

MỤC LỤC

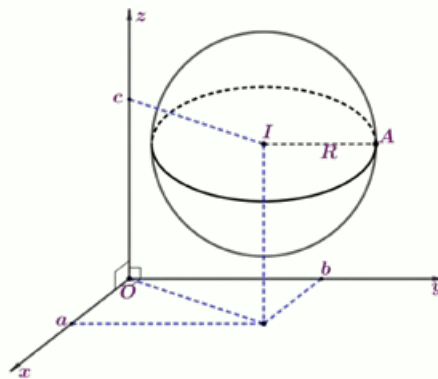
	▶ BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN.....	2
2	Ⓐ. Tóm tắt kiến thức
4	Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản
	•Dạng ❶: Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu....	4
	•Dạng ❷: Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm.....	5
	•Dạng ❸: Mặt cầu có đường kính.....	5
	•Dạng ❹: Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng.....	6
	•Dạng ❺: Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng/mặt phẳng.....	7
	•Dạng ❻: Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng/mặt phẳng.....	8
	•Dạng ❼: Mặt cầu cắt đường thẳng/mặt phẳng.....	9
	•Dạng ❽: Vị trí tương đối liên quan mặt cầu.....	10
	•Dạng ❾: Bài toán thực tế.....	11
12	Ⓒ. Dạng toán rèn luyện
	•Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	12
	•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	16
	•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	18

A. Tóm tắt kiến thức

1. Phương trình mặt cầu

✍ Phương trình mặt cầu:

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Xác Định h	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



2. Vị trí tương đối

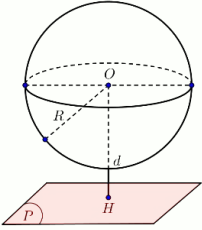
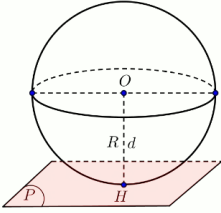
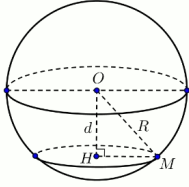
✍ Giữa mặt cầu và điểm:

● Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I; R)$. Khi đó:

		Điểm		
		Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	Nằm trên $\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	Nằm trong $\Leftrightarrow IM \cap (S) = \emptyset$
		$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$
Mặt cầu				

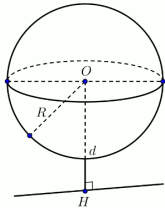
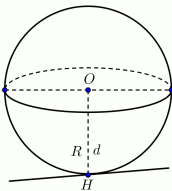
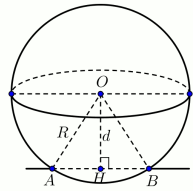
✍ **Giữa mặt cầu và mặt phẳng:**

🔵 Trong không gian $Oxyz$, cho $(a): Ax+By+Cz+D=0$ và $S(I;R)$. Khi đó:

Mặt phẳng			
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow (a) \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow (a) \cap (S) = \{M\}$	Cắt theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow (a) \cap (S) = C(I';r)$
	$d(I;(a)) > R$	$d(I;(a)) = R$ \Leftrightarrow Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M .	$d(I;(a)) < R$ $\Leftrightarrow (a)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r . $R = \sqrt{r^2 + d^2(I;(a))}$
			

✍ **Giữa mặt cầu và mặt phẳng:**

🔵 Trong không gian $Oxyz$, cho $D: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và $S(I;R)$. Khi đó:

Đường thẳng			
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow D \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow D \cap (S) = \{H\}$	Cắt tại hai điểm $A;B \Leftrightarrow D \cap (S) = \{A;B\}$
	$d(I;D) > R$	$d(I;D) = R$ \Leftrightarrow Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I;D) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I;D)}$
			

B. Phân dạng toán cơ bản

•Dạng ①: Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu

✍ Phương pháp

	LOẠI 1	LOẠI 2	
Phương Trình	$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$	
Nhận xét	(1) Hệ số trước x, y, z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2, y^2, z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2, y^2, z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$	
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

✍ **Định nghĩa** $S(I; R) = \{ M \mid IM = R > 0 \}$.

• Cho hai điểm A, B cố định.

• Nếu $MA \perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm

AB và bán kính $R = \frac{AB}{2}$

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

(1) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$.

