

## CHỦ ĐỀ 3: CÁC BÀI TOÁN VỀ RÚT GỌN BIỂU THỨC

### Bài 1.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$  với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=25$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để  $B < A$

### Bài 2.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=64$
- 2) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$
- 3) Cho  $P = \frac{A}{B}$ . Tìm các giá trị của  $x$  để  $P \geq \frac{2}{x+2}$

### Bài 3.

Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}; B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$  với  $x^3 \neq 0; x \neq 1$ .

- 1) Tính giá trị biểu thức  $A$  tại  $x=9$
- 2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ .
- 3) Cho  $P = A \cdot B$ . Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $|P| + P = 0$ .

### Bài 4.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$  và  $B = \frac{x-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{9}{x-3\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 9$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=25$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 3) Xét biểu thức  $P = A \cdot B$ . Chứng minh  $P > 0$ .

### Bài 5.

Cho hai biểu thức

$A = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4}$  và  $B = \frac{x+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$  ( $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ )

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=1$
- 2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$

---

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = A.B$

**Bài 6.**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$  và  $B = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 16$
- 2) Đặt  $P = A + B$ . Rút gọn biểu thức  $P$
- 3) Tìm  $m$  để có  $x$  thỏa mãn  $P(\sqrt{x} + 3) = m$

**Bài 7.**

Cho biểu thức:  $M = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}; P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2 + 8\sqrt{x}}{x - 1} - \frac{2}{1 - \sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$ .

1) Tính  $M$  khi  $x = 0,49$

2) Chứng minh  $P = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1}$

3) Đặt  $Q = M.P + \frac{x - 5}{\sqrt{x}}$ . So sánh  $Q$  với 3.

**Bài 8.**

Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{x + 9\sqrt{x}}{x - 9}$  với  $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 100$
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$
- 3) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $M = A : B$  có giá trị nguyên

**Bài 9.**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $B$  với  $x = 25$ .

2) Chứng minh  $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ .

3) Tìm  $x$  để biểu thức  $S = A.B$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 10.**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x - 9}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 4}{9 - x}$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 4$

2) Chứng minh rằng:  $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 9}$

3) Xét biểu thức  $P = AB$ . So sánh  $P^2$  với  $P$

**Bài 11.**

---

---

Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$  ( $x \geq 0; x \neq 9$ )

1) Rút gọn biểu thức  $A$ .

2) Tìm giá trị của  $x$  để  $A = \frac{1}{3}$

3) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$

### Bài 12.

Cho hai biểu thức và  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ ;  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x}{x-9}$  với  $x > 0; x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=16$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$ .

3) Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $P < 0$  với  $P = A \cdot B$ .

### Bài 13.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$  và  $B = \frac{5}{\sqrt{x-2}} - \frac{16+2\sqrt{x}}{x-4}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=9$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$ .

3) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  để  $5A + B \leq 3$ .

### Bài 14.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ ;  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{x-4\sqrt{x}+15}{9-x}$  với  $x > 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 25$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-3}}$ .

3) Cho  $P = A : B$ . Tìm  $x$  nguyên để  $|P| + P = 0$ .

### Bài 15.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$  và  $B = \frac{x+\sqrt{x-2}}{x-2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 25$

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}$

3) Đặt  $P = A : B$ . Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $P = P^4$ .

### Bài 16.

---

---

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{x+3}{x-9} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+3}}$  với  $x > 0; x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x=16$ .

2) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

3) Đặt  $P = A \cdot B$ . Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $P < 1$

### Bài 17.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  tại  $x=9$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

3) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$ .

### Bài 18.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+4}{x-4}$  với  $x > 0, x \neq 4$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=9$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

3) Cho  $P = A \cdot B$ . Tìm giá trị của  $x$  khi  $|P| = P$ .

### Bài 19.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$  và  $B = \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=4$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}}$ .

3) Xét biểu thức  $P = A + \frac{1}{B}$ . Tìm  $x$  để  $P \geq 1$ .

### Bài 20.

Cho hai biểu thức  $M = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$  và  $N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$  với  $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị biểu thức của  $M$  khi  $x=9$ .

2) Rút gọn biểu thức  $N$ .

3) Tìm giá trị của  $x$  để biểu thức  $\frac{M}{N}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

### Bài 21.

---

---

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$  và  $B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0, x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 16$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-3}}$ .

3) Tìm tất cả giá trị của  $x$  để  $A - B < 0$ .

### Bài 22.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$

với  $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 16$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ .

3) Cho  $P = A : B$ . Tìm  $x$  để  $P < \frac{1}{2}$

### Bài 23.

Cho hai biểu thức:  $P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4}$  và  $Q = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$  (với  $x \geq 0; x \neq 4$ )

1) Tính giá trị của biểu thức  $Q$  khi  $x = 9$ .

2) Rút gọn biểu thức  $P$ .

3) Biết  $M = \frac{P}{Q}$ ; Tìm các giá trị của  $x$  để  $M = 18$ .

### Bài 24.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$  và  $B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$  với  $x > 0$ .

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 9$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

3) Tìm giá trị của  $x$  để  $P = 2AB + \frac{4}{x+1}$  đạt giá trị lớn nhất.

### Bài 25.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \frac{x+1}{x-\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  tại  $x = 25$ .

2) Rút gọn  $B$ .

3) Cho  $P = A.B$ . So sánh giá trị của  $P$  với 1.

### Bài 26.

---

---

1) Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A$  với  $x=36$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} + \frac{4}{\sqrt{x-4}} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x+2}}$  (với  $x \geq 0, x \neq 16$ ).

3) Với các biểu thức  $A$  và  $B$ , hãy tìm các giá trị nguyên của  $x$  để giá trị của biểu thức  $B(A-1)$  là  $\square$  nhận giá trị nguyên.

### Bài 27.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+4}}{x-1}$  (Với  $x \geq 0; x \neq 1$ )

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x=4$

2) Rút gọn  $B$

3) Tìm  $x$  để  $A.B \leq \frac{1}{2}$

### Bài 28.

Với  $x > 0$ , cho hai biểu thức  $A = \frac{x+2\sqrt{x}}{x}$  và  $B = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}}$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=4$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$ .

3) Tìm số nguyên  $x$  nhỏ nhất để  $\frac{A}{B} < \frac{7}{4}$ .

### Bài 29.

Cho  $M = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$  và  $N = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$  Với  $x > 0; x \neq 1$ .

1) Tính giá trị của  $N$  khi  $x=25$

2) Rút gọn  $S = M.N$

3) Tìm  $x$  để  $S < -1$

### Bài 30.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{x-9}$  và  $B = \frac{3\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-2}} + \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$  với  $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=16$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

3) Xét biểu thức  $P = A.B$ . Tìm  $x$  để  $P < 1$ .

