

BÀI TOÁN 1. BÀI TOÁN KẾT HỢP MẶT PHẪNG – ĐƯỜNG THẲNG – MẶT CẦU

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

Lời giải

Trả lời: 7

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là: $ax + by + cz + d = 0$ (đk: $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

$$\text{Khi đó ta có hệ điều kiện sau: } \begin{cases} d(A; (P)) = 2 \\ d(B; (P)) = 1 \\ d(C; (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a + 2b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2 \\ \frac{|3a - b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \\ \frac{|-a - b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a + 2b + c + d| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |3a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |-a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có: } |3a - b + c + d| = |-a - b + c + d| \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c + d = -a - b + c + d \\ 3a - b + c + d = a + b - c - d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - b + c + d = 0 \end{cases}$$

$$\text{với } a = 0 \text{ thì ta có } \begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ |2b + c + d| = 2|-b + c + d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ 4b - c - d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0 \Rightarrow c = d = 0, b \neq 0 \\ c + d = 4b, c = \pm 2\sqrt{2}b \end{cases} \text{ do đó có 3 mặt phẳng.}$$

$$\text{Với } a - b + c + d = 0 \text{ thì ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 4|a| \\ |2a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

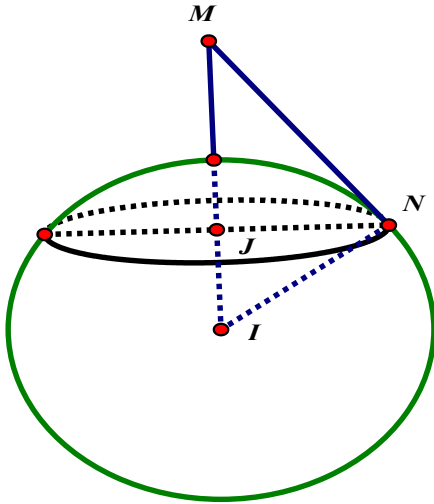
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \frac{4}{3}|a| \\ |c| = \frac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$$

do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N . Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, thì giá trị của k là?

Lời giải

Trả lời: 50



Mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$ có tâm $I(-3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Có $IM = \sqrt{25+16+4} = 3\sqrt{5} > 6 = R$, nên M thuộc miền ngoài của mặt cầu (S) .

Có MN tiếp xúc mặt cầu (S) tại N , nên $MN \perp IN$ tại N .

Gọi J là điểm chiếu của N lên MI .

Có $IN^2 = IJ \cdot IM$. Suy ra $IJ = \frac{IN^2}{IM} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ (không đổi), I cố định.

Suy ra N thuộc (P) cố định và mặt cầu (S) , nên N thuộc đường tròn (C) tâm J .

Gọi $N(x;y;z)$, có $\vec{IJ} = \frac{IJ}{IM} \vec{IM} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} \vec{IM} = \frac{4}{5} \vec{IM}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=8 \\ y-2=-\frac{4}{5} \\ z-5=-\frac{2}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow N\left(5; \frac{6}{5}; \frac{23}{5}\right)$, $k=2a-5b+10c=50$. Vậy $k=50$.

Câu 3. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết rằng $a+b+c < 5$
Lời giải

Trả lời: 2

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ là $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Đk: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

(S) đi qua các điểm M, N, P và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) $\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - 8c + d = -21 \\ -10a + d = -25 \\ -2a + 6b - 2c + d = -11 \\ R = |a| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - 8c + 10a - 25 = -21 \\ d = 10a - 25 \\ -2a + 6b - 2c + 10a - 25 = -11 \\ a^2 + b^2 + c^2 - d = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 8a + 6b - 2c = 14 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 32a + 24b - 8c = 56 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 26a + 26b = 52 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 1 \\ d = 10a - 25 \\ b = -a + 2 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-a + 2)^2 + (a - 1)^2 - 10a + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 16a + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = 5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = 4 \\ d = 25 \end{cases}$$

Vì $a+b+c < 5$ nên chọn $c = 2$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T) .
Lời giải

Trả lời: 4

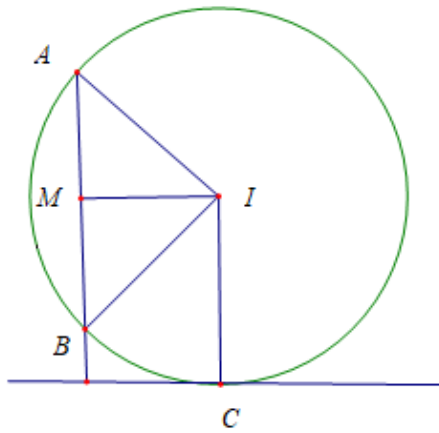
Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 4)$ và mp (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 2)$. Do đó AB vuông góc với (P) .

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên ta có

$$\begin{cases} 9 + 1 + 1 + 6a - 2b - 2c + d = 0 \\ 1 + 1 + 25 - 2a + 2b - 10c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 2c + d = -11 \\ 2a - 2b + 10c - d = 27 \end{cases}$$

Suy ra $8a - 4b + 8c = 16 \Leftrightarrow 2a - b + 2c = 4$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $d(I, (P)) = \frac{|2a - b + 2c + 11|}{3} = 5$.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$. Gọi M là trung điểm AB ta có

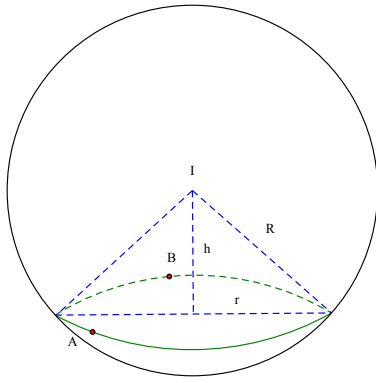
$d(C, AB) = IM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Vậy C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định có bán kính $r = 4$.

Câu 5. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{7-\sqrt{3}}{2}; 3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{7+\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$.

Xét mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}: d < -5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B . Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $T = |a + b + c + d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 6



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Có $IA = IB = \sqrt{6}$ nên A, B thuộc mặt cầu (S) .

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0) = -\sqrt{3}(1; -1; 0) = -\sqrt{3}a$, $M\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$ là trung điểm của AB .

