ĐỀ SỐ 9: ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $Q=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-2x}{1-x^2}\right):\frac{1-3x}{x^2-1}$ với x ≠ 1; x ≠ -1; x ≠ $\frac{1}{3}$ là:

A. Q = $\frac{-2+x}{3x-1}$ **B.** Q = $\frac{x-2}{1+3x}$ **C.** Q = $\frac{x-2}{-1-3x}$ **D.** Q = $\frac{x+2}{1+3x}$

Câu 2. Cho biểu thức Q= $\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\frac{7}{(3.4)^2}+...+\frac{2.2017+1}{\left[2017.(2017+1)\right]^2}$ thì:

A. $Q=\frac{2018.2019}{2017^2}$ **B.** $Q=\frac{2017.2018}{2019^2}$ **C.** $Q=\frac{2017^2+2019}{2018^2}$ **D.** $Q=\frac{2017.2019}{2018^2}$

Câu 3. Cho các số nguyên a,b,c thoả mãn $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=210$. Giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$ là :

A.210 **B.** 1 **C.**2 **D.** 14

Câu 4. Một hộp có 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 5 đến 14.Bạn Hoa lấy ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Xác suất thực nghiệm của biến cố "Chọn ra thẻ ghi số nguyên tố" là:

A. 0,4 B. 0,3 C. 0,5 D. 0,6

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|=8$ là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 6. Cho đa thức f(x) = $2x^3 - 3ax^2 + 2x + b$. Xác định a và b để f(x) chia hết cho x – 1 và x + 2 là:

A. a=$\frac{20}{9}$; b =$\frac{-20}{3}$ **B.** a=$\frac{-8}{3}$; b =−12 **C.** a=$\frac{-8}{3}$; b =12 **D.** a=$\frac{20}{9}$; b =$\frac{20}{3}$

Câu 7. Các số nguyên a và b để đa thức A(x) = x^4-3x^3+ax+b chia hết cho đa thức $B(x)=x^2-3x-4$ là:

A. a=-12;b=4 **B.** a=-12;b=-16 **C.** a=-12;b=16 **D.** a=3;b=-4

Câu 8. Cho đa thức P(x) = $6x^3 - 7x^2 - 16x + m$. Giá trị m để P(x) chia hết cho 2x + 3 là:

A. 10 **B.** 12 **C.** 14 **D.** Một kết quả khác

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong. Biết AB = 5 cm, IC = 6 cm. Độ dài BC là:

A.11 **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** 9 **D.** 16

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tai A có AB <AC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua I vuông góc với CI cắt AC và AB lần lượt tại E và F. Ta có:

A. $\frac{AF}{BE}=\frac{AI^2}{BI^2}$ **B.** $\frac{AE}{BF}=\frac{AI^2}{BI^2}$ **C.** $\frac{AE}{BF}=\frac{BI^2}{AI^2}$ **D.** $\frac{BE}{AI}=\frac{BI^2}{AF^2}$

Câu 11. Diện tích của hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và CD vuông góc với nhau , BD=15cm là:

A. $120cm^2$ **B**. $130cm^2$ **C**. $150cm^2$ **D**. $160cm^2$

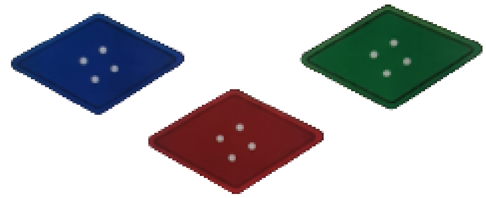
Câu 12: Các khuy áo hình thoi (hình vẽ bên) có độ dài hai đường chéo lần lượt là $3,2cm$ và $2,4cm$. Hỏi cạnh các khuy áo là bao nhiêu?