### Bài 31.

---

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+9}$  và  $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}-10}{4-x}$ , với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

3) Cho  $P = B:A$ . Tìm các giá trị  $x$  là số thực để  $P$  nhận là một số chính phương.

### Bài 32.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 25$

2) Rút gọn biểu thức  $B$

3) Cho  $P = A.B$ . Hãy so sánh  $P$  và  $\sqrt{P}$ .

### Bài 33.

Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}+8}{3\sqrt{x}}$  và  $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$

với  $x \geq 0$  và  $x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức  $P$  khi  $x = 4$

2) Chứng minh:  $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \geq 2$  với  $A = P.Q$

### Bài 34.

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{a-1} \right)$

1) Rút gọn biểu thức  $A$

2) Tính giá trị của biểu thức  $A$ , biết  $a = 4 + 2\sqrt{3}$

3) Tìm  $a$  sao cho  $A < 0$

### Bài 35.

Cho hai biểu thức  $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$  với  $x > 0, x \neq 1$

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 4$ .

2) Rút gọn biểu thức  $P = B.A$

3) Tìm các giá trị của  $x$  để  $P$  nhận giá trị nguyên.

### Bài 36.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}-3}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}}{9-x} - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$  (với  $x \geq 0; x \neq 9$ ),

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 49$ .
- 2) Rút gọn  $B$ .
- 3) Cho  $M = A \cdot B$ . Tìm  $x$  để  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất.

### Bài 37.

Cho biểu thức  $A = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9}$  (với  $x > 0; x \neq 9$ )

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 4$

2) Chứng minh  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{A}{B}$

### Bài 38.

Cho biểu thức  $A = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9}$  (với  $x > 0; x \neq 9$ )

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 4$

2) Chứng minh  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{A}{B}$

### Bài 39.

$A = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$  với  $x > 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của  $B$  khi  $x = 25$

2) Chứng minh  $Q = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

- 3) Tìm các số nguyên  $x$  để  $\sqrt{Q} < \frac{\sqrt{4}}{3}$

### Bài 40.

Cho hai biểu thức:  $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của  $B$  tại  $x = 9$

2) Rút gọn  $A$

- 3) Đặt  $P = A \cdot B$ . Tìm số nguyên tố  $x$  để  $P \leq -1$

### Bài 41.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x-5}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{2x+2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 0, x \neq 1$ .



- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 36$
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 3) Tìm tất cả giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P = AB$  có giá trị nguyên.

#### Bài 42.

Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} \quad \text{và} \quad B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} - \frac{x - 3\sqrt{x} + 5}{x - 5\sqrt{x} + 6} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

- 1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 25$ .
- 2) Rút gọn  $B$ .
- 3) Cho  $P = A : B$ . Tìm  $x$  để  $2P = 2\sqrt{x} - 9$ .

#### Bài 43.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x - 7}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} + \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{x - 4}$  với  $x > 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P = A.B$  có giá trị nguyên

#### Bài 44.

Cho hai biểu thức  $N = \frac{24}{\sqrt{x} + 6}$  và  $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 6} + \frac{1}{\sqrt{x} - 6} + \frac{17\sqrt{x} + 30}{x - 36}$  với  $x \geq 0, x \neq 36$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $N$  khi  $x = 9$
- 2) Rút gọn biểu thức  $M$ .
- 3) Tìm số nguyên  $x$  để biểu thức  $L = N.M$  có giá trị nguyên lớn nhất.

#### Bài 45.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} - \frac{12}{x - 4}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 25$ .

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

- 2) Chứng minh
- 3) Với  $P = A.B$ . Tìm giá trị của  $x$  để  $|P| > P$ .

#### Bài 46.

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x - 2}{\sqrt{x} + 2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{4}{x - 1}$  (với  $x \geq 0; x \neq 1$ ).

- 1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 16$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

- 3) Đặt  $P = A.B$ . Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $P = \frac{7}{4}$ .

---

**Bài 47.**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{4\sqrt{x}}{4-x}$  với  $x > 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  biết  $x=16$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 3) Cho  $P = A \cdot B$ . Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $P \leq 6$ .

**Bài 48.**

Cho biểu thức  $B = \left( \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{x+4}{4-x} \right) : \frac{x}{x-2\sqrt{x}}$  (với  $x > 0, x \neq 4$ ).

- 1) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 2) Tính giá trị của  $B$  với  $x = \frac{1}{4}$ .
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để  $B < -\sqrt{x}$ .

**Bài 49.**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=9$

2) Chứng minh  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

- 3) Tìm tất cả giá trị của  $x$  để  $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$ .

**Bài 50.**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{x-4}$  với  $x > 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=16$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

- 3) So sánh biểu thức  $\frac{A}{B}$  với 3.
-

---

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1.

1) Với  $x = 25$  (thỏa mãn điều kiện) suy ra  $A = \frac{\sqrt{25} + 1}{\sqrt{25} - 2} = \frac{6}{3} = 2$ .

Vậy  $x = 25$  thì  $A = 2$

2) Thu gọn biểu thức

$$B = \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{x - 4 + \sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2}$$

Vậy  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$  thì  $B = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2}$

3) Ta có:  $B < A \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2} < \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} < 0$$

---

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp điều kiện suy ra  $0 \leq x < 4$ . Mà  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy  $x \in \{0; 1; 2; 3\}$  thì  $B < A$

### Bài 2.

1). Thay  $x = 64$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức  $A$  ta được  $A = \frac{2}{\sqrt{64}-2} = \frac{1}{3}$ .

$$B = \frac{3(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$$

2). Ta có

3). Với  $x \geq 0, x \neq 4$  thì

$$P = \frac{A}{B} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

Để

$$P \geq \frac{2}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{x+2}$$

Do  $2 > 0$  và  $x+2 > 0, \sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \leq x+2 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \geq 0$

TH1:  $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 0$  nên  $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$  (

TH2:  $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0$  vì  $\sqrt{x} \geq 0$  nên  $x > 1$ .

Kết hợp với điều kiện  $x \geq 0, x \neq 4$  ta được  $x = 0$  hoặc  $x \geq 1, x \neq 4$ .

### Bài 3.

1) Thay  $x = 9$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức  $A$  ta có  $A = \frac{\sqrt{9}-2}{\sqrt{9}-1} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$ .

Vậy  $A = \frac{1}{2}$  khi  $x = 9$ .

$$B = \frac{x - \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1 + 2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 1)$$

$$B = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \quad (\text{đpcm})$$

---

3) Ta có 
$$P = A.B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$$

Ta có:  $|P| + P = 0 \Leftrightarrow |P| = -P \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} \leq 0$

Mà  $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 > 0$ , với mọi  $x$  thỏa mãn ĐKXD

Suy ra  $\sqrt{x} - 2 \leq 0$

$$\sqrt{x} \leq 2$$

$$x \leq 4.$$

Vì  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \geq 0, x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 3; 4\}$ .