Gọi $a = (1; -1; 0)$ và $n = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P)

$$\text{Vì } A, B \in (P) \text{ nên có } \begin{cases} I \in (P) \\ a \cdot n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}b + 3c + d = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -6a - 3c \\ a = b \end{cases}$$

Gọi $h = d(I, (P))$, $(C) = (P) \cap (S)$, r là bán kính đường tròn (C) .

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{6 - h^2}$$

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N) .

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2r = h \cdot \sqrt{6 - h^2} \leq \frac{h^2 + 6 - h^2}{2} = 3$$

$$\text{Max } S = 3 \text{ khi } h^2 = 6 - h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$h = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{|a + 2b + 3c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}$$

Nếu $a = c$ thì $b = a; d = -9a$ và $(P): ax + ay + az - 9a = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0$ (nhận).

Nếu $a = -c$ thì $b = a; d = -3a$ và $(P): ax + ay - az - 3a = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$ (loại).

$$\text{Vậy } T = |a + b + c + d| = 6$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0; 1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta): \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng?

Lời giải

Trả lời: 9

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R = d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta))$.

$$d(I, (\beta)) = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{1-m} + c - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1}}$$

Mà

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m} \right)^2 - 2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)} \right]^2 - 2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} = \frac{1}{m(1-m)} - 1 \quad (\text{do } m \in (0; 1)) \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left| \frac{a(1-m) + bm + cm(1-m) - m(1-m)}{m(1-m)} \right|}{\frac{1}{m(1-m)} - 1} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{|a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2|}{m^2 - m + 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} R - Rm + Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \\ -R + Rm - Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(R + c - 1) + m(a - b - c - R + 1) + R - a = 0 \quad (1) \\ m^2(R + c - 1) + m(b + c - a - R - 1) + R + a = 0 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ với mọi $m \in (0; 1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m \in (0; 1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + c - 1 = 0 \\ a - b - c - R + 1 = 0 \\ R - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = R \\ b = R \\ c = 1 - R \end{cases} \Rightarrow I(R; R; 1 - R)$$

$$R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|2R - R + 2(1 - R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 - R| \Leftrightarrow \begin{cases} R = 3 \\ R = -6 \end{cases}$$

Mà

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R+c-1=0 \\ b+c-a-R-1=0 \\ R+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-R \\ b=-R \\ c=R+1 \end{cases} \Rightarrow I(-R; -R; R+1)$$

$$R=d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|-2R+R+2(1+R)+10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12+R| \Leftrightarrow \begin{cases} R=6 \\ R=-3(l) \end{cases}$$

Mà

$$\text{Vậy } R_1 + R_2 = 9$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P): x=1, (Q): y=-1$ và $(R): z=1$ có bán kính bằng?

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $I(a; b; c)$ và R là tâm và bán kính của (S) . Khi đó ta có

$$R = IA = d(I; (P)) = d(I; (Q)) = d(I; (R)) \Leftrightarrow IA = |a-1| = |b+1| = |c-1| \Leftrightarrow \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = \pm(b+1) \\ a-1 = \pm(c-1) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ (2-a)^2 + a^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ 2a^2 - 12a + 28 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

TH2:

$$\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 - 16a + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow R = 1$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + a^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 4a + 12 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy mặt cầu có bán kính $R = 1$

Câu 8. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

Lời giải

Trả lời: 3

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo bài mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA = OB = OC$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 & (1) \\ |a| = |b| = |c| & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = c = -b \\ b = c = -a \end{cases}$$

Ta có:

- Với $a = b = c$ thay vào (1) được $a = b = c = 4$
- Với $a = b = -c$ thay vào (1) được $0 = 1$ (loại).
- Với $a = c = -b$ thay vào (1) được $a = c = -b = 2$.
- Với $b = c = -a$ thay vào (1) được $b = c = -a = 2$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:

$$(P_1): \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1; (P_2): \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1; (P_3): \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Câu 9. (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Lời giải

Trả lời: 3,5

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b} + \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{7a} + \frac{2}{7b} + \frac{3}{7c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$$

Mặt khác mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm $I(1,2,3)$ của cầu tới mặt phẳng (ABC) là $\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{\left| \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \quad \text{mà } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$$

$$\Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{|7 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}$$

Câu 10. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm $M(a, b, c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$ và cách đều các điểm $A(1; 6; 0), B(-2; 2; -1), C(5; -1; 3)$. Tích abc bằng?
Lời giải

Trả lời: 6

Ta có:
$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ (a - 1)^2 + (b - 6)^2 + b^2 = (a + 2)^2 + (b - 2)^2 + (c + 1)^2 \\ (a - 1)^2 + (b - 6)^2 + c^2 = (a - 5)^2 + (b + 1)^2 + (c - 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ 3a + 4b + c = 14 \\ 4a - 7b + 3c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow abc = 6.$$

Câu 11. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y + \sqrt{2})^2 + z^2 = 16$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng có phương trình $y - 2\sqrt{2} = 0$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?
Lời giải

Trả lời: 45

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; -\sqrt{2}; 0)$ và bán kính $R = 4$.

$A(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng có phương trình $y - 2\sqrt{2} = 0$ nên $b = 2\sqrt{2}$. Hay $A(a; 2\sqrt{2}; c)$.

Tập tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A là một đường tròn (C) . Gọi BC là một đường kính của (C) . Khi đó $\angle BAC$ là góc có số đo lớn nhất trong tất cả các góc còn lại.

Như vậy điều kiện có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau là góc $90^\circ \leq \angle BAC < 180^\circ$.

Trong trường hợp $\angle BAC = 90^\circ$ thì $ABIC$ là hình vuông nên ta có $AI = 4\sqrt{2}$.

Như vậy, suy ra: YCBT $\Leftrightarrow IA \leq 4\sqrt{2}$. Hay $IA = \sqrt{a^2 + 18 + c^2} \leq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + c^2 \leq 14$.

Do a, c là các số nguyên nên xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a = 0 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Có 7 điểm.

Trường hợp 2: $a = \pm 1 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Có 14 điểm.

Trường hợp 3: $a = \pm 2 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Có 14 điểm.