A. $2cm$

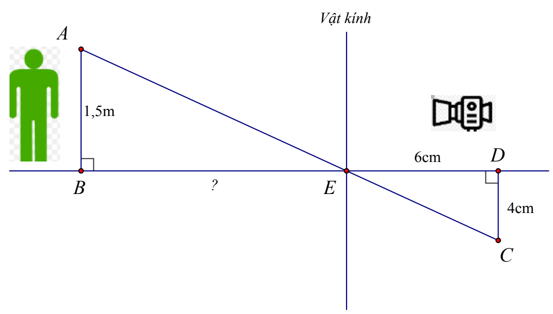
B. $2,8cm$

C. $4cm$

D. $1,8cm$



Câu 13: Người ta dùng máy ảnh để chụp một người có chiều cao $AB = 1,5\ m$ *(như hình vẽ)*. Sau khi rửa phim thấy ảnh CD cao $4\ cm$. Biết khoảng cách từ phim đến vật kính của máy ảnh lúc chụp là $ED = 6\ cm$.



Hỏi người đó đứng cách vật kính máy ảnh một đoạn BE bao nhiêu cm?

A. $225\ cm$ B. $2,25\ cm$. C. $16\ cm$ D. $100\ cm$

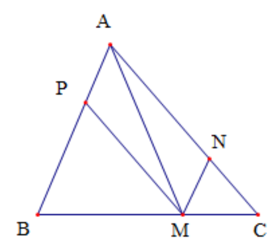
Câu 14: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên cạnh BC. Từ M vẽ MN song song với AB và MP song song với AC (hình vẽ bên). Tứ giác $ANMP$ là hình thoi nếu

A. $MA = MB$

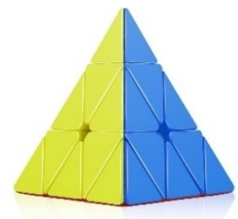
B. M là trung điểm của BC

C. M là chân đường cao thuộc đỉnh A

D. M là chân đường phân giác thuộc đỉnh A



Câu 15: Một khối rubik có bốn mặt là các tam giác đều bằng nhau cạnh $4,7\text{cm}$ và chiều cao mỗi mặt là $4,1\text{cm}$ (hình bên). Bạn An cắt giấy dán tất cả các mặt của khối rubik này thì diện tích giấy là bao nhiêu (không tính mép dán và phần giấy bỏ đi)?



A. $38,54\text{cm}^2$; B. $19,27\text{cm}^2$; C. $77,08\text{cm}^2$; D. $35,2\text{cm}^2$

Câu 16. Hoàng mua 6 quyển vở, Hùng mua 3 quyển vở. Hai bạn góp số vở của mình với số vở của bạn Sơn, rồi chia đều cho nhau. Sơn tính rằng mình phải trả các bạn đúng 800 đồng. Giá tiền 1 quyển vở là: (Biết rằng cả ba bạn đều mua cùng một loại vở).

A. 900 **B**. 1000 **C**. 800 **D.** Một số khác

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm):

a. Chứng minh : a^5-a chia hết cho 30 với $a \in Z$

b. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là một số chính phương

Câu 2 (3,0 điểm): a. Cho các số a, b lần l- ợt thoả mãn các hệ thức sau:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 2011 = 0,\ b^3 - 3b^2 + 5b + 2005 = 0.$$ Hãy tính $a+b$.

b. Tìm tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn đồng nhất hệ thức : (x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)=0, với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là một điểm trên cạnh BC (E khác B và C). Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đ- ờng thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G.

a) Chứng minh $AE = AF$ và tứ giác $EGFK$ là hình thoi.

b) Chứng minh ΔAKF đồng dạng với ΔCAF và $AF^2 = FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi tam giác EKC không đổi.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $4\left(\frac{2}{a+b} + \frac{3}{c+a} + \frac{4}{b+c}\right) \le \frac{5}{a} + \frac{6}{b} + \frac{7}{c}$

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	D	D	A	A	B	B	B	C	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	A	A	D	A	C				

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu1: Cho biểu thức: $Q=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-2x}{1-x^2}\right):\frac{1-3x}{x^2-1}$ x ≠ 1; x ≠ -1; x ≠ $\frac{1}{3}$

Rút gọn biểu thức Q. ĐKXĐ: x ≠ 1; x ≠ -1; x ≠ $\frac{1}{3}$

a) Ta có:

$$A=\left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2}\right).\frac{x^2-1}{1-3x}=\frac{-2}{1-x^2}.\frac{x^2-1}{1-3x}=\frac{2}{1-3x}$$

Câu 2. Rút gọn biểu thức Q= $\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\frac{7}{(3.4)^2}+...+\frac{2.2017+1}{\left[2017.(2017+1)\right]^2}$

Giải:Đương nhiên ta không thể nào QĐMT mà ta tìm cách tách mỗi phân thức thành hiệu hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp.