Vậy  $x \in \{0; 2; 3; 4\}$  thì  $|P| + P = 0$ .

#### Bài 4.

1) Khi  $x = 25$  (ĐKXD thỏa mãn)

Ta có 
$$A = \frac{\sqrt{25} - 3}{\sqrt{25} + 3} = \frac{5 - 3}{5 + 3} = \frac{1}{4}$$

Vậy  $A = \frac{1}{4}$

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .

Ta có 
$$\begin{aligned} B &= \frac{x - 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{9}{x - 3\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x - 3)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} + \frac{9}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} + \frac{3(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9 + 3\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$$

Vậy  $B = \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$

---

3). Xét biểu thức  $P = A \cdot B$ . Chứng minh  $P > 0$ .

---

$$P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} - 3} = \frac{x}{\sqrt{x} + 3}$$

Ta có

$$\text{Với } x > 0; x \neq 9, \text{ ta có } \sqrt{x} + 3 > 0 \text{ nên } P = \frac{x}{\sqrt{x} + 3} > 0$$

### Bài 5.

1). Thay  $x=1$  (TMĐK) vào biểu thức  $A$

$$A = \frac{3\sqrt{x} - 9}{x - 4} = \frac{3\sqrt{1} - 9}{1 - 4} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$2). B = \frac{x+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{x+1+(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x+1+x-9-x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

$$3). P = A \cdot B = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{3(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x} + 2 \geq 2 > 0. \text{ Suy ra } P = \frac{3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x=0$  (tmđk)

Vậy giá trị lớn nhất của  $P = \frac{3}{2}$  khi  $x=0$ .

### Bài 6.

$$1) \text{ Thay } x=16 \text{ (tmđk) vào biểu thức } A = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} \text{ ta được } A = \frac{3\sqrt{16}-2}{1-\sqrt{16}} = \frac{3 \cdot 4 - 2}{1-4} = \frac{12-2}{-3} = -\frac{10}{3}$$

$$\text{Vậy khi } x=16 \text{ thì } A = -\frac{10}{3}$$

1) Với  $x \geq 0, x \neq 1$ . Ta có:

$$P = A + B = \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

$$P = \frac{(-3\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$P = \frac{-3x - 7\sqrt{x} + 6 + 15\sqrt{x} - 11 - 2x - \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{-5x + 7\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{-(\sqrt{x} - 1)(5\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$P = \frac{-5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} \quad \text{Vậy với } x \geq 0; x \neq 1 \text{ thì } P = \frac{-5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$$

2) Với  $x \geq 0; x \neq 1$  ta có:  $m = P(\sqrt{x} + 3) = \frac{-5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} \cdot (\sqrt{x} + 3) = -5\sqrt{x} + 2$

Với  $x \geq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x} + 2 \leq 2 \Rightarrow m \leq 2$  (1)

Mặt khác  $x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow -5\sqrt{x} \neq -5 \Rightarrow -5\sqrt{x} + 2 \neq -3 \Rightarrow m \neq -3$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow m \leq 2; m \neq -3$

Vậy với  $m \leq 2; m \neq -3$  thì có x thỏa mãn  $P(\sqrt{x} + 3) = m$

### Bài 7.

1) Thay  $x = 0,49$  (thỏa mãn) vào  $M$ , ta có:  $M = \frac{\sqrt{0,49} - 1}{\sqrt{0,49}} = \frac{-3}{7}$

Vậy  $M = \frac{-3}{7}$  khi  $x = 0,49$

2)  $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2 + 8\sqrt{x}}{x - 1} - \frac{2}{1 - \sqrt{x}}$

$$P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2 + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{2 + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$P = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2 + 2 + 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$P = \frac{x + 7\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

3) Xét  $Q = M.P + \frac{x - 5}{\sqrt{x}}$  suy ra  $Q = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x - 5}{\sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

$$\text{Xét hiệu } Q - 3 = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}$$

Với  $x > 0; x \neq 1$  thì  $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$  và  $\sqrt{x} > 0$  suy ra  $\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0$  hay  $Q \geq 3$

### Bài 8.

1) Điều kiện  $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

Khi  $x = 100$  (thỏa mãn điều kiện) thì  $A = \frac{10}{10 - 2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

2)  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{x + 9\sqrt{x}}{x - 9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - x - 9\sqrt{x}}{x - 9} = \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$

3) Ta có  $M = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2 + 5}{\sqrt{x} - 2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x} - 2}$

TH1:  $x \in \mathbb{Z}$  nhưng  $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}$  là số vô tỷ  $\Rightarrow M \notin \mathbb{Z}$

TH2:  $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

Để  $M$  nguyên thì  $\sqrt{x} - 2 \in \{1; 5\}$  và  $\sqrt{x} - 2 > -2$

Suy ra  $\sqrt{x} - 2 \in \{1; 5\} \cup \sqrt{x} \in \{1; 3; 7\} \cup x \in \{1; 9; 49\}$  (thỏa mãn đkxđ)

Vậy  $x \in \{1; 9; 49\}$  thì  $M \in \mathbb{Z}$ .

### Bài 9.

1) Tính giá trị của biểu thức  $B$  với  $x = 25$ .

Với  $x = 25$  (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức  $B$  ta có:

$$B = \frac{\sqrt{25} + 3}{\sqrt{25} + 1} = \frac{5 + 3}{5 + 1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Vậy  $B = \frac{4}{3}$  khi  $x = 25$ .

2) Chứng minh  $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ .

Ta có: 
$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) + (\sqrt{x} - 1) - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$



$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

3) Tìm  $x$  để biểu thức  $S = A.B$  đạt giá trị lớn nhất.

Với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

Ta có:  $S = A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

Ta có:  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi  $x = 0$  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy GTLN của  $S$  là  $\frac{3}{2}$  khi  $x = 0$ .

### Bài 10.

1) Thay  $x = 4$  (TMĐK) vào biểu thức  $A$  ta được:

$$A = \frac{x-9}{\sqrt{x}} = \frac{4-9}{\sqrt{4}} = \frac{-5}{2}$$

Vậy, khi  $x = 4$  thì  $A = \frac{-5}{2}$

2) ĐKXD:  $x > 0, x \neq 9$ .

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+4}{9-x}$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-9}$$

$$B = \frac{2(\sqrt{x}+3)}{x-9} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-9}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}+6-\sqrt{x}-4}{x-9}$$

vậy  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-9}$  với  $x > 0, x \neq 9$ .