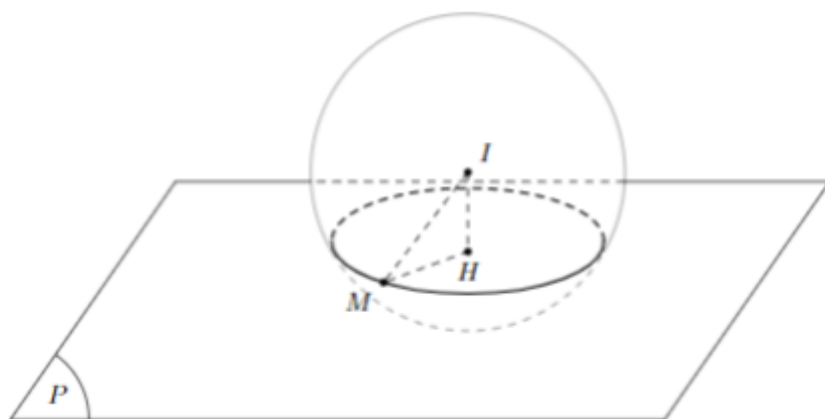
Trường hợp 4: $a = \pm 3 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$. Có 10 điểm.

Vậy có tổng $7 + 14 + 14 + 10 = 45$ điểm thỏa mãn bài toán.

Câu 12. (Nho Quan A – Ninh Bình – 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ thỏa mãn $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính là 4. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ là?

Lời giải

Trả lời: 2



Theo phương trình đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Với giả thiết $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Ta thấy mặt phẳng luôn đi qua điểm $H(1; -1; 1)$.

Mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$ có tâm $I(2; 1; 3), R_{mc} = 5$.

Ta gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (ABC) .

$IK = \sqrt{R_{mc}^2 - r^2} = 3$ và ta thấy $IH = 3$ và $IH \geq IK$ nên ta có H trùng với điểm K .

$$\vec{n} = \vec{HI} = (1; 2; 2) \Rightarrow x + 2y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1$$

(ABC) qua $H(1; -1; 1)$ và có VTPT

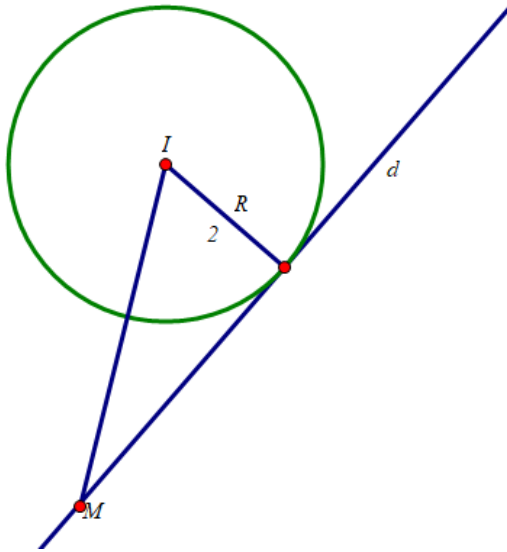
Vậy $a + b + c = 2$.

Câu 13. (THPT Cửa Lò – Nghệ An 2022) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 4y - z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 4$. Có bao nhiêu điểm M thuộc mặt phẳng Oxy với tung độ nguyên, mà từ điểm M kẻ được tiếp tuyến với (S) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P)

Lời giải

Trả lời: 34

(S) có $I(4; -4; 2); R=2$



Gọi $M(a; b; 0)$,

$$\vec{IM} = (a - 4; b + 4; -2), \vec{u_d} = (0; 4; -1)$$

$$[\vec{IM}, \vec{u_d}] = (-b + 4; a - 4; 4(a - 4))$$

$$d(I; d) = \frac{|[\vec{IM}, \vec{u_d}]|}{|\vec{u_d}|} = 2 \Leftrightarrow (b - 4)^2 + 17(a - 4)^2 = 68$$

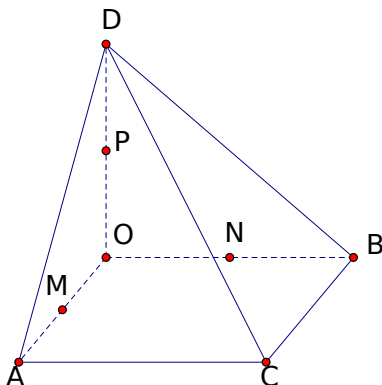
Vì $b \in \mathbb{Z}$, ta có $(b - 4)^2 \leq 68 \Leftrightarrow -\sqrt{68} + 4 \leq b \leq \sqrt{68} + 4$

Suy ra 17 giá trị b, với mỗi b có được 2 giá trị a. Suy ra có 34 điểm M

Câu 14. (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(2; 4; 0), D(0; 0; 6)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng cắt (S) theo một đường tròn và diện tích hình tròn là 14π , đồng thời cách đều năm điểm O, A, B, C, D (O là gốc tọa độ)?

Lời giải

Trả lời: 3



Ta thấy năm điểm O, A, B, C, D tạo thành năm đỉnh của hình chóp $D.OACB$ trong đó $OACB$ là hình chữ nhật, DO vuông góc với $(OACB)$.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB, OD .

Các mặt phẳng cách đều năm điểm O, A, B, C, D gồm các mặt phẳng sau:

+) Mặt phẳng (R_1) qua M và vuông góc với $OA \Rightarrow (R_1): x - 1 = 0$.

+) Mặt phẳng (R_2) qua N và vuông góc với $OB \Rightarrow (R_2): y - 2 = 0$.

+) Mặt phẳng (R_3) qua P và vuông góc với $OD \Rightarrow (R_3): z - 3 = 0$.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

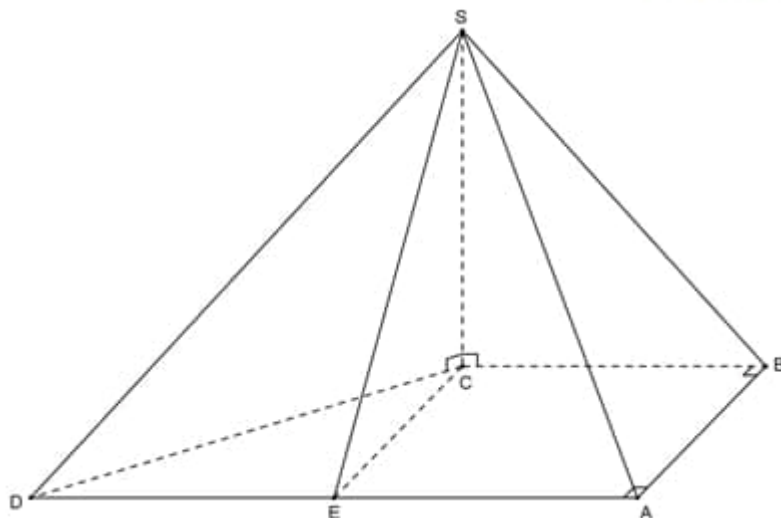
Giả sử (C) là đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (R) thỏa mãn yêu cầu bài toán, (C) có bán kính r . Theo giả thiết hình tròn có diện tích 14π nên $r = \sqrt{14}$, suy ra (R) đi qua tâm I của mặt cầu (S) .