Ta có : $\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$ => B = ...=1- $\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2017.2019}{2018^2}$

Câu 3. Cho các số nguyên a,b,c thoả mãn $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=210$. Tính giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$.

Đặt $a-b=x;\ b-c=y;\ c-a=z\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-(x+y)$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=210\Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210\Leftrightarrow -3xy(x+y)=210$

$\Leftrightarrow xyz=70$. Do x,y,z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$ nên

$x,y,z\in\{-2;-5;7\}\Rightarrow\ A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=14.$

Câu 4. Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

$$\frac{2-x}{3}<\frac{3-2x}{5}$$

$\frac{2-x}{3}<\frac{3-2x}{5}$

⇔ 5(2-x) < 3(3-2x)

⇔ 10 – 5x < 9-6x

⇔ -5x+6x<9-10

⇔ x<-1

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là {x/x<-1}

- Biểu diễn tập hợp nghiệm trên trục số

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|=8$ là:

Giải a) Ta có $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7| \geq |x-1+7-x|+|x-3+5-x|=8$ (1)

Mà $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|=8$ suy ra (1) xẩy ra dấu "="

Hay $\begin{cases}1 \leq x \leq 7 \\ 3 \leq x \leq 5\end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$ do x nguyên nên x $\in \{3;4;5\}$

Câu 6. Cho đa thức f(x) = $2x^3 - 3ax^2 + 2x + b$

Xác định a và b để f(x) chia hết cho x – 1 và x + 2

Để f(x) chia hết cho 2 đa thức x – 1 và x + 2 ta có

f(x) = (x – 1)(x + 2). Q(x)

+ Với x = 1 => 2 – 3a + 2 + b = 0 => b = 3a (1)

+ Với x = 2 => -1b -12a – 4 + b = 0 => b = 12a + 20 (2)

+ Kết hợp (1) và (2) ta có a = $\frac{-20}{9}$; b = $\frac{-20}{3}$

Câu 7. Các số nguyên a và b để đa thức A(x) = $x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $B(x) = x^2 - 3x + 4$

Ta có: A(x) =B(x).(x^2-1) + (a – 3)x + b + 4

Để $A(x) \vdots B(x)$ thì $\begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

Câu 8. Cho đa thức P(x) = $6x^3 - 7x^2 - 16x + m$. Giá trị m để P(x) chia hết cho 2x + 3 là:

P(x) = $6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 6x^3 + 9x^2 - 16x^2 - 24x + 8x + 12 + m - 12$

$= 3x^2(2x + 3) - 8x(2x + 3) + 4(2x + 3) + m - 12$

$= (2x + 3)(3x^2 - 8x + 4) + m - 12$

Để P(x) $\vdots$ (2x +3) thì m – 12 = 0 <=> m = 12

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong. Biết AB = 5 cm, IC = 6 cm. Tính BC.

Bài giải:

Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI, E là giao điểm của AB và CD. ΔBIC có DIC là góc ngoài nên: $DIC = IBC + ICB = \frac{1}{2}(B + C) = 90^0 : 2 = 45^0$

$\Rightarrow \Delta DIC$ vuông cân $\Rightarrow$ DC = 6 : $\sqrt{2}$

Mặt khác BD là đường phân giác và đường cao nên tam giác BEC cân tại B $\Rightarrow$ EC = 2 DC = 12: $\sqrt{2}$ và BC = BE

Gọi x = BC = BE. (x > 0). Áp dụng định lý Pi-ta-go vào các tam giác vuông ABC và ACE ta có: $AC^2 = BC^2 - AB^2 = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

$EC^2 = AC^2 + AE^2 = x^2 - 25 + (x - 5)^2 = 2x^2 - 10x$

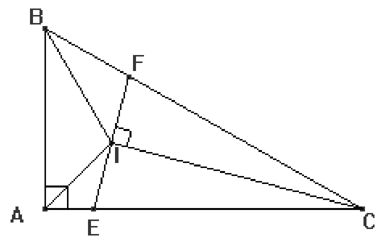
$(12: \sqrt{2})^2 = 2x^2 - 10x$

$x^2 - 5x - 36 = 0$

Giải phương trình ta có nghiệm x = 9 thoả mãn. Vậy BC = 9 (cm)

