1. Với mỗi số tự nhiên , số  luôn được viết dưới dạng  với  là các số nguyên dương.
2. Tìm hệ thức xác định dãy .
3. Chứng minh:  là số chính phương.
4. Chứng minh:  chia hết cho 5.

**Hướng dẫn giải**



 

Suy ra 



Vậy dãy  được xác định: 

Tương tự ta được dãy 

b) 



Mặt khác: 

Suy ra 

Do các số hạng của dãy  là số nguyên nên  là số chính phương.

c) 

Suy ra  hay 

Thay k = 1, 2, 3,…ta được:



Cộng vế theo vế, ta có:



Khi đó: 

Do  nên  chia hết cho  nên  chia hết cho 20

Từ đó, ta được:  hay 

Vậy  chia hết cho 5.

1. Gọi *A* là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *A*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *A* và số đó chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Gọi *A* là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *A*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *A* và số đó chia hết cho .

+) Trước hết ta tính *n(A)*. Với số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có *9* cách chọn và có  cho *7* vị trí còn lại. Vậy .

+) Giả sử  ta thấy tổng các phần tử của *B* bằng  nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho *9* sẽ được tạo thành từ *8* chữ số đôi một khác nhau của các tập 

Nên số các số loại này là .

Vậy xác suất cần tìm là .

1. a) Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng  Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn 

Tính tổng: 

**Hướng dẫn giải**

Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi …

Ta có:  (số có sáu chữ số đôi một khác nhau thì  có chín cách chọn,  là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên có ).

+) Gọi *A* là biến cố “chọn ra được một số tự nhiên chẵn từ tập *M* đồng thời thỏa mãn ”.

TH1: thì  có  cách chọn.

TH2: thì  có  cách chọn.

TH3: thì  có  cách chọn.



Do đó .

Tính tổng: 

Ta có:

 (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: 

Cho *k* chạy từ 1 đến *n* rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

 





Vậy 

1. Trong 1 cái hộp có 3 bi đỏ, 4 bi vàng, 5 bi xanh cùng chất, cùng kích thước.Một người lấy ngẫu nhiên cùng lúc 4 viên bi. Tính xác suất để số bi đỏ mà người đó lấy được không lớn hơn 2.

**Hướng dẫn giải**

Lấy ngẫu nhiên, cùng lúc 4 viên bi trong hộp có 3 bi đỏ, 4 bi vàng và 5 bi xanh nên có số phần tử của không gian mẫu là: .

Gọi A: “Biến cố trong 4 bi lẫy ngẫu nhiên có 3 bi màu đỏ”.



Xác suất của biến cố A là: 

Vậy xác suất để số bi đỏ mà người đó lấy được không lớn hơn 2 là 

1. Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trên trong đoạn . Gọi *T* là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi tập hợp , ký hiệu  là trung bình cộng của tất cả các số thuộc . Đặt  (ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp ). Hãy tính giá trị của *m*.

**Hướng dẫn giải**

Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trên trong đoạn . Gọi *T* là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi tập hợp , ký hiệu  là trung bình cộng của tất cả các số thuộc . Đặt  (ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp ). Hãy tính giá trị của *m*.

Với mỗi  đặt  ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp  mà .

Xét số a bất kỳ thuộc S, suy ra *a* có mặt trong  tập mà .

Suy ra 

Do đó 



Mà 

**Cách 2.** Xây dựng song ánh từ T vào T như sau

****

**Suy ra **

**Suy ra **

1. Ở các vị trí khác nhau của một đường đua ô tô vòng tròn cùng một thời gian có 25 ô tô xuất phát theo cùng một hướng. Theo thể lệ cuộc đua, các ô tô có thể vượt lẫn nhau, nhưng cấm không được vượt đồng thời hai xe một lúc. Các ô tô đến đích là các điểm mà chúng xuất phát ban đầu cùng một lúc. Chứng minh rằng trong suốt cuộc đua có một số chẵn lần vượt nhau của các ô tô.

**Hướng dẫn giải**

Ở Ta sơn 1 trong 25 ô tô thành màu vàng, còn các oto khác đánh số từ 1 đến 24 theo thứ tự mà chúng ở thời điểm ban đầu sau ô tô màu vàng ( theo chiều chuyển động của các ô tô). Ở tâm của đường đua ta đặt một bảng để ghi số thứ tự của các ô tô sắp xếp sau ô tô vàng sau mỗi lần các ô tô vượt nhau, tức là ta được một hoán vị của {1,2,…,24}.