Nhận thấy $(R_1), (R_2), (R_3)$ đều đi qua tâm I . Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. (Sở Bình Thuận 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B; AD = 2AB = 2BC$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Nếu $A(3; 0; 0); D(0; 3; 0); S(0; 0; 3)$ và C có hoành độ dương thì tung độ của B bằng?

Lời giải

Trả lời: 0,5



$$AD \Rightarrow E\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right).$$

Gọi E là trung điểm

Lại có $\vec{AD} = (-3; 3; 0); AD \perp (SEC) \Rightarrow \vec{n} = (1; -1; 0)$ là một vector pháp tuyến của (SEC) .

$\Rightarrow$ Phương trình (SEC) là $x - y = 0 \Rightarrow C(a; a; b) (a > 0)$

$$\Rightarrow \vec{EC} = \left(a - \frac{3}{2}; a - \frac{3}{2}; b \right); \vec{SC} = (a; a; b - 3).$$

$$\begin{cases} \vec{EC} \cdot \vec{SC} = 0 \\ EC = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a - \frac{3}{2} \right) a + \left(a - \frac{3}{2} \right) a + b(b - 3) = 0 \\ 2 \left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + b^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + b^2 - 3a - 3b = 0 \\ 2a^2 + b^2 - 6a = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} a = b \\ 3a^2 - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 0(l) \Leftrightarrow C(2; 2; 2) \\ a = 2(tm) \end{cases}$$

$$\vec{CB} = -\frac{1}{2} \vec{AD} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2 - \frac{1}{2}(-3) = \frac{7}{2} \\ y_B = 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2} \\ z_B = 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$$

Mặt khác

Câu 16. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Trong không gian, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z + m = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z + m + 1 = 0$. Có bao nhiêu số tự nhiên m để không tồn tại điểm K nào thuộc mặt phẳng (P) mà qua điểm K kẻ được đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) tại A, B thỏa mãn $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = 16$?

Lời giải

Trả lời: 1

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{11 - m} (m < 11)$.

Ta có $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = 16 \Leftrightarrow KI^2 - R^2 = 16 \Leftrightarrow KI^2 = 27 - m$. Khi đó điểm K thuộc mặt cầu (S') có tâm I và bán kính $R' = \sqrt{27 - m}$.

Để không tồn tại điểm K tức là mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S')

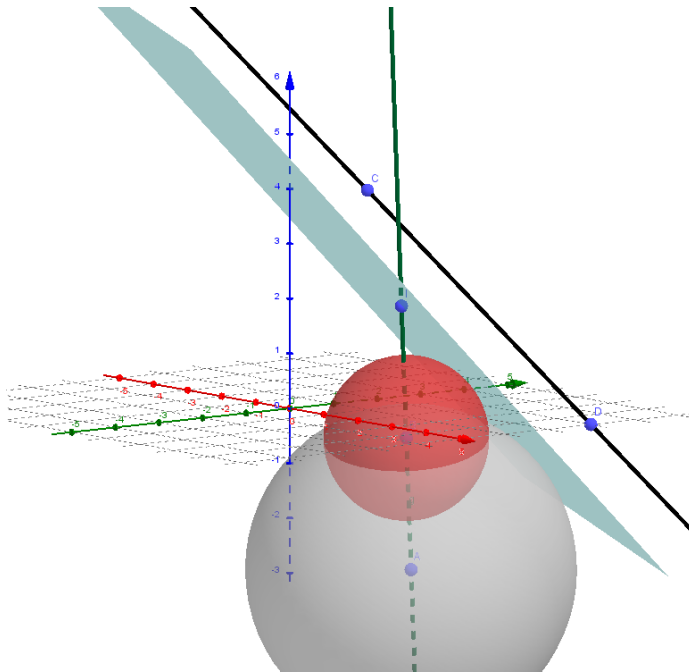
$$\Leftrightarrow d(I; (P)) > R' \Leftrightarrow \frac{|m+1|}{\sqrt{6}} > \sqrt{27-m} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 162 - 6m \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 + \sqrt{177} \\ m < -4 - \sqrt{177} \end{cases}$$

Mà m là số tự nhiên nhỏ hơn 11 nên $m = 10$.

Câu 17. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$, $B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $C(1; 1; 4)$, $D(5; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1) , (S_2) đồng thời song song với đường thẳng qua C và D ?

Lời giải

Trả lời: 1



Ta có $A(1; 2; -3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Suy ra hai mặt cầu cắt nhau.

Giả sử (P) là mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến $n = (a; b; c) (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$, gọi $M = AB \cap (P)$.

Ta có $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MB = \frac{1}{2}MA \Rightarrow I = (2; 1; 2)$.

Phương trình của mặt phẳng $(P): a(x - 2) + b(y - 1) + c(z - 2) = 0$.

(P) tiếp xúc với $(S_1) \Leftrightarrow d(A, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-a + b - 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \Leftrightarrow |-a + b - 5c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$(P) \parallel CD \Leftrightarrow n \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow b = 2c - 2a$.

Thế $b = 2c - 2a$ vào phương trình $|-a + b - 5c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, khai triển và thu gọn ta được $a = 2c$ hoặc $a = \frac{1}{2}c$.

Trường hợp 1: $a = 2c \Rightarrow b = -2c \Rightarrow (P): 2x - 2y + z - 4 = 0$.

Ta loại trường hợp này vì (P) chứa CD .

Trường hợp 2: $a = \frac{1}{2}c \Rightarrow b = c \Rightarrow (P): x + 2y + 2z - 8 = 0$.