3) ĐKXD:  $x > 0, x \neq 9$

$$P = AB = \frac{x-9}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x-9} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

Xét hiệu  $P - 1 = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Ta có:  $P^2 - P = P(P - 1)$

Vì  $x > 0$  nên  $\sqrt{x} > 0$  và  $\sqrt{x}+2 > 0$

Khi đó  $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} > 0$  và  $\frac{2}{\sqrt{x}} > 0$  hay  $P > 0$  và  $P-1 > 0$ .  
 Suy ra  $P(P-1) > 0$  hay  $P^2 - P > 0$   
 Vậy  $P^2 > P$  với  $x > 0, x \neq 9$

### Bài 11.

1) Rút gọn biểu thức  $A$ .

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \text{ Với } x \geq 0; x \neq 9$$

Vậy với  $x \geq 0; x \neq 9$  thì  $A = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$

2)  $A = \frac{1}{3}$  khi  $\frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3}$

Suy ra  $\sqrt{x}+3=9$

$$x=36 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với  $x=36$  thì  $A = \frac{1}{3}$

3) Với  $x \geq 0; x \neq 9$  có  $A = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1$

Dấu “=” xảy ra khi  $x=0$  (t/m)

$Max A = 1$  khi  $x=0$

### Bài 12.

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=16$ .

Thay  $x=16$  vào biểu thức  $A$ , ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16}-2}{\sqrt{16}} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ .

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$$

Ta có:

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 2x}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$B = \frac{x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$$

3) Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $P < 0$  với  $P = A \cdot B$ .

Ta có: 
$$P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$$

Để  $P < 0$  thì 
$$\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} < 0$$

Vì 
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$$
 Nên  $\sqrt{x} + 3 > 0$

Do đó:  $\sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$ .

Kết hợp với điều kiện  $x > 0$ , ta có:  $0 < x < 4$ .

Vì  $x$  nhận giá trị nguyên nên  $x \in \{1; 2; 3\}$ .

### Bài 13.

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ .

Thay  $x = 9$  (tmđk) vào biểu thức  $A$  ta được

$$A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9} + 2} = \frac{3}{5}$$

2) Chứng minh  $B = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$  ta có:

$$B = \frac{5}{\sqrt{x} - 2} - \frac{16 + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{5(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{16 + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$$

3) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  để  $5A + B \leq 3$ .

Với  $x \geq 0, x \neq 4$  ta có:  $5A+B = \frac{5\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$

Để  $5A+B \leq 3$  khi  $\frac{5\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} \leq 3$

$$\frac{5\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} - 3 \leq 0$$

$$\frac{5\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} - \frac{3(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}} \leq 0$$

$$\frac{5\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \leq 0$$

$$\frac{2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}} \leq 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  thỏa mãn yêu cầu là  $x=2$ .

#### Bài 14.

1) Thay  $x = 25$  (tmđk) vào  $A$  ta được  $A = \frac{\sqrt{25-1}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

Vậy với  $x=25$  thì  $A = \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} 2) B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{4}{\sqrt{x-3}} - \frac{x-4\sqrt{x}+15}{x-9} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} + \frac{4(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} - \frac{x-4\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{2x-6\sqrt{x}+(4\sqrt{x}+12)-(x-4\sqrt{x}+15)}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$$

3)  $P = A : B = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$  (đkbs:  $x \neq 1$ )

$$|P| + P = 0 \Rightarrow |P| = -P \Rightarrow P \leq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$$

KHĐK  $\Rightarrow 0 < x < 9; x \neq 1$

Mà  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

### Bài 15.

1) Thay  $x = 25$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức ta được:  $A = \frac{2\sqrt{25}}{\sqrt{25} - 1}$

Tính được  $A = \frac{5}{2}$  và kết luận

$$2) B = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 2\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{x - 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \text{ (đpcm)}$$

$$3) P = A : B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \text{ Có}$$

$$P = P^4$$

$$P - P^4 = 0$$

$$P(1 - P^3) = 0$$

$$P = 0; P = 1$$

$$P = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 0$$

$$x = 0 \text{ (TMĐK)}$$

$$P = 1$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1$$

$$x = 1 \text{ (KTM)}$$

Vậy  $x = 0$  là giá trị cần tìm.

### Bài 16.

1) Thay  $x = 16$  (thỏa mãn đk) vào biểu thức  $A$  ta được:  $A = \frac{16 - 9}{16 - 3\sqrt{16}} = \frac{7}{4}$ .

$$2) \text{ Với } x > 0; x \neq 9 \text{ ta có: } B = \frac{x+3}{x-9} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{x+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+3+\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x > 0; x \neq 9 \text{ . (đpcm)}$$

$$P = A \cdot B = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)^2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

3) Ta có:

$$Do\ \acute{d}\acute{o}: P < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 9$$

Do  $x$  nguyên nên  $x \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$

Vậy  $x \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$  thì  $P < 1$

### Bài 17.

1) Thay  $x=9$ (TM) vào biểu thức A, ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-1} = \frac{3+4}{3-1} = \frac{7}{2}$$

Vậy  $A = \frac{7}{2}$  tại  $x=9$ .

2) Ta có  $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .  $\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

3) Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \sqrt{x}+4$

Đề

$$\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+4 = \frac{x}{4} + 5$$

$$4\sqrt{x}+16 = x+20$$

$$x-4\sqrt{x}+4=0$$

$$\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4(\text{TM})$$

---

Vậy để  $\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$  thì  $x = 4$ .

### Bài 18.

1) Khi  $x = 9$  thì  $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{9} + 4}{\sqrt{9}} = \frac{3 + 4}{3} = \frac{7}{3}$ .

2) 
$$B = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{2\sqrt{x} - 4 + x + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

3)  $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2}$  mà  $|P| = P$  khi và chỉ khi  $P \geq 0$  hay  $\frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2} \geq 0$  do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 2 &> 0 \\ \sqrt{x} &> 2 \\ x &> 4 \quad (TM) \end{aligned}$$

Vậy  $x > 4$ .

### Bài 19.

1). Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 4$

Biểu thức  $A$  được cho là:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$

Thay  $x = 4$  vào biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị của  $A$  khi  $x = 4$  là  $\frac{1}{2}$ .

2). Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x}}$

Biểu thức  $B$  được cho là:

$$B = \frac{2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - \sqrt{x}}$$

$$B = \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

---

$$B = \frac{\sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x}}$$

Điều phải chứng minh

3). Ta có:  $P = A + \frac{1}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$  với

$$P = \frac{x}{\sqrt{x+2}} \geq 1 \Rightarrow x \geq \sqrt{x+2} \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) \geq 0$$

$$(\sqrt{x}-2) \geq 0$$

$$\sqrt{x} \geq 2$$

$$\Rightarrow x \geq 4$$

Kết hợp với điều kiện ta đc  $x \geq 4$  thì  $P \geq 1$

### Bài 20.

1)  $M = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$  và  $N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$  với  $x > 0, x \neq 4$ .