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tai A có AB <AC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua I vuông góc với CI cắt AC và AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AE}{BF}=\frac{AI^2}{BI^2}$

0,5đ



Chứng minh được ΔAEI đồng dạngΔIFB

$\Rightarrow \frac{AE}{IF}=\frac{AI}{BI}=\frac{EI}{FB}$ (1)

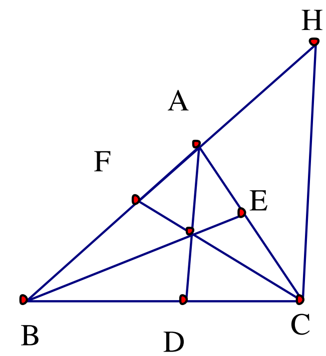
Chứng minh IE=IF (2)

Từ (1,2) chứng minh được $\frac{AE}{BF}=\frac{AI^2}{BI^2}$

Câu 11. Diện tích của hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và CD vuông góc với nhau , BD=15cm là: $150cm^2$ **(Bồi dưỡng HSG hình học 9 Trang 18)**

Câu 12. Cho ΔABC . Ba đường phân giác AD, BE, CF . Ta có

a. $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$.



Giải

a)AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (1)

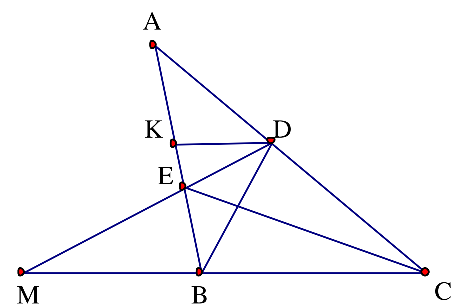
Tương tự: với các phân giác BE, CF ta có: $\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{BA}$ (2) ;

$\frac{FA}{FB}=\frac{CA}{CB}$ (3)

Tứứ (1); (2); (3) suy ra: $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{BA}.\frac{CA}{CB}=1$

Câu 13. Cho ΔABC (AB < AC) các phân giác BD, CE

Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K,



a) BD là phân giác nên

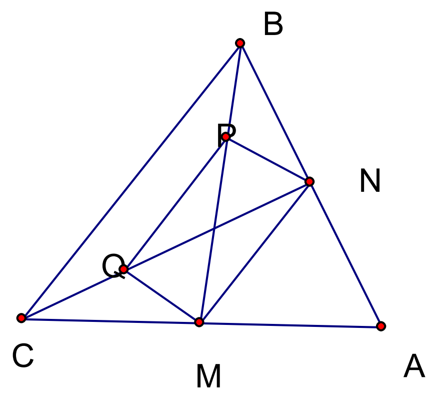
$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}<\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{EB}\Rightarrow\frac{AD}{DC}<\frac{AE}{EB}$ (1)

Mặt khác KD // BC nên $\frac{AD}{DC}=\frac{AK}{KB}$ (2)

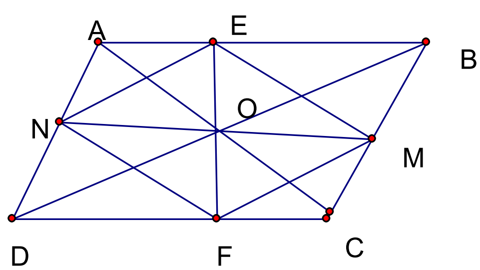
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB}<\frac{AE}{EB}\Rightarrow\frac{AK+KB}{KB}<\frac{AE+EB}{EB}\Rightarrow\frac{AB}{KB}<\frac{AB}{EB}\Rightarrow KB>EB$

$\Rightarrow$ E nằm giữa K và B

Câu 14. Cho tam giác ABC, các trung tuyến BM và CN cắt nhau ở G. Gọi P là điểm đối xứng của điểm M qua G. Gọi Q là điểm đối xứng của điểm N qua G.Tứ giác MNPQ là hình gì? Vì sao ?