Câu 18. (Sở Bắc Ninh 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Lấy điểm M tùy ý trên (α) . Từ M kẻ các tiếp tuyến

MA, MB, MC đến mặt cầu (S) , với A, B, C là các tiếp điểm đôi một phân biệt. Khi M thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $E(a; b; c)$. Tổng $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 2

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1), R = \sqrt{12}$. Gọi tiếp điểm $A(x; y; z)$ và điểm $M(a; b; c)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a - 2b + 2c + 11 = 0 \quad \text{và} \quad \begin{cases} A \in (S) \\ MA^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - R^2 = MI^2 - 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 \quad (1) \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 - 12 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Lấy (1) - (2) $\Rightarrow (2a-2)x + (2b-2)y + (2c-2)z + 3 = 2a + 2b + 2c + 21$ là mặt phẳng chứa các tiếp điểm $\Leftrightarrow a(x-1) + b(y-1) + c(z-1) - x - y - z - 9 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Qua điểm cố định } E(x; y; z) \text{ khi } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2} = \frac{-x-y-z-9}{11} \Leftrightarrow x=0; y=3; z=-1 \\ \Rightarrow E(0; 3; -1) \Rightarrow a+b+c=2. \end{aligned}$$

Câu 19. (Sở Thanh Hóa 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 1; 4), B(2; 5; 4), C\left(\frac{-5}{2}; 5; -1\right)$ và $D(-3; 1; -4)$. Các điểm M, N thỏa mãn $MA^2 + 3MB^2 = 48$ và $ND^2 = (\overline{NC} + \overline{BC}) \cdot \overline{ND}$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN .

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $M = (a; b; c)$ và $N = (x; y; z)$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + 3MB^2 = 48 &\Leftrightarrow |\overline{MA}|^2 + 3|\overline{MB}|^2 = 48 \\ &\Leftrightarrow (2-a)^2 + (1-b)^2 + (4-c)^2 + 3[(2-a)^2 + (5-b)^2 + (4-c)^2] = 48 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 2b - 8c + 21 + 3(a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 10b - 8c + 45) = 48 \\ &\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) - 16a - 32b - 32c + 108 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 8b - 8c + 27 = 0 \end{aligned}$$

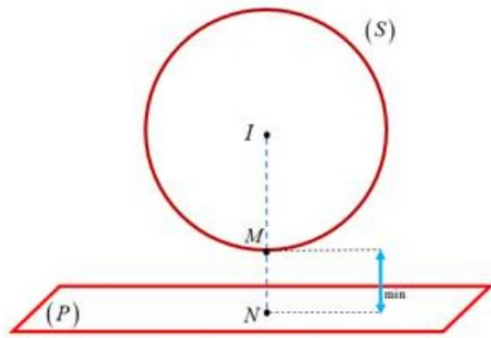
Vậy M thuộc mặt cầu (S) với tâm $I = (2; 4; 4)$ và bán kính $R = 3(1)$.

$$\begin{aligned} ND^2 &= (\overline{NC} + \overline{BC}) \cdot \overline{ND} \\ &\Leftrightarrow (-3-x)^2 + (1-y)^2 + (-4-z)^2 = \left[\left(\frac{-5}{2} - x; 5-y; -1-z \right) + \left(\frac{-9}{2}; 0; -5 \right) \right] \cdot (-3-x; 1-y; -4-z) \\ &\Leftrightarrow (-3-x)^2 + (1-y)^2 + (-4-z)^2 = (-7-x; 5-y; -6-z) \cdot (-3-x; 1-y; -4-z) \\ &\Leftrightarrow (-3-x)^2 + (1-y)^2 + (-4-z)^2 = (-7-x)(-3-x) + (5-y)(1-y) + (-6-z)(-4-z) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 8z + 26 = x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 6y + 10z + 50 \\ &\Leftrightarrow -4x + 4y - 2z - 24 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z + 12 = 0 \end{aligned}$$

Vậy N thuộc mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 12 = 0$ (2).

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 4 + 12|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 4 > R$$

Ta có



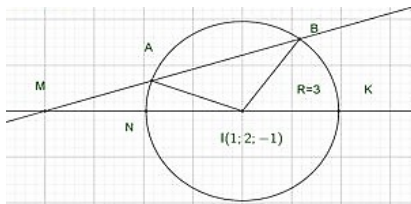
Vậy $MN_{\min}$ khi M, N, I thẳng hàng, N là hình chiếu của I trên (P) và $M \in$ đoạn NI

$$MN_{\min} = NI - R = d(I, (P)) - R = 4 - 3 = 1.$$

Câu 20. (Sở Hòa Bình 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $M(4; 2; 3)$. Một đường thẳng bất kì đi qua M cắt (S) tại A, B . Khi đó giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 4MB^2$ bằng

Lời giải

Trả lời: 64



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$, bán kính $R=3$. Khi đó $(S) \cap (d, I) = C(I, 3)$.

Kẻ đường thẳng $MI, MI \cap (C) = \{N, K\}$.

Ta có $\overline{MI} = (-3; 0; -4) \Rightarrow MI = 5 > 3 = R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Ta có $MN = 2, MK = 8$.

Mà $MN \cdot MK = MA \cdot MB \Rightarrow MA \cdot MB = 2 \cdot 8 = 16$.

Do đó $MA^2 + 4MB^2 \geq 4MA \cdot MB = 64$.

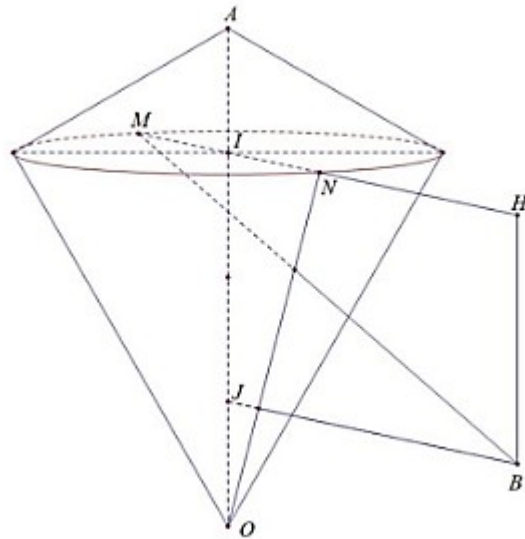
$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} MA^2 = 4MB^2 \\ MA^2 + 4MB^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 4\sqrt{2} \\ MB = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 21. (Chuyên Quang Trung – Bình Phước 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; 0; 0), B(1; 2; 3)$. Gọi M là điểm di động thỏa mãn $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{3} \overline{OM} \cdot \overline{OA}}{2}$ và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO} = 0$.

