

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8. Năm học: 2017-2018

Câu 1: (4,0 điểm) Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1.$

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

Câu 4: (3,0 điểm) Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

“HẾT”

C. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: (4,0 điểm) Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

CÂU 1	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ $= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$ $= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$ $= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40$ $= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40$ Vậy $A : 40$	0,5 0,5 0,5 0,5
b	$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ $= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100}$ $< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ $= 1 - \frac{1}{100} < 1$ Vậy $B < 1$	0,5 0,5 0,5 0,5

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

CÂU 2	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	Ta có: $a + b + c = 0 \text{ suy ra } a + b = -c$ Mặt khác: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ Suy ra $(-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm)}$	0,5 0,5 0,5 0,5
b	$C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $(2-1)C = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $C = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25 0,25

	$C = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = (2^{16}-1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = 2^{32}-1$	0,25
	Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên $C < D$.	0,5

Câu 3: (4,0 điểm)

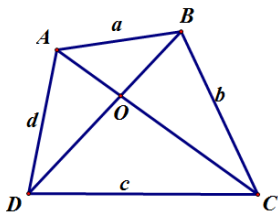
a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

CÂU 3	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$ $= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3$ $= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1)$ $= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ $= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1)$ $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$	0,5 0,5 0,5 0,25 0,25
b	$E = 2x^2 - 8x + 1$ $= 2x^2 - 8x + 8 - 7$ $= 2(x^2 - 4x + 4) - 7$ $= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7$ khi $x = 2$	0,5 0,5 0,5 0,5

Câu 4: (3,0 điểm)

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
	

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.	
Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$.	
Xét $\triangle AOB$, ta có: $OA + OB > AB$ (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).	
Xét $\triangle COD$, ta có: $OC + OD > CD$ (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).	0,25
Suy ra: $OA + OB + OC + OD > AB + CD$	0,25
$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$	
$\Rightarrow AC + BD > a + c$ (1)	0,25
Chứng minh tương tự:	
$AC + BD > AD + BC$	0,25
$\Rightarrow AC + BD > d + b$ (2)	
Từ (1) và (2) suy ra $2(AC + BD) > a + c + d + b$	0,25
$\Rightarrow AC + BD > \frac{a + c + d + b}{2}$ (*)	0,25
Xét $\triangle ABC$, ta có: $AC < a + b$	
Xét $\triangle ADC$, ta có: $AC < d + c$	
Suy ra: $2AC < a + b + c + d$	0,25
$\Rightarrow AC < \frac{a + c + d + b}{2}$ (3)	0,25
$BD < \frac{a + c + d + b}{2}$ (**)	
Chứng minh tương tự: (4)	0,25
Từ (3) và (4) suy ra: $AC + BD < a + b + c + d$.	
Từ (*) và (**) suy ra $\frac{a + c + d + b}{2} < AC + BD < a + b + c + d$	0,25
(đpcm)	0,25

Câu 5: (4,0 điểm)

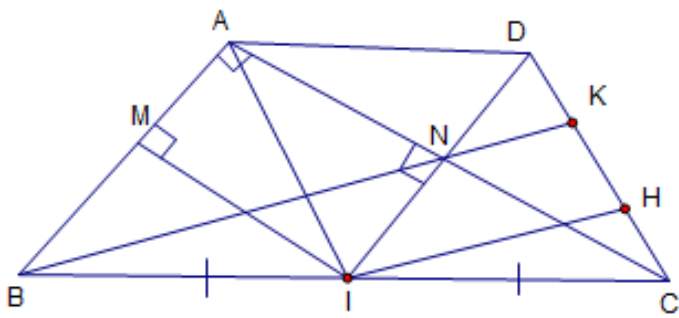
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$.

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
		
a	Xét tứ giác AMIN có: $\widehat{MAN} = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông ở A) $\widehat{AMI} = 90^\circ$ (vì IM vuông góc với AB) $\widehat{ANI} = 90^\circ$ (vì IN vuông góc với AC) Vậy tứ giác AMIN là hình chữ nhật (Vì có 3 góc vuông)	0,25 0,25 0,25 0,25
b	ΔABC vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$ Do đó ΔAIC cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến $\Rightarrow NA = NC$ Mặt khác: $NI = ND$ (tính chất đối xứng) nên ADCI là hình bình hành (1) Mà $AC \perp ID$ (2) Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ADCI là hình thoi.	0,5 0,5 0,5 0,5
c	Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H $\Rightarrow IH$ là đường trung bình ΔBKC $\Rightarrow H$ là trung điểm của CK hay $KH = HC$ Xét ΔDIH có N là trung điểm của DI, $NK \parallel IH$ ($IH \parallel BK$) Do đó K là trung điểm của DH hay $DK = KH$	0,25 0,25 0,25 0,25

	$\Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$ Từ (3) và (4) suy ra $DK = KH = HC$	0,25
--	--	------

Câu 6: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Ta có : $\left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab \quad (1)$ $\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac \quad (2)$ $\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad \quad (3)$ $\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae \quad (4)$ Ta cộng (1), (2), (3), (4) về theo về ta được : $4 \cdot \frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$	0,25 0,25 0,25 0,25

• **Lưu ý :**

- Mọi cách giải khác của học sinh có kết quả đúng đều ghi điểm tối đa.
- Riêng câu 4 và câu 5 nếu học sinh không vẽ hình mà làm đúng thì cho $\frac{1}{2}$ tổng số điểm của câu đó.

(Đề thi gồm có 08 trang)