Ta có M và P đối xứng qua G nên GP = GM.
N và Q đối xứng qua G nên GN = GQ
Mà hai đường chéo PM và QN cắt nhau tại G nên MNPQ là hình bình hành.(dấu hiệu thứ 5).
Câu 15. Cho hình bình hành ABCD. Lấy hai điểm E, F theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho AE = CF. Lấy hai điểm M, N theo thứ tự thuộc BC và AD sao cho CM = AN. Chứng minh rằng :
a. MENF là hình bình hành.
b. Các đường thẳng AC, BD, MN, EF đồng quy.



a/Xét tam giác AEN và CMF ta có
AE = CF, A = C , AN = CM
AEN = CMF(c.g.c)
Hay NE = FM
Tương tự ta chứng minh được EM = NF
Vậy MENF là hình bình hành.
b/ Ta có AC cắt BD tại O, O cách dều E, F. O cách đều MN nên Các đường thẳng AC, BD, MN, EF đồng quy.
Câu 16: Hoàng mua 6 quyển vở, Hùng mua 3 quyển vở. Hai bạn góp số vở của mình với số vở của bạn Sơn, rồi chia đều cho nhau. Sơn tính rằng mình phải trả các bạn đúng 800 đồng. Tính giá tiền 1 quyển vở, biết rằng cả ba bạn đều mua cùng một loại vở.
Bài giải:
Vì Hoàng và Hùng góp số vở của mình với số vở của Sơn, rồi chia đều cho nhau, nên tổng số vở của ba bạn là một số chia hết cho 3. Số vở của Hoàng và Hùng đều chia hết cho 3 nên số vở của Sơn cũng là số chia hết cho 3.
Số vở của Sơn phải ít hơn 6 vì nếu số vở của Sơn bằng hoặc nhiều hơn số vở của Hoàng (6 quyển) thì sau khi góp vở lại chia đều Sơn sẽ không phải trả thêm 800 đồng. Số vở của Sơn khác 0 (Sơn phải có vở của mình thì mới góp chung với các bạn được chứ!), nhỏ hơn 6 và chia hết cho 3 nên Sơn có 3 quyển vở.
Số vở của mỗi bạn sau khi chia đều là: (6 + 3 + 3) : 3 = 4 (quyển)
Như vậy Sơn được các bạn đưa thêm: 4 - 3 = 1 (quyển)
Giá tiền một quyển vở là 800 đồng.

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,0 điểm): a. Chứng minh : a^5-a chia hết cho 30 với $a \in Z$

b. Chứng minh rằng : x^5-x+2 không là số chính ph- ơng với mọi $x \in Z^+$

a. Có: a^5-a=a(a^4-1)=a(a^2-1)(a^2+1)=a(a-1)(a+1)(a^2-4+5)

=a(a-1)(a+1)(a+2)(a-2)+5a(a-1)(a+1) vì a nguyên nên a(a-1)(a+1)(a+2)(a-2) là tích 5 số nguyên liên tiếp nên$\vdots$30; 5a(a-1)(a+1)là tích của 3số nguyên liên tiếp với 5 nên chia hết cho 30$\Rightarrow$đpcm

b. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì $A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là một số chính phương

c. Lời giải

Cách 1: Ta có: $A=\left(x^2+5xy+4y^2\right)\left(x^2+5xy+6y^2\right)+y^4=x^4+10x^3y+35x^2y^2+50xy^3+25y^4$

$=\left(x^2+5xy\right)^2+2\left(x^2+5xy\right).5y^2+\left(5y^2\right)^2=\left(x^2+5xy+5y^2\right)^2$

Vì $x, y, z \in Z \Rightarrow x^2, 5xy, 5y^2 \in Z \Rightarrow x^2+5xy+5y^2 \in Z \Rightarrow A$ là số chính phương

Câu 2 (4,0 điểm):a. Cho các số a, b lần l- ợt thoả mãn các hệ thức sau:

$$a^3-3a^2+5a-2011=0,\ b^3-3b^2+5b+2005=0$$

Hãy tính $a+b$. Từ điều kiện đã cho ta có:

$(a-1)^3+2(a-1)-2008=0\,(1),\quad (b-1)^3+2(b-1)+2008=0\,(2)$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta có $(a-1)^3+(b-1)^3+(a+b-2)=0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2\right]+2(a+b-2)=0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2\right]=0$

Vì $(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2$

$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2+2>0\ \ \forall a, b$

Nên $a+b-2=0 \Leftrightarrow a+b=2$

b.Tìm tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn đồng nhất hệ thức : (x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)=0, với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Thay vào đồng nhất ta có P(0)=P(1)=P(-1)=0 , tức là đa thức P(x) có các nghiệm là -1;0 và 1. Suy ra P(x) chia hết cho x^3-x.