Trường hợp 1:

 Mỗi lần 2 ô tô trong các ô tô từ 1 đến 24 vượt nhau thì trên bảng có 2 số liền nhau đổi chỗ cho nhau.

Trường hợp 2:

 Nếu trước khi có lần vượt của một ô tô nào với ô tô vàng, các số trên bảng lập thành một hoán vị a1, a2,…,a24 thì sau lần vượt đó sẽ có hoán vị a2,a3,…,a24,a1.

Từ hoán vị trên có thể chuyển xuống hoán vị dưới bằng 23 phép chuyển vị, tức là

phép đổi chỗ 2 số liền nhau.

Trường hợp 3:

Nếu ô tô vàng vượt một ô tô nào đó thì từ hoán vị a1,a2,…,a24 ta có hoán vị a24,a1,a2,…a23. Lần di chuyển này cũng có thể thay bằng 23 phép chuyển vị như trường hợp 2.

Như vậy mỗi lần các ô tô vượt nhau đều dẫn đến việc thực hiện một số lẻ lần phép chuyển vị. Ta sẽ chứng minh nếu số lần vượt nhau là số lẻ thì khi về đích các ô tô không được sắp xếp như cũ. Thật vậy gs a1,a2…,a24 là một cách sắp xếp tùy ý của các số1,2,…24. Ta sẽ nói rằng các số ai,aj lập thành một nghịch thế nếu i<j mà ai>aj. Khi đổi vị trí 2 số đứng liền nhau, tức là thực hiện một phép chuyển vị thì sẽ tăng hay giảm số nghịch thế đi 1. Do đó nếu các oto vượt nhau một số lẻ lần thì từ cách sắp xếp thứ tự của các oto ban đầu, đến cuối cùng ta đã thực hiện một số lẻ các phép chuyển vị, tức là số nghich thế của lần sắp xếp cuối cùng là số lẻ, nghĩa là các ô tô không thể sắp xếp như cũ. Mâu thuẫn.

Vậy các ô tô vượt nhau một số chẵn lần.

1. Với *n* là số nguyên dương, một tập con của tập  được gọi là tốt nếu sau khi ta sắp xếp thứ tự tăng các phần tử của nó thì thu được các số lẻ, chẵn, lẻ, … theo thứ tự.

Ví dụ các tập con tốt là , tập . Tập không là tập con tốt do nó bắt đầu bởi số chẵn.

Tính số tập con tốt của tập .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là số tập con tốt của .

Ta lập hệ thức truy hồi của .

+ Nếu tập con tốt của  không lấy *n* thì ***.***

+ Nếu tập con tốt của  lấy *n* thì ***.***

Vậy ta có .

Hơn nữa 

Phương trình đặc trưng 

Suy ra 

Thay 2 giá trị đầu ta được 

Suy ra



1. Với mỗi hoán vị  của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu  là tổng của ba số có 3 chữ số , , . Trong các  có hàng đơn vị bằng 0, gọi  là giá trị nhỏ nhất của nó và  là số các hoán vị  thỏa mãn . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Với mỗi hoán vị  của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu  là tổng của ba số có 3 chữ số , , . Trong các  có hàng đơn vị bằng 0, gọi  là giá trị nhỏ nhất của nó và  là số các hoán vị  thỏa mãn . Tính .

Với mỗi hoán vị  của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu  là tổng của ba số có 3 chữ số , , . Trong các  có hàng đơn vị bằng 0, gọi  là giá trị nhỏ nhất của nó và  là số các hoán vị  thỏa mãn . Tính .

Để  đạt giá trị nhỏ nhất thì 3 chữ số hàng trăm là 1, 2, 3,  có chữ số tận cùng bằng 0 thì các chữ số hàng đơn vị có tổng là bội của 10. Và từ các chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9 không có ba số nào có tổng bằng 10 và vì  nên 3 chữ số hàng đơn vị phải có tổng bằng 20, ta thấy , có ba bộ số có thể xếp vào 3 chữ số ở hàng đơn vị, tương ứng các chữ số còn lại sẽ là hàng chục. Do đó giá trị nhỏ nhất của  là 

Như vậy có 3 trường hợp, trong mỗi trường hợp có 6 cách chọn 3 chữ số hàng trăm, 6 cách chọn 3 chữ số hàng chục và 6 cách chọn 3 chữ số hàng đơn vị. Vậy số các hoán vị  thỏa mãn yêu cầu bài toán là .