(2) $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

(3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

(4) $(x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đấy nhận $I(-1; 1; 0)$ làm tâm?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ (2) $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$

(3) $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$ (4) $(x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-1)$ và $B(0;6;0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì M thuộc một mặt cầu (S) . Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Tính độ dài OM lớn nhất.

•Dạng ②: Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

✍ Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R .	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R . Phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.	>> Bán kính mặt cầu $R = IM = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2}$. >> Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = IM$.

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ (2) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ. (2) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

•Dạng ③: Mặt cầu có đường kính

✍ Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ làm đường kính	<p>» Gọi I là tâm mặt cầu (S)</p> <p>$\Rightarrow I$ là trung điểm của MN</p> <p>$\Rightarrow I \left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2} \right)$</p> <p>» Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = IM$</p>

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -3)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{AO} = (-1; -2; 3)$ và $\vec{BO} = (-7; -4; -5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

• Dạng ④: Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

✍ Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A; B; C; D$ không đồng phẳng	<p>» Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm.</p> <p>» Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm</p> <p>$\Leftrightarrow IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ I.</p> <p>» Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.</p>

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2; 2; 2), N(4; 0; 2), P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$.
Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

•Dạng ③: Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng/mặt phẳng

✍ Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
<p>Tâm $I \in (P)$ và đi qua $A;B;C$. Với $(P): a.x+b.y+g.z+d=0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ✍ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.</p>	<p>» Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in (P) \Rightarrow a.a+b.b+g.c+d=0$ (1) » Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A;B;C$ $\Leftrightarrow IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 & (2) \\ IA^2=IC^2 & (3) \end{cases}$ » Từ (1);(2) và (3) $\Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases} a.a+b.b+g.c+d=0 \\ IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ I. » Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.</p>
<p>Tâm $I \in d$ và đi qua $A;B$. Với $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc d là các trục $Ox;Oy;Oz$. ✍ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các trục $Ox;Oy;Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.</p>	<p>» Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in d \Rightarrow I(x_0+at; y_0+bt; z_0+ct)$ » Viết $\overline{IA}; \overline{IB}$ theo t và tính độ dài $\overline{IA} ; \overline{IB}$ » Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A;B$ $\Leftrightarrow IA=IB \Leftrightarrow \overline{IA} = \overline{IB} \Rightarrow t=?$ » Từ $t=? \Rightarrow$ tọa độ I. » Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.</p>

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;3), B(2;0;-2)$, và có tâm nằm trên trục Ox . Viết phương trình mặt cầu (S) ?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm I thuộc $D: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

•Dạng ⑥: Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng/mặt phẳng

✍ Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
<p>Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P).</p> <p>Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$.</p> <p>✍ Nhận xét:</p> <p>Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.</p>	<p>» Bán kính mặt cầu</p> $R = \begin{cases} d(I;(a)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{Tiếp xúc (a)} \\ d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} & \text{Tiếp xúc (Oxy)} \\ d(I;(Oxz)) = \sqrt{y_I^2} & \text{Tiếp xúc (Oxz)} \\ d(I;(Oyz)) = \sqrt{x_I^2} & \text{Tiếp xúc (Oyz)} \end{cases}$ <p>» Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;(a))$</p>
<p>Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với D.</p> <p>Với $D: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc D là các trục $Ox; Oy; Oz$.</p> <p>✍ Nhận xét:</p> <p>Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.</p>	<p>» Bán kính mặt cầu</p> $R = \begin{cases} d(I;D) = \frac{\left \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ u & M & I \end{vmatrix} \right }{ u } & \text{Tiếp xúc D} \\ d(I;Ox) = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc Ox} \\ d(I;Oy) = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc Oy} \\ d(I;Oz) = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} & \text{Tiếp xúc Oz} \end{cases}$ <p>» Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;D)$</p>

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) .

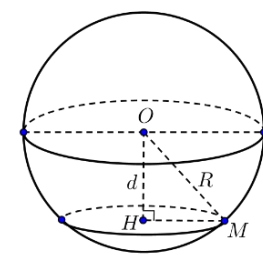
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

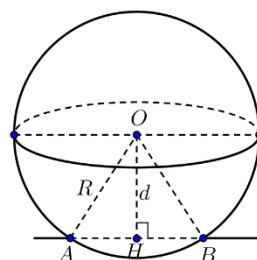
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC .

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9), C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là?