Thay  $x=9$  vào biểu thức M ta được:  $M = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = 12$

2) 
$$N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

3)  $M: N = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3}$

Dấu bằng xảy ra khi  $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}}$  hay  $x=3$  (thỏa mãn đkxđ)

Vậy  $x=3$

### Bài 21.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x=16$ .

Thay  $x=16$  (tmđk) vào A ta có:  $A = \frac{16}{\sqrt{16}-3} = \frac{16}{4-3} = 16$

Vậy với  $x=16$  thì  $A=16$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ .

ĐKXĐ:  $x > 0, x \neq 9$



$$B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{2x-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy với  $x > 0, x \neq 9$  thì  $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ .

3) Tìm tất cả giá trị của  $x$  để  $A - B < 0$ .

$$A - B < 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3} < 0$$

**Ta có:**  $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

**Do đó:**  $\begin{cases} \sqrt{x}-3 < 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} < 3 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có:  $0 < x < 9$  và  $x \neq 1$

Vậy với  $0 < x < 9$  và  $x \neq 1$  thì  $A - B < 0$ .

## Bài 22.

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 16$ .

Thay  $x = 16$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức  $A$  ta được:  $A = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-3} = 3$

Vậy  $A = 3$  khi  $x = 16$ .

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ .

Với  $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6} \\
&= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{2x-6\sqrt{x}-x+4+6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{x-4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}
\end{aligned}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$  với  $x \geq 0$ ,  $x \neq 4$ ,  $x \neq 9$ .

3) Cho  $P = A : B$ . Tìm  $x$  để  $P < \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
P = A : B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}
\end{aligned}$$

Ta có:  $P < \frac{1}{2}$

Suy ra  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$

$$2\sqrt{x}-2 < \sqrt{x}+2 \quad (\text{vì } 2(\sqrt{x}+2) > 0)$$

$$\sqrt{x} < 4$$

$$0 \leq x < 16$$

Vậy  $0 \leq x < 16$ ;  $x \neq 4$ ;  $x \neq 9$  thì  $P < \frac{1}{2}$ .

### Bài 23.

1) Với  $x=9$  (TMĐK) thay vào biểu thức  $Q$  ta được:  $Q = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$

Vậy  $x=9$  thì biểu thức  $Q = \frac{1}{5}$ .

2) Với  $x \geq 0; x \neq 4$  ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3x - 6\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \end{aligned}$$

$$M = \frac{P}{Q} = \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$$

3) Với  $x \geq 0; x \neq 4$  ta có:

Để  $M = 18$  thì  $\frac{2x}{\sqrt{x}-2} = 18$

$$x - 9\sqrt{x} + 18 = 0$$

$$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-6) = 0$$

$$\sqrt{x} = 3 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 6$$

$$x = 9 \text{ hoặc } x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy để  $M = 18$  thì  $x \in \{9; 36\}$ .

### Bài 24.

1)  $A = \frac{\sqrt{9}}{9+1} = \frac{3}{10}$ .

Vậy với  $x = 9$  thì  $A = \frac{3}{10}$ .

2) Điều kiện xác định:  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} B &= \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-2-\sqrt{x}-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$  (đpcm).

$$\begin{aligned} 3) \quad P &= 2AB + \frac{4}{x+1} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 4}{x+1} + \frac{4}{x+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 4 + 4}{x+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \end{aligned}$$

Xét hiệu:

$$P - 1 = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} - 1 = \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{x+1} = \frac{-(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x+1} = \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{x+1}$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(\sqrt{x} - 1)^2 \leq 0 \quad (1)$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow x + 1 > 1 > 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \quad \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{x+1} \leq 0 \Rightarrow P - 1 \leq 0 \Rightarrow P \leq 1$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

## Bài 25.

1) Tính giá trị của biểu thức A tại  $x = 25$ .

Thay  $x = 25$  thỏa mãn điều kiện  $x > 0; x \neq 1$  vào biểu thức A, ta được:

$$A = \frac{\sqrt{25} + 1}{\sqrt{25} - 1} = \frac{5 + 1}{5 - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị của biểu thức A bằng  $\frac{3}{2}$  tại  $x = 25$ .

$$2) \quad B = \frac{x+1}{x - \sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

$$B = \frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$$

$$B = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

3) Cho  $P = A.B$ . So sánh giá trị của  $P$  với 1.

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

Xét hiệu:

$$P-1 = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Vì  $x > 0$  nên  $\sqrt{x} > 0$ , suy ra  $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ . Do vậy  $P-1 > 0 \Rightarrow P > 1$ .

Vậy  $P > 1$ .

### Bài 26.

1) Với  $x=36$ , ta có  $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ .

2) Với  $x \geq 0, x \neq 16$  ta có

$$B = \left( \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3)  $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left( \frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}$

$B(A-1)$  nhận giá trị nguyên khi

$$(x-16) \in U(2)$$

$$(x-16) \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$x \in \{14; 15; 17; 18\}$$

Kết hợp điều kiện, để  $B(A-1)$  nhận giá trị nguyên thì  $x \in \{14; 15; 17; 18\}$ .

### Bài 27.

1) Thay  $x=4$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức  $A$  ta có:

$$A = \frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}+3} = \frac{3}{5}$$

Vậy giá trị của biểu thức  $A$  tại  $x=4$  là:  $\frac{3}{5}$

---

2) Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+4}}{x-1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} - \frac{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} + \frac{2\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}) + 2\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{2x - 2\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$

3) Ta có:  $A.B \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} &\leq \frac{1}{2} \\
 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}} &\leq \frac{1}{2} \\
 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2} &\leq 0 \\
 \frac{2\sqrt{x-2} - 4 - \sqrt{x-3}}{2(\sqrt{x+3})} &\leq 0 \\
 \frac{\sqrt{x-7}}{2(\sqrt{x+3})} &\leq 0
 \end{aligned}$$


---

$$\sqrt{x} - 7 \leq 0 \quad (\text{V\u00ed } 2(\sqrt{x} + 3) > 0)$$

$$\sqrt{x} \leq 7$$

$$x \leq 49$$

K\u00e9t h\u00f3p \u0111i\u00eau ki\u00ean ta c\u00f3:  $0 \leq x \leq 49; x \neq 1$

$$\text{V\u00e0y } 0 \leq x \leq 49; x \neq 1 \text{ th\u00ec } A.B \leq \frac{1}{2}$$

### B\u00e0i 28.

1) Khi  $x = 4$  (th\u00f2a m\u00e3n \u0111i\u00eau ki\u00ean), ta thay v\u00e0o bi\u00eau th\u01b0c  $A$

$$\text{Ta c\u00f3 } A = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x} = \frac{4 + 2\sqrt{4}}{4} = 2$$

V\u00e0y  $A = 2$  khi  $x = 4$

2)

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{V\u00e0y v\u00f3i } x > 0 \text{ th\u00ec } B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}$$

$$3) \frac{A}{B} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{x} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x} = \frac{x + \sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{A}{B} < \frac{7}{4}$$

$$\text{Ta c\u00f3: } \frac{x + \sqrt{x}}{x} < \frac{7}{4}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{x} > \frac{4}{3}$$

$$\text{N\u00ean } x > \frac{16}{9}$$

V\u00e0y s\u00f3 nguy\u00ean  $x$  nh\u0103 nh\u00e1t th\u00f2a \u0111i\u00eau ki\u00ean b\u00e0i to\u00e1n l\u00e0  $x = 2$ .