Vậy .

1. Cho tập hợp A gồm n phần tử (n≥4). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm K ∈ {1;2;…;n} sao cho số tập con gồm K phần tử của A là lớn nhất?

**Hướng dẫn giải ( Không có giải)**

1. Một số điện thoại di động là một dãy số gồm 10 chữ số được chọn từ nhưng chữ số đầu tiên phải là 0. Mr. Fat có số điện thoại 0912364587 là một dãy số gồm 10 chữ số có tính chất 9 chữ số sau (không kể chữ số 0 đầu tiên) là phân biệt, khác 0; đồng thời các chữ số từ 1 đến 5 xuất hiện trong dãy từ trái qua phải theo đúng thứ tự tự nhiên của chúng, còn các chữ số từ 1 đến 6 thì không. Mrs. Fat cũng muốn chọn được một số điện thoại có cùng tính chất như vậy. Hỏi bà ta có bao nhiêu cách chọn (sự lựa chọn)?

**Hướng dẫn giải ( Không có giải)**

1. Gọi *A* là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *A*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *A* và số đó chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Gọi *A* là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *A*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *A* và số đó chia hết cho .

+) Trước hết ta tính *n(A)*. Với số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có *9* cách chọn và có  cho *7* vị trí còn lại. Vậy 

+) Giả sử  ta thấy tổng các phần tử của *B* bằng  nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho *9* sẽ được tạo thành từ *8* chữ số đôi một khác nhau của các tập  nên số các số loại này là .

Vậy xác suất cần tìm là .

1. Có $n$ học sinh $(n\geq 2)$ đứng thành hàng dọc, cứ mỗi lần thầy giáo thổi còi thì có đúng 2 học sinh đổi chỗ cho nhau. Hỏi sau 2015 lần thầy giáo thổi còi, ta có thể thấy tất cả các học sinh đều đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình hay không ?

**Hướng dẫn giải**

Đánh số từ 1 đến n cho các bạn học sinh trong hàng dọc lúc đầu. Ký hiệu $P\_{n}$ là tập các hoán vị của $\left\{1,2,…,n\right\}$.

Gọi $π=\left(π\left(1\right), π\left(2\right),…,π(n)\right)$ là một hoán vị của $\left\{1,2,…,n\right\}$. Cặp $\left(π(i\right), π(j))$ của $π$ gọi là 1 nghịch thế của $π$ nếu $i<j$ và $π\left(i\right)>π(j)$.

Xét ánh xạ $f\_{i}: P\_{n}\rightarrow P\_{n} $mà $f\_{i}(π)$ thu được từ $π$ bằng cách đổi chỗ hai vị trí kề nhau $\left(π\left(i\right), π(i+1)\right)$ và giữ nguyên các vị trí còn lại.

Cho $i, j\in N^{\*}, i<j\leq n$. Xét ánh xạ $f\_{ij}: P\_{n}\rightarrow P\_{n}$

$$f\_{ij}=f\_{j-1}of\_{j-2}of\_{j-3}o…of\_{i+2}of\_{i+1}of\_{i}o…of\_{j-3}of\_{j-2}of\_{j-1} \left(1\right)$$

Là hợp thành của $2\left(j-i\right)-1$ ánh xạ. Dễ thấy $f\_{ij}(π)$ thu được từ $π$ bằng cách đổi vị trí của $(π\left(i\right), π\left(j\right))$ và giữ nguyên các vị trí còn lại .

Gọi $T(π)$ là số nghịch thế của hoán vị $π$.

Ta có $T\left(f\_{i}\left(π\right)\right)=\left\{\begin{array}{c}T\left(π\right)-1 nếu (π\left(i\right); π\left(i+1\right)) là nghịch thế\\T\left(π\right)+1 nếu \left(π\left(i\right); π\left(i+1\right)\right) không là nghịch thế\end{array}\right.$

Do vậy $T\left(f\_{i}\left(π\right)\right)≡T\left(π\right)+1 (mod2)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $T\left(f\_{ij} \left(π\right)\right)≡T\left(π\right)+1$ (mod2) (3).