•Dạng 7: Mặt cầu cắt đường thẳng/mặt phẳng
Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
<p>Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r.</p> <p>Với $(P): Ax+By+Cz+D=0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$.</p> <p>Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.</p>	<p>$d(I;(a)) = \frac{ Aa+Bb+Cc+D }{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$</p> <p>» Tính</p> <p>» Bán kính: $R^2 = d^2(I;(a)) + r^2 = OH^2 + HM^2$</p> <p>» Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.</p> 
<p>Tâm $I(a;b;c)$ và cắt D tại $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$ và H là trung điểm AB.</p> <p>Với $D: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc D là các trục $Ox; Oy; Oz$.</p> <p>Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.</p>	<p>$d(I;D) = \frac{\left \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} \right }{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$</p> <p>» Tính</p> <p>» Bán kính: $R^2 = d^2(I;(a)) + AH^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}$</p> <p>» Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;D)$.</p>



☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;4;1)$ và $(P): x+y+z-4=0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho $DABC$ vuông.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với $AB=10$. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

•Dạng ③: Vị trí tương đối liên quan mặt cầu

✍ Phương pháp

Mặt cầu

Mặt phẳng

	$d(I;(P)) = \frac{ \alpha x_I + by_I + cz_I + d }{ \vec{n}_{(P)} }$	
Tính		và so sánh với bán kính R
$d(I;(P)) > R$		Mặt phẳng không cắt mặt cầu
$d(I;(P)) = R$		Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
$d(I;(P)) < R$		Mặt phẳng cắt mặt cầu

Đường thẳng

	$d(I;d) = \frac{\left \begin{vmatrix} \vec{r}_I & \vec{u} \\ \vec{u} & \vec{MI} \end{vmatrix} \right }{ \vec{u} }$	
Tính		và so sánh với bán kính R

	$d(I;d) > R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;d) = R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d(I;d) < R$	Đường thẳng cắt mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM > R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM = R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM < R$	Điểm M nằm trong mặt cầu

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Xét vị trí của điểm M so với mặt cầu (S)

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$. Xét vị trí của mặt phẳng (P) so với mặt cầu (S)

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(D): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$. Số điểm chung của (D) và (S) là?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$, $2x + 2y + z + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S) ?

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $D: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{m} = \frac{z}{-1}$. Giá trị của m để D không cắt mặt cầu (S) là?

•Dạng 9: Bài toán thực tế **Phương pháp**

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6; -2; 4)$.

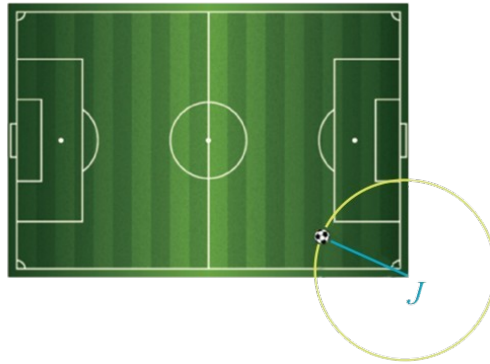
(1) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.



(2) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5; 2; -2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

(3) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6; 0; 3)$.

Câu 2: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-8)^2 = 100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



- (1) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- (2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.
- (3) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J .

©. Dạng toán rèn luyện

• Dạng 0: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I(0; -4; -1), R=25$ B. $I(0; -4; -1), R=5$
 C. $I(0; 4; 1), R=25$ D. $I(0; 4; 1), R=5$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I(-3; 2; -4), R=25$ B. $I(3; -2; 4), R=5$

C. $I(3; -2; 4), R=25$ D. $I(-3; 2; -4), R=5$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2; -4; 1), R=5$ B. $I(-2; 4; -1), R=25$

C. $I(2; -4; 1), R=\sqrt{21}$ D. $I(-2; 4; -1), R=21$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

A. $(-1; 2; -3)$ B. $(1; -2; -1)$ C. $(1; -2; 1)$ D. $(1; -2; 3)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

A. $M(1; 1; 1)$ B. $N(0; 1; 0)$ C. $P(1; 0; 1)$ D. $Q(1; 1; 0)$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S) . B. Điểm M nằm trên mặt cầu (S) .
 C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S) . D. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) .

Câu 7: Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = -3$
 C. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = 9$ D. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = -9$

Câu 8: Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d > 0$ B. $a^2 + b^2 + c^2 + d > 0$
 C. $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ D. $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$

Câu 9: Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 21 = 0$

D. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y - 8z - 10 = 0$

Câu 10: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ bán kính $R=3$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$

Câu 11: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(-1; 2; -3)$ và đi qua điểm $M(0; 3; 2)$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{13}$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 27$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{27}$

Câu 12: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(0; 3; 1)$ bán kính $R=2$

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 6 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z - 6 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z - 6 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z + 6 = 0$

Câu 13: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z - 10 = 0$.