Viết lại P(x)=(x^3-x) Q(x) , Q(x) là các đa thức có hệ số thực và thay vào (1) đồng nhất ta có Q(x)=Q(x-1) với $\forall x \in \mathbb{R}$. Lần lượt thay các giá trị x=0;-1;-2… ta nhận được Q(0)=Q(-1)=Q(-2) … Do đó Q(x)= a là hằng số .

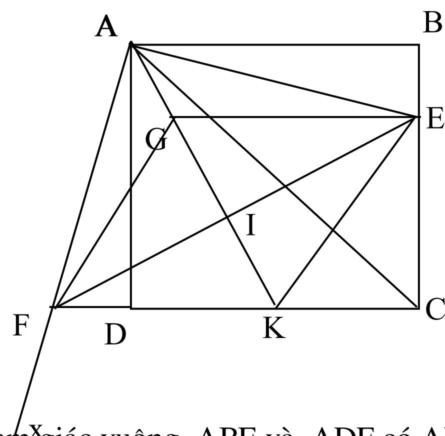
Vậy P(x)= (x^3-x) a (a là hằng số tùy ý .

Câu 3 (4,0 điểm): Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là một điểm trên cạnh BC (E khác B và C). Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đ- ờng thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G.

a) Chứng minh $AE = AF$ và tứ giác $EGFK$ là hình thoi.

b) Chứng minh ΔAKF đồng dạng với ΔCAF và $AF^2 = FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi tam giác EKC không đổi.

<table>
<tr><td>a.
2.0đ</td><td>

Xét hai tam giác vuông ABE và ADF có AB = AD, $BAE = CAF$
(Cùng phụ với DAE). Vậy $\Delta ABE = \Delta ADF \Rightarrow AE = AF$
Vì $AE = AF$ và AI là trung tuyến của tam giác AEF $\Rightarrow AI \perp EF$. Hai tam giác vuông IEG và IFK có IE=IF, $IEG = IFK$ (So le trong) nên Δ IEG= Δ IFK
$\Rightarrow$EG=FK. Tứ giác EGFK có hai cạnh đối EG và FK song song và bằng nhau nên là hình bình hành.
Hình bình hành EGFK có hai đ- ờng chéo GK và EF vuông góc nên là hình thoi</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>Xét hai tam giác AKF và CAF ta có $AFK = CFA$ (góc chung), $KAF = ACF = 45^0$ (AC là đ- ờng chéo hình vuông ABCD, AK là trung tuyến của tam giác vuông cân AEF)
Suy ra tam giác AKF đồng dạng với tam giác CAF.
Vì tam giác AKF đồng dạng với tam giác CAF nên ta có: $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{FK}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = FK.FC$</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>Theo ý a, ta có $\Delta ABE = \Delta ADF$ nên EB = FD
Tứ giác EGFK là hình thoi nên EK=KF
Do đó, chu vi tam giác EKC bằng -EK+KC+CE=CF+CE=CD+DF+CE=2CD (không đổi)</td></tr>
</table>

Câu 4 (1,0 điểm):

Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $4\left(\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{3}{c+a}+\dfrac{4}{b+c}\right) \le \dfrac{5}{a}+\dfrac{6}{b}+\dfrac{7}{c}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng:

$$\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{4}{a+b} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow 2.\frac{4}{a+b} \le 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right); \frac{4}{c+a} \le \frac{1}{c}+\frac{1}{a} \Rightarrow 3.\frac{4}{a+c} \le 3\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right); \frac{4}{b+c} \le \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Rightarrow 4.\frac{4}{b+c}$$

Cộng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$4\left(\frac{2}{a+b}+\frac{3}{c+a}+\frac{4}{b+c}\right) \le \frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c} \text{ (đpcm)}$$

Hết