### B\u00e0i 29.

$$\text{C\u00f3 } M = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \text{ v\u00e0 } N = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \text{ V\u00f3i } x > 0; x \neq 1.$$

1) Thay  $x = 25$  (th\u00f2a m\u00e3n \u0110KXD) v\u00e0o bi\u00eau th\u01b0c  $N = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ , ta c\u00f3:

$$N = \frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

Vậy với  $x=25$  thì giá trị của biểu thức  $N = \frac{6}{5}$

2) Có:  $M = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

$$M = \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1})^2} - \frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$$

$$M = \frac{x + \sqrt{x-2} - x + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$$

$$M = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$$

+) Có  $M = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$ ;  $N = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$  mà  $S = M.N$

Nên  $S = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ . Do đó,  $S = \frac{2}{x-1}$

3) Có  $S = \frac{2}{x-1}$  ( $x > 0; x \neq 1$ ) mà  $S < -1$

nên có:  $\frac{2}{x-1} < -1$ . Do đó:  $\frac{2+x-1}{x-1} < 0$  hay  $\frac{x+1}{x-1} < 0$  (1)

Vì  $x > 0$  nên  $x+1 > 0$  (2)

Từ (1) (2), ta có:  $x-1 < 0$  nên  $x < 1$

Kết hợp điều kiện xác định  $x > 0; x \neq 1$ . Ta có:  $0 < x < 1$

Vậy  $0 < x < 1$  thì  $S < -1$

### Bài 30.

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x=16$ .

Thay  $x=16$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức  $A$  ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16}}{16-9} = \frac{4}{7}$$

Vậy khi  $x=16$  thì  $A = \frac{4}{7}$ .

2) Rút gọn biểu thức  $B$ .



Điều kiện: với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 2} + \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} \\ &= 3 + \sqrt{x} \end{aligned}$$

Vậy  $B = 3 + \sqrt{x}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4, x \neq 9$ .

3) Xét biểu thức  $P = A \cdot B$ . Tìm  $x$  để  $P < 1$ .

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x - 9} \cdot (\sqrt{x} + 3) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot (\sqrt{x} + 3) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$$

Để  $P < 1$  thì  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} < 1$  hay  $\frac{3}{\sqrt{x} - 3} < 0$ . Suy ra  $\sqrt{x} - 3 < 0$  (vì  $3 > 0$ )

Do đó  $\sqrt{x} < 3$  hay  $x < 9$ . Kết hợp với điều kiện  $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ , ta được  $0 \leq x < 9$  và  $x \neq 4$

Vậy  $P < 1$  khi  $0 \leq x < 9$  và  $x \neq 4$ .

### Bài 31.

Điều kiện  $x \geq 0, x \neq 4$ .

1) Ta có: 
$$x = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{-2}{3}\right)^3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{-2}{3} = 1$$

Thay  $x = 1$  (thỏa mãn điều kiện) vào  $A$  ta được: 
$$A = \frac{\sqrt{1} - 2}{\sqrt{1} + 9} = \frac{1 - 2}{1 + 9} = \frac{-1}{10}$$

Vậy  $A = \frac{-1}{10}$  khi  $x = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$ .

2) Ta có: 
$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x} - 10}{4 - x} \\ &= \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{9\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x} - 6 + x + 2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + 10}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

3) Ta có:

$$P = B : A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 9} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} + 2} = 1 + \frac{7}{\sqrt{x} + 2}$$

Vì  $7 > 0, \sqrt{x} + 2 > 0$  nên  $\frac{7}{\sqrt{x} + 2} > 0$ .

Do  $\sqrt{x} \geq 0$  nên  $\sqrt{x} + 2 \geq 2$ , suy ra  $\frac{7}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{7}{2}$

Do đó  $0 < \frac{7}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{7}{2}$ , suy ra  $1 < \frac{7}{\sqrt{x} + 2} + 1 \leq \frac{7}{2} + 1$  hay  $1 < P < \frac{9}{2}$

mà  $P$  là số chính phương nên  $P = 4$ .

+ Với  $P = 4$ , ta có  $\frac{7}{\sqrt{x} + 2} = 3$

$$\sqrt{x} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy  $x = \frac{1}{9}$ .

### Bài 32.

1). Thay  $x = 16$  (TMĐK) vào biểu thức  $A$  ta được  $A = \frac{3}{4}$  và kết luận

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

2).

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$$

3). Với  $x \geq 0, x \neq 1$

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Vì  $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0$  nên  $\sqrt{x+2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}} > 0 \Rightarrow P > 1 \Rightarrow \sqrt{P} > 1 \Rightarrow P - \sqrt{P} = \sqrt{P}(\sqrt{P} - 1) > 0 \Rightarrow P > \sqrt{P}$$

### Bài 33.

1) Thay  $x = 4$  (TMĐK) vào biểu thức P, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{4+8}}{3\sqrt{4}} = \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Vậy  $x = 4$  thì  $P = \frac{5}{3}$

2) Với  $x \geq 0; x \neq 9$ . Ta có

$$Q = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{7\sqrt{x+3}}{9-x}$$

$$Q = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$Q = \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) - 7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$Q = \frac{3x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \text{ (đpcm)}$$

$$A = P.Q = \frac{\sqrt{x+8}}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}}$$

3) Ta có

$$\text{Để } A \geq 2 \text{ thì } \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}} \geq 2 \text{ suy ra } \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}} - 2 \geq 0 \text{ suy ra } \frac{-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} \geq 0$$

Suy ra  $-\sqrt{x+2} \geq 0$  (Vì  $\sqrt{x+3} > 0 \forall x > 0, x \neq 9$ )

$$-\sqrt{x} \geq -2 \text{ suy ra } \sqrt{x} \leq 2 \text{ thì } x \leq 4$$

Kết hợp với điều kiện  $x > 0, x \neq 9$  và  $x \in \mathbb{Z}$

Vậy  $x \in \{1; 2; 3; 4\}$  thì  $A \geq 2$

### Bài 34.

1) Điều kiện  $0 < a \neq 1$

$$\text{Khi đó ta có } A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right)$$

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$

A =

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} : \frac{1}{(\sqrt{a}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)}{1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

Vậy  $A = \frac{a-1}{\sqrt{a}}$

2)  $a = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{2}+1)^2$

$$A = \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1} = 2$$

Vậy với  $a = 4 + 2\sqrt{3}$  thì giá trị của biểu thức A là 2

3) Với  $0 < a \neq 1$  thì  $A < 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1$

Kết hợp với điều kiện ta có  $A < 0$  khi  $0 < a < 1$

### Bài 35.

1) Thay  $x=4$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A, ta được  $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2) Ta có  $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+3) + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$

3) Xét  $P = B \cdot A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

Xét  $P=0$  hay  $\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4$  (thỏa mãn)

Xét  $P \neq 0$ . Có  $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+3}$ .