Gọi $p; q$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của BM . Giá trị $p^2 + q^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 40



Ta có:
$$\frac{\vec{OM} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OM}| |\vec{OA}|} = \frac{\sqrt{3} OM \cdot OA}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{OM}, \vec{OA}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{OM}, \vec{OA}) = 30^\circ$$

Mặt khác, $\vec{MA} \cdot \vec{MO} = 0$ nên điểm M thuộc đường tròn tâm I bán kính r là đáy chung của hai hình nón đỉnh A và hình nón đỉnh O .

Ta tính được: $IA = 1; IO = 3; r = \sqrt{3}; OI = 3IA \Leftrightarrow I(3; 0; 0)$

Mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy qua $I(3; 0; 0)$, VTPT $\vec{OA} = (4; 0; 0)$ có phương trình: $x - 3 = 0$.

Nhận xét: O, B cùng phía với $(P); d(B, (P)) = 2; d(B, OA) = \sqrt{13}$.

Gọi H, J là hình chiếu của B lên (P) và $OA \Rightarrow BJ = \sqrt{13} = IH, BH = 2 = IJ$.

Ta có
$$BM = \sqrt{BH^2 + MH^2} \leq \sqrt{BH^2 + (IH + r)^2} = \sqrt{4 + (\sqrt{3} + \sqrt{13})^2} = \sqrt{20 + 2\sqrt{39}} = p$$

$$BM = \sqrt{BH^2 + MH^2} \geq \sqrt{BH^2 + (IH - r)^2} = \sqrt{4 + (\sqrt{3} - \sqrt{13})^2} = \sqrt{20 - 2\sqrt{39}} = q$$

Vậy $p^2 + q^2 = 40$.

Câu 22. (Chuyên Lam Sơn-Thanh Hoá 2023) Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $OABC$ với $O(0; 0; 0), A(1; -2; 2), B(2; 2; 1)$ và $C(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{14}{3})$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính OA . Một tiếp tuyến MN thay đổi tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H (M thuộc tia AC, N thuộc tia OB). Biết khi M, N thay đổi thì H di động trên mặt phẳng (Q) cố định có phương trình $ax + by - z + c = 0$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

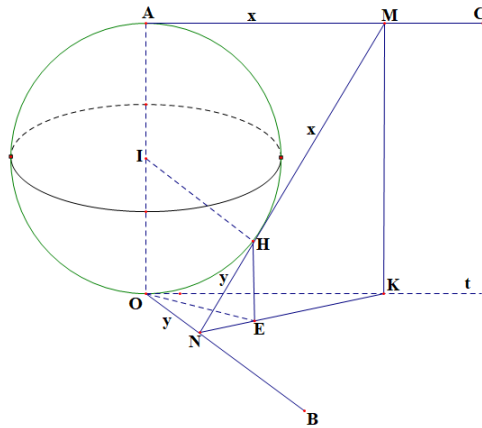
Trả lời: 5

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Rightarrow OA \perp OB$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow OA \perp AC$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow OB \perp AC$$

Dựng $Ot \parallel AC \Rightarrow Ot \perp OB$



K là hình chiếu M lên Ot , E là hình chiếu của H lên NK

MA và MH là 2 tiếp tuyến nên $MA = MH = x$

NO và NH là 2 tiếp tuyến $\Rightarrow NO = NH = y$

Ta có $\frac{ON}{OK} = \frac{ON}{AM} = \frac{NH}{MH} = \frac{EN}{EK} \Rightarrow OE$ là phân giác của $\angle NOK$ (cố định)

$\Rightarrow H \in mp(AOE)$ cố định.

VTCP của OB là $\vec{OB}(2; 2; 1)$; VTCP của Ot là $\vec{u}(-2; 1; 2)(\parallel \vec{AC})$

$\Rightarrow$ VTCP của OE là $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{OB}|} \cdot \vec{OB} + \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = (0; 1; 1)$

$[\vec{OE}; \vec{OA}] = (4; 1; -1) = VTPT \text{ mp}(AOE)$

$(AOE): 4(x - 0) + 1(y - 0) - 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - z = 0$

$\Rightarrow a = 4; b = 1; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 5$

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng d . Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 26

Mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R_1 = 3$.

$$M \in d \Leftrightarrow M(1+a; 1+2a; 2-3a)$$

Do MA, MB, MC là những tiếp tuyến tại A, B, C với mặt cầu (S_1) .

$$\text{Suy ra } MA^2 = MB^2 = MC^2 = OM^2 - 9$$

Khi đó $A, B, C \in (S_2)$ có tâm là M , bán kính $R_2 = \sqrt{OM^2 - 9}$.

Ta có phương trình $(S_2): (x - (a+1))^2 + (y - (2a+1))^2 + (z - (2-3a))^2 = OM^2 - 9$

$$\Leftrightarrow (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2(a+1)x - 2(2a+1)y - 2(2-3a)z + 9 = 0$$

Mặt khác theo giả thiết A, B, C cùng thuộc mặt cầu (S_1) .

$$\text{Suy ra tọa độ } A, B, C \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(a+1)x - 2(2a+1)y - 2(2-3a)z + 9 = 0 \end{cases}$$

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2(a+1)x + 2(2a+1)y + 2(2-3a)z - 18 = 0$

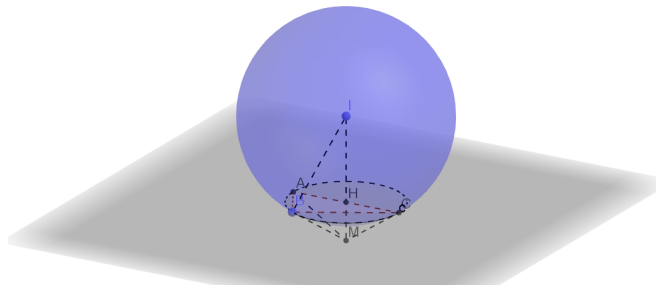
$$D \in (ABC) \Leftrightarrow 2(a+1) + 2(2a+1) + 4(2-3a) - 18 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Với $a = -1$, ta có $M(0; -1; 5)$. Khi đó $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 26$.