A. Tâm $I(-4; 3; -1)$ và bán kính $R=6$.

B. Tâm $I(-4; 3; -1)$ và bán kính $R=36$.

C. Tâm $I(4; -3; 1)$ và bán kính $R=6$.

D. Tâm $I(4; -3; 1)$ và bán kính $R=36$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2km . Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4; 0; 2)$

B. $B(-5; -2; 5)$

C. $C(-6; 2; 2)$

D. $D(0; -1; 4)$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2km . Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

- A. $A(-5;0;3)$ B. $B(-5;-2;5)$ C. $C(-6;2;2)$ D. $D(-7;-2;3)$

Câu 16: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z + 4 = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z + 14 = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z - 10 = 0$

Câu 17: Trong các phương trình sau, có bao nhiêu phương trình là phương trình của mặt cầu?

- (i). $x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 32 = 0$ (ii). $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z + 4 = 0$
 (iii). $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 10 = 0$ (iv). $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z - 4 = 0$
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18: Viết phương trình mặt cầu có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$.

- A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 30$ B. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 30$
 C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = \sqrt{30}$ D. $(x-3)^2 - (y-1)^2 - (z+4)^2 = 30$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;2)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz là

- A. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$ B. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$
 C. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 5$ D. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 25$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z - 14 = 0$. Mặt phẳng $(P): -x + 4z + 5 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Tọa độ tâm H của (C) là

- A. $H(-3;1;-2)$ B. $H(-7;1;-3)$ C. $H(9;1;1)$ D. $H(1;1;-1)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy . Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

- A. $M(-1;-2;1)$ B. $N(3;2;-1)$ C. $P(-5;2;-7)$ D. $Q(5;-2;7)$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây

không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

- A. $M(5;0;0)$ B. $N(3;2;-1)$ C. $P(-1;3;1)$ D. $Q(0;-2;0)$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ có tọa độ đỉnh $A(m; m; 0)$, $B(0; m; m)$, $C(m; 0; m)$. Biết tứ diện $OABC$ có bán kính mặt cầu (S) nội tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{3}$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{3}$
C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{3}$ D. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y + 6z + 24 = 0$. Hai điểm M, N thuộc (S) sao cho $MN = 8$ và $OM^2 - ON^2 = -112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

- A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$.

- (a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .
(b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .
(c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C) .
(d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID < 4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R .

- (a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R = 3$.
(b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.
(c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

(d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R .

(a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R=2$.

(b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1; 1; 2)$.

(c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0; 1; -2)$ và $B(2; -1; -4)$.

(d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Khi đó

(a) Mặt cầu tâm B , bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.

(b) Mặt cầu tâm A , đi qua B có phương trình là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

(c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{13}{4}$.

(d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm $DABC$, có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25; 30; 50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5$ km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

(a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 25$.

(b) Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .

(c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

(d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $O'(0;0;4)$. Ta có

(a) Mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(b) Mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

(c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO') , mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{12}{61}$.

(d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

(a) Mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

(b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t; -1+2t; -2-t)$.

(c) $d(I, (P)) = 3$.

(d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian Oxy , tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; m; 1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a; b)$ với $a; b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và đi qua $A(5; -1; 4)$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c + R^2$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 2; -2)$, $B(3; -3; 3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, tính giá trị của $P = \frac{abc}{R}$?

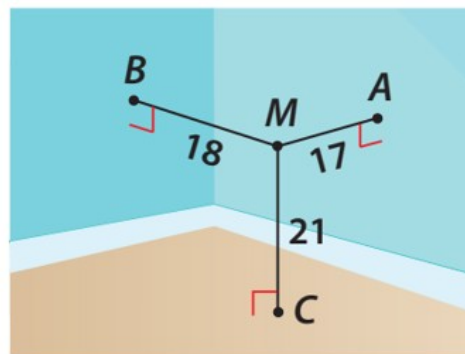
Câu 9: Cho các điểm $A(-2;4;1), B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2+t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính của mặt cầu (S) là $R = a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P = a + b$?

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

Câu 11: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, $(P): x+2y-2z-2=0$, $(Q): x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I, R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Câu 13: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.



Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>