Giả sử $π\_{k}$ là thứ tự của $n$ học sinh sau lần thổi còi thứ *k* của thầy giáo.

Ta có $π\_{k}\in P\_{n}$ và $π\_{k+1}=f\_{ij} (π\_{k}) $với $1\leq i<j\leq n$ nào đó.

Theo (3) ta có $T(π\_{k+1})≡T\left(π\_{k}\right)+1$ (mod2).

Do đó $T\left(π\_{k}\right)≡T\left(π\_{0}\right)+k≡k (mod2)$(vì $T\left(π\_{0}\right)=0)$.

Nếu k lẻ thì $T\left(π\_{k}\right)≢0(mod2)$ do đó $π\_{k}\ne π\_{0}$. Vậy sau 2015 lần thổi còi, tất cả các học sinh không thể đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình.

1. Lấy ngẫu nhiên 7 số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau. Tìm xác xuất để trong đó có đúng 4 số chẵn.

Hướng dẫn giải

Số các stn có 7 chữ số khác nhau là:  số. Trong đó có số các số lẻ là: số, vậy có 275520 số chẵn.

KGM có số phần tử là: .

Số cách lấy 7 stn trong đó có đúng 4 số chẵn là =74059776000



1. Lấy ngẫu nhiên 498 số nguyên dương không vượt quá 1000. Chứng minh rằng trong đó có 2 số có tổng chia hết cho 111.

**Hướng dẫn giải**

Xét tập S={1,2,…,1000} ta phân hoạch S như sau:

A={1000}, B={111;222;…;999}

Và chia tập T=S\(AUB) thành các tập con có 2 phần tử mà tổng bằng 999 như sau:

T1={1;998}, T2={2;997}, T3={3;996},…, T495={499;500}.

Như vậy S được chia thành 497 tập con, vậy 498 số được chọn ngẫu nhiên phải có 2 số rơi vào cùng một tập hợp.

Hai số đó hoặc cùng chia hết cho 111 hoặc có tổng bằng 999 nên tổng của chúng chia hết cho 111

1. 1 . Chứng minh rằng : 

 2 . Một bình chứa 9 viên bi chỉ khác nhau về màu gồm 4 bi xanh , 3 bi đỏ , 2 bi vàng . Lấy ngẫu

 nhiên 2 bi . Tính xác suất để được 2 bi khác màu .

**Hướng dẫn giải**

1. 

\* Cho x = 2 : 

2. Khoâng gian maãu : 

\* Keát quaû thuaän lôïi cuûa bieán coá laáy 2 bi khaùc maøu : 

\* Xaùc suaát ñeå choïn ñöôïc 2 bi khaùc maøu :  ( 72% )

1. Có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người xếp hàng dọc sao cho không có 2 người liên tiếp được chọn.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử k người được chọn là: 

Gọi  là số người đứng trước 

Gọi  là số người đứng giữa  và 

 .....

Gọi  là số người đứng giữa  và 

Và  là số người đứng bên phải 

Mỗi cách chọn bộ  bằng số cách chọn bộ  thỏa mãn

+) 

+) 

+) 

Hàm sinh cho cách chọn  và  giống nhau là: 

Hàm sinh cho số cách chon mỗi  giống nhau là: 

Hàm sinh cho số cách chọn bộ  là: 

Số cách chọn bộ số:  bằng số cách chọn bộ số  là: 

1. Các số nguyên được viết vào  ô của bảng vuông . Mỗi hàng và mỗi cột có nhiều nhất 6 giá trị khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên có mặt ở ít nhất 3 cột và ít nhất 3 hàng.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử các giá trị được ghi vào bảng là . Gọi  là số cột khác nhau mà có mặt và  là số hàng khác nhau mà  có mặt. Gọi là số ô được đánh số , ta có *Ti*

Mỗi cột và mỗi hàng có không quá 6 giá trị khác nhau, nên



Giả sử với mọi , ta có . Khi đó:



Vậy 

Mặt khác nếu đặt thì với mỗi cột có 21 ô và mỗi hàng có không quá 6 giá trị khác nhau nên tồn tại giá trị xuất hiện ở 4 hàng, giá trị này thuộc A nên xuất hiện nhiều nhất là ở hai cột. Do có tất cả 21 cột nên số giá trị như thế không ít hơn



Tương tự nên . Mâu thuẫn nhận được suy ra điều phải chứng minh.