Câu 24. (Sở Lạng Sơn 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Xét điểm $M(a; b; c)$ với $a < 0$ thuộc d sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$, $\angle CMA = 120^\circ$. Tổng $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 2



Ta có (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$

$$\text{Đặt } m = AM = BM = CM$$

$$\angle AMB = 60^\circ \Rightarrow AB = m; \angle BMC = 90^\circ \Rightarrow BC = m\sqrt{2}; \angle CMA = 120^\circ \Rightarrow AC = m\sqrt{3} \text{ hay } AB \perp BC$$

Gọi H là trung điểm của AC , $MH = \frac{1}{2}m$ và $BH = \frac{m\sqrt{3}}{2}$ hay tam giác MBH vuông tại H

Suy ra $MH \perp (ABC)$ mà $MI \perp (ABC)$ suy ra $MI = MH + HI$

Tam giác IHA vuông tại $H \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{27 - \frac{3m^2}{4}}$

Tam giác IAM vuông tại $A \Leftrightarrow IM = \sqrt{IA^2 + AM^2} = \sqrt{27 + m^2}$

Từ $MI = MH + HI \Leftrightarrow \sqrt{27 - \frac{3m^2}{4}} + \frac{1}{2}m = \sqrt{27 + m^2} \Rightarrow m = 3 \Rightarrow MI = 6$

$M \in d \Rightarrow M(-1+t; -2+t; 1+t) \Rightarrow IM = \sqrt{(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2}$

$\Rightarrow MI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$

Khi $t=0 \Rightarrow M(-1; -2; 1)$ (nhận)

Khi $t=\frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ (loại)

Vậy $a+b+c = -2$.

Câu 25. (Chuyên Vinh 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $C(0;0;3)$ và hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên hai trục Ox, Oy (A, B khác O) sao cho $OA + OB = 2$. Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng I luôn chạy trên các cạnh của một tứ giác cố định, diện tích của tứ giác đó bằng?

Lời giải

Trả lời: 2

Hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên hai trục Ox, Oy (A, B khác O) suy ra $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$.

$OA + OB = 2 \Leftrightarrow |a| + |b| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{a}{2}\right| + \left|\frac{b}{2}\right| = 1$

Khi đó

I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$, ta có $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{3}{2}\right)$ suy ra $I \in (P): z = \frac{3}{2}$.

Gọi I' là hình chiếu của I lên Oxy .

Khi I chạy trên các cạnh của một tứ giác cố định trên mặt phẳng (P) thì I' chạy trên các cạnh của một tứ giác cố định trên mặt phẳng Oxy .

Đặt $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow |x| + |y| = 1$. Suy ra $I'(x; y)$ thuộc các cạnh hình vuông có độ dài cạnh bằng $\sqrt{2}$.
Diện tích của tứ giác đó bằng $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Câu 26. (Liên trường Quảng Nam cụm Điện Bàn 2024) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; -3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), C(1; 1; 4), D(5; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C, D .

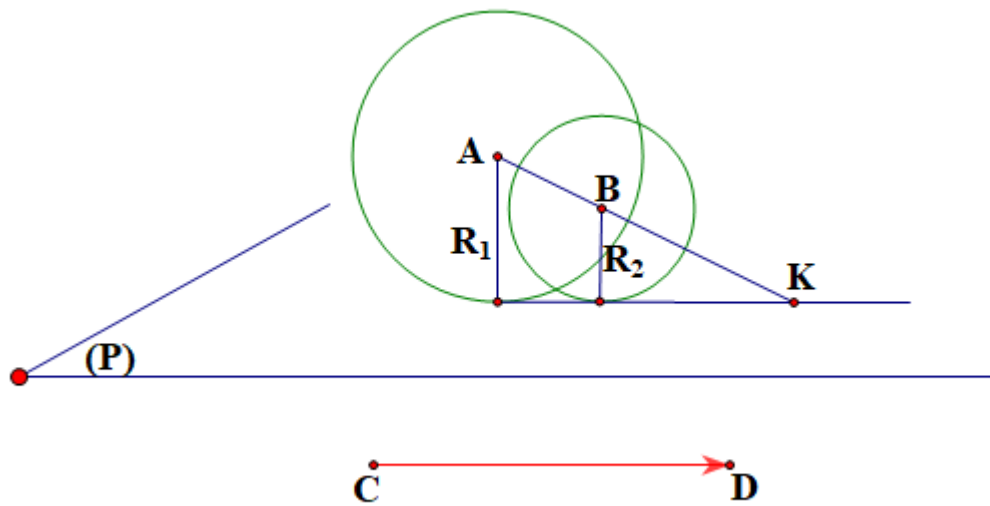
Lời giải

Trả lời: 2

Mặt cầu (S_1) có $A(1; 2; -3); R_1 = 3; (S_2)$ có $B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), R_2 = 1,5$

Ta có: $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2,6, R_1 = 3; R_2 = 1,5 \rightarrow (S_1)$ cắt (S_2)

$K = (P) \cap (AB) \Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2KB = KA \rightarrow K(2; 1; 2)$
+) Gọi



+) Gọi VTPT của (P) là: $n_{(P)} = (a; b; c) \perp \overrightarrow{CD} = 2(2; 1; -2) \Rightarrow n_{(P)} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow b = 2c - 2a$.

Suy ra (P) có dạng: $ax + (2c - 2a)y + cz - 4c = 0$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S_1) suy ra

$$d(A, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|3a + 3c|}{\sqrt{5a^2 + 5c^2 - 8ac}} = 3 \Leftrightarrow 2a^2 + 2c^2 - 5ac = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{c}\right) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = 2 \\ \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c - \frac{a=2; c=1}{\rightarrow} (P_1): 2x - 2y + z - 4 = 0 \\ c = 2a - \frac{a=1; c=2}{\rightarrow} (P_2): x + 2y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy $d(B; (P_1)) = d(B; (P_2)) = \frac{3}{2}$ thỏa mãn. Vậy có 2 mặt phẳng

Câu 27. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2024x) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 50$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên dương, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

Lời giải

Trả lời: 12

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; -3; -6)$, $R = 5\sqrt{2}$.