Để P nhận giá trị nguyên thì  $\frac{5}{\sqrt{x}+3}$  nhận giá trị nguyên

Vì  $x > 0$  nên  $\frac{5}{\sqrt{x}+3} > 0$  (1)

---

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x+3} \geq 3 \text{ nên } \frac{5}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{5}{3} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$0 < \frac{5}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+3}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2$$

Nên  $x = 4$  (thỏa mãn)

### Bài 36.

ĐK:  $x \geq 0; x \neq 9$

1) Với  $x = 49$  (TMĐK) nên  $\sqrt{x} = 7$  Thay vào  $A$  ta được:

$$A = \frac{49+7}{7-3}$$

$$A = 14$$

2)

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} + \frac{6\sqrt{x}}{9-x} - \frac{3}{\sqrt{x+3}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{6\sqrt{x}}{x-9} - \frac{3}{\sqrt{x+3}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} - \frac{3}{\sqrt{x+3}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3}) - 6\sqrt{x} - 3(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$B = \frac{x+3\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$B = \frac{x - 6\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x-3})^2}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$$

3) Ta có  $M = A.B = \frac{x+7}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$

$$M = \frac{x+7}{\sqrt{x+3}}$$

$$M = \frac{x-9+16}{\sqrt{x+3}}$$

---

$$M = \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x+3}}$$

$$M = \sqrt{x} + 3 + \frac{16}{\sqrt{x+3}} - 6$$

Với  $a, b \geq 0$  ta có  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$  nên  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ . Dấu bằng xảy ra khi  $a = b$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x+3} > 0, \frac{16}{\sqrt{x+3}} > 0$

Do đó  $\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x+3}) \cdot \frac{16}{\sqrt{x+3}}} = 8$

$$\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}} - 6 \geq 8 - 6 = 2$$

Nên  $M \geq 2$  Suy ra Min  $M = 2$  khi

$$\sqrt{x+3} = \frac{16}{\sqrt{x+3}}$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = 16$$

$$\sqrt{x+3} = 4$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \text{ (TMĐK)}$$

### Bài 37.

1) Thay  $x = 4$  (TMĐK) vào biểu thức  $A$  có:

$$A = \frac{3 \cdot 4 + 12}{\sqrt{4} + 3} = \frac{24}{5}$$

Vậy  $A = \frac{24}{5}$  khi  $x = 4$

2) Chứng minh  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

$$B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) - 7\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + 2x - 6\sqrt{x} - 7\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{3x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$  với  $x > 0; x \neq 9$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{A}{B}$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{3x+12}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{3\sqrt{x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Xét bất đẳng thức Cauchy: Với hai số thực không âm  $a, b$  ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b$$

Thật vậy:  $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$

Vì  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0; \frac{4}{\sqrt{x}} > 0$  nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:  $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

$$x=4 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy  $P_{\min} = 4$  khi và chỉ khi  $x=4$

### Bài 38.

3) Thay  $x=4$  (TMĐK) vào biểu thức  $A$  có:

$$A = \frac{3 \cdot 4 + 12}{\sqrt{4} + 3} = \frac{24}{5}$$

Vậy  $A = \frac{24}{5}$  khi  $x=4$

2) Chứng minh  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{x-9} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)-7\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}+3+2x-6\sqrt{x}-7\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{3x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}
\end{aligned}$$

Vậy  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$  với  $x > 0; x \neq 9$

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{A}{B}$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{3x+12}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{3\sqrt{x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Xét bất đẳng thức Cauchy: Với hai số thực không âm  $a, b$  ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b$$

Thật vậy:  $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$

Vì  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0; \frac{4}{\sqrt{x}} > 0$  nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:  $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

$$x=4 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy  $P_{\min} = 4$  khi và chỉ khi  $x=4$

### Bài 39.

1) Thay  $x=25$  (tmdk) vào  $B$

$$B = \frac{5-2}{5+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vậy khi  $x=25$  thì  $B = \frac{1}{2}$



$$2) A = \frac{3\sqrt{x} - 6 + \sqrt{x} + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 6 + \sqrt{x} + x - 5\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$3) Q = A.B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}. \text{ ĐK để } \sqrt{Q} \text{ xác định là } Q \geq 0 \text{ suy ra } x \geq 1$$

$$\sqrt{Q} < \frac{2}{3}$$

$$Q < \frac{4}{9}$$

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} < \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{x} < \frac{13}{5} \text{ suy ra } 0 < x < \frac{169}{25}$$

Kết hợp điều kiện  $x$  nguyên tìm được  $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

#### Bài 40.

1) Thay  $x = 9$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta có:

$$B = \frac{\sqrt{9} + 2}{\sqrt{9} - 2} = \frac{3 + 2}{1} = 5$$

Vậy giá trị của B tại  $x = 9$  là 5.

$$2) A = \frac{3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 10}{x - 4}$$

$$A = \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} + 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$A = \frac{3(\sqrt{x} + 2) - \sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$3) P = A.B = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2}{\sqrt{x} - 2}$$

$$P \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \leq 0$$

---

\* Nếu  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 0$  thì  $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (không thỏa mãn đk  $x$  là số nguyên tố)

\* Nếu  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 0$  thì ta có hai trường hợp sau:

TH1:  $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$  (thỏa mãn đk  $x \geq 0; x \neq 4$ ) mà  $x$  là số nguyên tố nên  $x = 2; x = 3$

TH2:  $\begin{cases} \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Vậy  $x = 2; x = 3$  thì thỏa mãn đề bài

### Bài 41.

1) Thay  $x = 36$  (tmdk) vào  $A$  ta được  $A = \frac{36-5}{\sqrt{36}} = \frac{31}{6}$

