

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 8

Bài 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Bài 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$\frac{x - 241}{17} + \frac{x - 220}{19} + \frac{x - 195}{21} + \frac{x - 166}{23} = 10$$

Bài 3. (3 điểm)

Tìm x biết:
$$\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Bài 4. (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A , D là điểm di động trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

- a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $AEDF$ là hình vuông
- b) Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. (4 điểm)

Trong tam giác ABC , các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BFD; \sphericalangle BDF = \sphericalangle EDE; \sphericalangle EED = \sphericalangle AEF$

- a) Chứng minh rằng: $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BAC$

b) Cho $AB = 5, BC = 8, CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD .

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x+y+z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) \\ &= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z) [x(x+y) + z(x+y)] \\ &= 3(x+y)(x+z)(y+z)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)\end{aligned}$$

Bài 2

$$\begin{aligned}\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 258\end{aligned}$$

Bài 3

$$\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXD: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010 (a \neq 0)$, ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

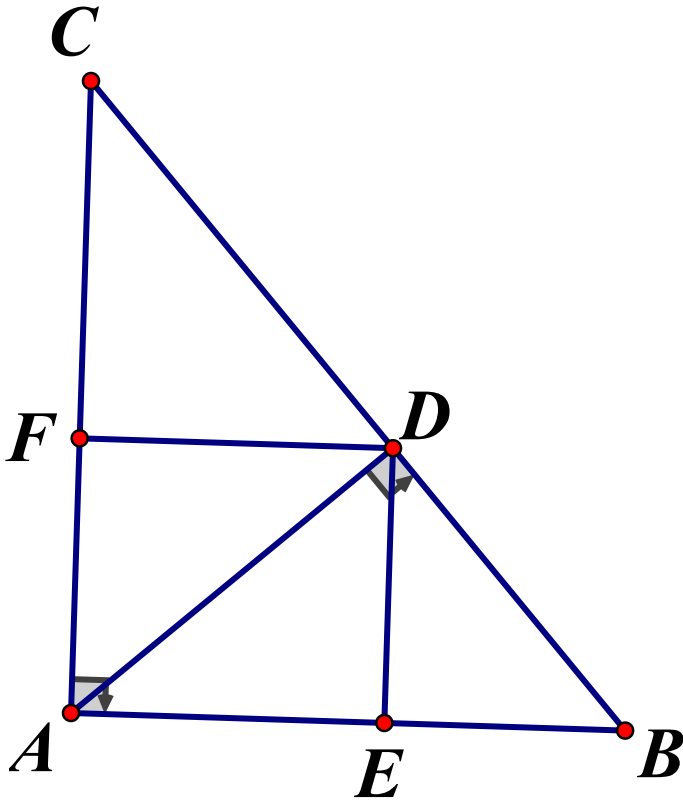
Bài 4

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 5



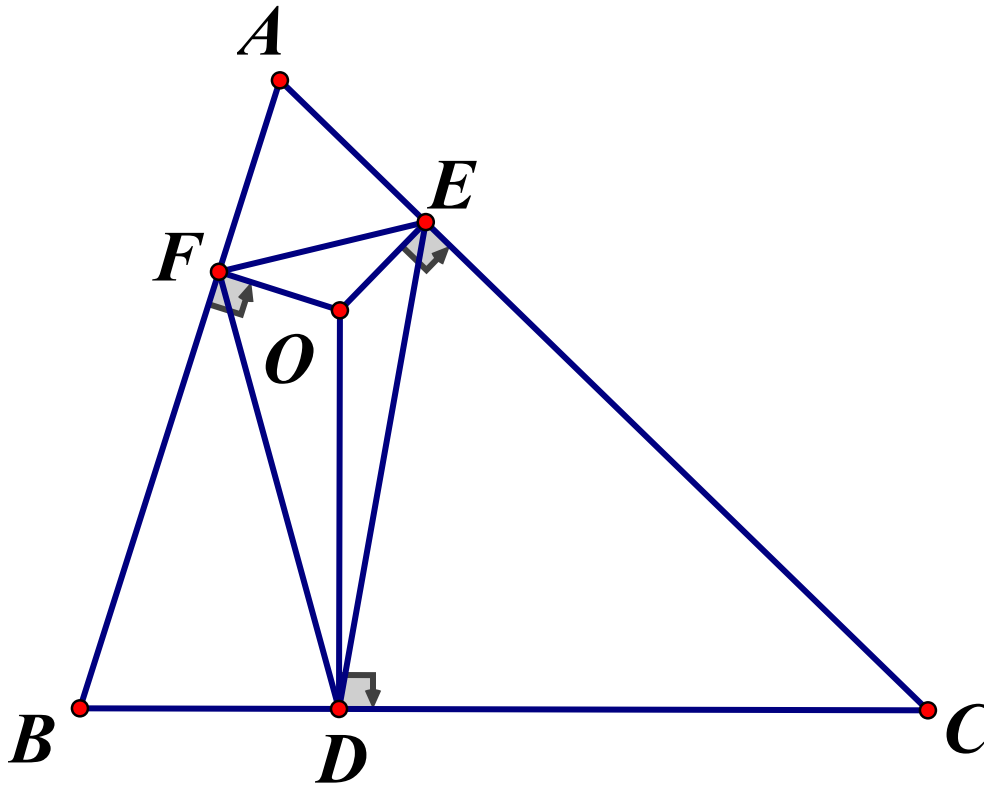
a) Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật (vì $\sphericalangle E = \sphericalangle A = \sphericalangle F = 90^\circ$)

Đề tứ giác $AEDF$ là hình vuông thì AD là tia phân giác của $\sphericalangle BAC$

b) Do tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật nên $AD = EF$
 $\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Bài 6.



a) Đặt $\angle AFE = \angle BFD = \omega$, $\angle BDF = \angle CDE = \alpha$; $\angle CED = \angle AEF = \beta$

Ta có: $\angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ (*)$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O .
Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$$\Rightarrow \angle OFD + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ (1)$$

Ta có:

$$\angle OFD + \omega + \angle OED + \beta + \angle ODF + \alpha = 270^\circ (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ (**)$$

Từ $(*) \& (**)$ $\Rightarrow \angle BAC = \alpha = \angle BDF$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$$\hat{B} = \hat{\beta}, \hat{C} = \omega \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta DBF \sim \Delta DEC \sim \Delta ABC$$

\Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow CD - BD = 3 \quad (3)$$

Ta lại có: $CD + BD = 8 \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow BD = 2,5$