Ta có: $M \in Ox \Rightarrow M(a; 0; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S) . Khi đó (P) đi qua $M(a; 0; 0)$, vuông góc với đường thẳng d , phương trình mặt phẳng (P) là:
 $2(x-a) + 4y - z = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z - 2a = 0$

Ta có: M là điểm nằm ngoài mặt cầu, suy ra: $IM > R \Leftrightarrow (a-4)^2 + 9 + 36 > 50 \Leftrightarrow (a-4)^2 > 5$
 (1)

$$d(I, (P)) < R \Leftrightarrow \frac{|8 - 12 + 6 - 2a|}{\sqrt{21}} < 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |2 - 2a| < 5\sqrt{42}$$

(2)

$$\begin{cases} (a-4)^2 > 5 \\ |2-2a| < 5\sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 11 > 0 \\ a^2 - 2a + 1 < \frac{350}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 7 \\ a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 \leq a \leq 1 \\ 7 \leq a \leq 17 \end{cases}$$

Từ (1) và (2), suy ra:

(do a nguyên dương) $a \in \{1, 7, 8, \dots, 17\}$

Vậy có 12 điểm M thỏa mãn.

Câu 28. (Sở Hòa Bình 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 15 = 0$. Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến chung của hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$, H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d . Biết khi d thay đổi thì điểm H luôn chạy trên một đường tròn (C) cố định. Bán kính của đường tròn (C) bằng?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta xét: $(S_1): \begin{cases} I_1(1; 2; 0) \\ R_1 = 2 \end{cases}$ và $(S_2): \begin{cases} I_2(3; 0; 1) \\ R_2 = 5 \end{cases}, I_1 I_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

$\Rightarrow (S_1)$ tiếp xúc với (S_2) vì tâm I_1 nằm trong mặt cầu $(S_2) \Rightarrow (S_1)$ nằm trong (S_2) .

Gọi M là tiếp điểm của hai mặt cầu

$\Rightarrow 2$ mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có tập hợp các tiếp tuyến d là mặt phẳng (Q) đi qua M và có vectơ pháp tuyến là $\vec{I_1 I_2}$

$\Rightarrow I_1, I_2, M$ thẳng hàng $\Rightarrow \vec{I_2 M} = \frac{3}{5} \vec{I_1 M} \Rightarrow M \left(6; -3; \frac{5}{2} \right)$

$\Rightarrow (Q): \begin{cases} \text{Qua } M \left(6; -3; \frac{5}{2} \right) \\ \vec{n}_{(Q)} = \vec{I_1 I_2} = (2; -2; 1) \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y + z - \frac{41}{2} = 0$

Vì H là hình chiếu từ A lên (Q) :

$\Rightarrow AH: \begin{cases} \text{Qua } A(1; 0; 2) \\ \vec{u}_{AH} = (2; -2; 1) \end{cases} \Rightarrow AH: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow H(1 + 2t; -2t; 2 + t)$

Thay H vào $(Q): 2(1 + 2t) - 2(-2t) + 2 + t - \frac{41}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{6} \Rightarrow H \left(\frac{14}{3}; -\frac{11}{3}; \frac{23}{6} \right)$

Vậy bán kính đường tròn (C) là $HM = \sqrt{\left(6 - \frac{14}{3} \right)^2 + \left(-3 - \frac{-11}{3} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{23}{6} \right)^2} = 2$.

Câu 29. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 1)$ và $B(1; 1; 0)$. Điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $OM = \sqrt{13}$, đường thẳng d qua M song song Oz cắt đường thẳng AB tại điểm $C(a; b; c) (a > 0)$. Giá trị của $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 4

Từ giả thiết ta thấy rằng, tập hợp các điểm $N(x; y; z)$ thuộc đường thẳng d luôn cách trục Oz một khoảng bằng $\sqrt{13}$ (chính là mặt trụ tròn xoay trục Oz , bán kính $r = \sqrt{13}$).

Hình chiếu vuông góc của N trên trục Oz là $H(0; y; z)$.

Do đó: $NH = \sqrt{13} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13$ (1)

Đường thẳng AB đi qua A có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -1)$ nên có phương trình:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (2)$$

$$t^2 + (-1 + 2t)^2 = 13 \Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được:

Từ đó ta tìm được $C(2; 3; -1)$ suy ra $a=2; b=3; c=-1 \Rightarrow a+b+c=4$

Câu 30. (Cụm Quảng Nam 2024) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) , (P) cắt các cạnh DA, DB, DC lần lượt tại A', B', C' sao cho thể tích khối tứ diện $A'B'C'D$ bằng $\frac{1}{8}$ thể tích khối tứ diện $ABCD$. Khi đó, mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz + d = 0$. Biết $c = 4$, hãy tính giá trị biểu thức $T = a^2 - b^3 - d$.

Lời giải

Trả lời: 33

+) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 4; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2; 0; 6) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (24; 12; 8)$

$\Rightarrow (P)$ có vecto pháp tuyến $n = (6; 3; 2) \Rightarrow (P): 6x + 3y + 2z + d = 0$.

+) Ta có: $\frac{V_{DA'B'C'}}{V_{DABC}} = \frac{DA'}{DA} \cdot \frac{DB'}{DB} \cdot \frac{DC'}{DC} = \left(\frac{DA'}{DA} \right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{DA'}{DA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A'$ là trung điểm của $DA \Rightarrow A'(2; 2; 3) \in (P) \Rightarrow 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = -24$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = -24 \end{cases} \Rightarrow T = a^2 - b^3 - d = 6^2 - 3^3 + 24 = 33$$

Câu 31. (Sở Hà Nam 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$. Có bao nhiêu điểm $M(a; b; c)$ (với a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua M và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Lời giải

Trả lời: 16

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$. $M \in (Oyz)$ nên $M(0; a; b)$

Do qua M tồn tại ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc nên mặt nón đỉnh M có đường sinh là các tiếp tuyến vẽ từ M có góc ở đỉnh lớn hơn hoặc bằng 90° . Suy ra $\sqrt{3} \leq IM \leq \sqrt{6}$

Do đó $2 \leq (b-1)^2 + (c-1)^2 \leq 5$ suy ra $-1 \leq b \leq 3$ do $b, c \in \mathbb{Z}$

$b = -1$ thì $c \in \{0; 1; 2\}$

$b = 0$ thì $c \in \{-1; 0; 2; 3\}$

$b = 1$ thì $c \in \{-1; 3\}$

$b = 2$ thì $c \in \{-1; 0; 2; 3\}$

$b = 3$ thì $c \in \{0; 1; 2\}$

Vậy có 16 điểm M thỏa yêu cầu bài toán