, y > 0)$$

Khi đó
$$P = \left(\frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} \right) + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2$$

Lại có :
$$2ab + a^2 + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow P \geq (a+b)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi
$$ay = bx \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (\text{với } a > 0, b > 0)$$

Mà $x + y = 1$ nên
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

Từ đó tìm được
$$x = \frac{a}{a+b}; \quad y = \frac{b}{a+b}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $(a+b)^2$ đạt được khi $x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$.

Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

Câu 1: (HSG 7 trường THCS Bích Hòa 2013 - 2014)

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Đặt
$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

Mặt khác

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Vậy
$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Dạng 2.3 Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Câu 1: (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Cho
$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2015} - 1\right) \left(\frac{1}{2016} - 1\right)$$
. So sánh A với $\frac{-1}{2015}$.

Lời giải

Ta có
$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2015} - 1\right) \left(\frac{1}{2016} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-2014}{2015} \cdot \frac{-2015}{2016} = \frac{-1}{2016} > \frac{-1}{2015}$$

Vậy $A > \frac{-1}{2015}$

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

Câu 1: (HSG 7 trường THCS Nguyễn Khuyến 2015-2016)

Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Lời giải

Với $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

$$\Rightarrow 1 < M < 2$$

Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên.

Câu 2: (HSG 7 huyện Đức Phổ 2015 - 2016)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$.

Lời giải

Vì $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$ ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Mà $a_5 > 0; a_{10} > 0; a_{15} > 0 \Rightarrow a_5 + a_{10} + a_{15} > 0$ nên $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 3: (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Ta có: $0 \leq (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ca$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$, nhân cả 2 vế với $a > 0$, ta được:

$$\text{Tương tự: } a^2 < ab + ac$$

$$b^2 < ba + bc$$

$$c^2 < ca + cb$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4: (HSG 7 trường THCS 2 Phú Nhuận 2014 - 2015; HSG 7 Tân Ước 2013 - 2014; HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow ac+1 \geq a+c \Rightarrow \frac{1}{ac+1} \leq \frac{1}{a+c} \Rightarrow \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$$

$$\text{Mà } b \leq c \Rightarrow \frac{b}{a+c} \leq \frac{c}{a+c}$$

$$\text{Suy ra } \frac{b}{ac+1} \leq \frac{c}{a+c}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$$

$$\text{Mà } a \leq b \Rightarrow \frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{a+c}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{a+c}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} \leq \frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} = 1$$

$$\text{Mặt khác vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \text{ nên } ab \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq c \leq 1$$

$$\text{Nên } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 1 + 1 = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>