Vậy  $A = \frac{31}{6}$  khi  $x = 36$

2)  $B = \frac{2x+2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

$$B = \frac{2x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, x > 0, x \neq 1$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P = AB$  có giá trị nguyên

$$P = \frac{x-5}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{x-5}{\sqrt{x}-1} = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (tm)}$$

$$P \neq 0, x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{I} \Rightarrow P \notin \mathbb{Z}$$

$$P = \sqrt{x} + 1 - \frac{4}{\sqrt{x}-1} \neq 0, x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-1 \in \mathbb{U} \text{ (4)}$$

$$x \in [4; 9; 25] \text{ (tmdk)}$$

Vậy  $x \in \{4; 5; 9; 25\}$

---

---

**Bài 42.**

1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x=25$

$$\text{Biểu thức: } A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$$

Điều kiện:  $x \geq 0$

Với  $x=25$  thỏa mãn điều kiện

$$\text{Thay } x=25 \text{ vào biểu thức } A \text{ ta có: } A = \frac{\sqrt{25+3}}{\sqrt{25+1}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy với } x=25 \text{ thì } A = \frac{4}{3}$$

2) Rút gọn  $B$

Điều kiện xác định:  $x \geq 0$ ;  $x \neq 4$ ;  $x \neq 9$

$$\text{Ta có: } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} - \frac{x-3\sqrt{x}+5}{x-5\sqrt{x}+6}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} - \frac{x-3\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}) - (x-3\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{x-3\sqrt{x}+x-4-x+3\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{x-9}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$$

3) Cho  $P=A:B$ . Tìm  $x$  để  $2P=2\sqrt{x}-9$

Điều kiện xác định:  $x \geq 0$ ;  $x \neq 4$ ;  $x \neq 9$

$$\text{Ta có: } P=A:B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Để } 2P=2\sqrt{x}-9$$

---

$$\frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x}-9$$

$$2\sqrt{x}-4 = (2\sqrt{x}-9)(\sqrt{x}+1)$$

$$2\sqrt{x}-4 = 2x+2\sqrt{x}-9\sqrt{x}-9$$

$$2x-9\sqrt{x}+5=0$$

$$(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)=0$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}+1=0 \text{ (PTVN)} \\ \sqrt{x}-5=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x}-5=0$$

$$x=25 \text{ (TM)}$$

Vậy để  $2P=2\sqrt{x}-9$  thì  $x=25$ .

### Bài 43.

1) Thay  $x=9$  (tmđk) vào biểu thức  $A$ , ta được:

$$A = \frac{9-7}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Vậy khi  $x=9$  thì  $A = \frac{2}{3}$

$$2) \quad B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2-x-2\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > 0, x \neq 4$$

$$3) \quad P = \frac{x-7}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2}$$

$$+ \text{ Xét } P = \frac{x-7}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

+ Xét  $P \neq 0$

TH1:  $x \in \mathbb{Z}; x \neq 7; \sqrt{x}$  là số vô tỉ  $P \notin \mathbb{Z}$  (loại)

TH2:  $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x-4-3}{\sqrt{x+2}} = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{x}-2 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$$

Đề  $P \in \mathbb{Z}$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x}-2 - \frac{3}{\sqrt{x+2}} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Suy ra } \frac{3}{\sqrt{x+2}} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x+2} \in U(3)$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x+2} \in \{1; 3\}$$

$$\text{Do } \sqrt{x+2} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với  $x \in \{1; 7\}$ ; thì P có giá trị nguyên

#### Bài 44.

1) Thay  $x = 9$  (tmđk) vào N

$$\text{Tính } N = \frac{24}{\sqrt{9+6}} = \frac{8}{3}$$

$$2) M = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} + \frac{\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} + \frac{17\sqrt{x}+30}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)}$$

$$= \frac{x - 6\sqrt{x} + \sqrt{x} + 6 + 17\sqrt{x} + 30}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)}$$

$$= \frac{x + 12\sqrt{x} + 36}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} = \frac{(\sqrt{x}+6)^2}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-6}$$

$$3) L = \frac{24}{\sqrt{x}-6}$$

Lý luận P đạt giá trị nguyên lớn nhất khi  $x = 49$  khi đó  $P = 24$ .

#### Bài 45.

1)  $x = 25$  (thỏa mãn điều kiện xác định)

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{3}{7} \text{ khi } x = 25.$$

2) Với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} - \frac{12}{x-4} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2})^2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} - \frac{3(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} - \frac{12}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{x+4\sqrt{x}+4-3\sqrt{x}+6-12}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

3) Ta có:  $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$

$$|P| > P$$

TH 1:  $P > P$  (Vô lí)

TH 2:  $-P > P \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} > \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{x} > \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow 2 > 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow 1 > x$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có:  $1 > x \geq 0$

#### Bài 46.

1) Thay  $x=16$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức  $A$ , ta được:

$$A = \frac{16-2}{\sqrt{16}+2} = \frac{7}{3}$$

Vậy khi  $x=16$  thì  $A = \frac{7}{3}$ .

2) Với  $x \geq 0; x \neq 1$  ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{4}{x-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} + \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} - \frac{4}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

---

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

3) Với  $x \geq 0; x \neq 1$  ta có:

$$P = A.B = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}$$

Đề  $P = \frac{7}{4}$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x+1}} = \frac{7}{4}$$

$$4x - 7\sqrt{x} - 15 = 0$$

$$(\sqrt{x} - 3)(4\sqrt{x} + 5) = 0$$

Nên  $\sqrt{x} - 3 = 0$  hoặc  $4\sqrt{x} + 5 = 0$

Vậy  $x = 9$  thì  $P = \frac{7}{4}$ .

#### Bài 47.

1) Có  $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$  ( $x > 0, x \neq 4$ )

Thay  $x = 16$  (TMĐK) vào biểu thức  $A$  ta có:

$$A = \frac{16-3}{\sqrt{16}} = \frac{13}{4}$$

Vậy  $A = \frac{13}{4}$  khi  $x = 16$

2) Rút gọn  $B$ :

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{4\sqrt{x}}{4-x} \quad (x > 0, x \neq 4)$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})} + \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{x-2\sqrt{x}+4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$


---

---

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$  với  $x > 0, x \neq 4$

3) Có  $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$  ( $x > 0, x \neq 4$ )

$$P = A \cdot B$$

$$P = \frac{x-3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$P = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$$

Đề  $P \leq 6$  thì  $\frac{x-3}{\sqrt{x-2}} \leq 6$

$$\frac{x-3}{\sqrt{x-2}} - 6 \leq 0$$

$$\frac{x-3-6(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{x-3-6\sqrt{x}+12}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{x-6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

TH1:  $\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x-2}} = 0$

$$(\sqrt{x}-3)^2 = 0$$

$$\sqrt{x}-3 = 0$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9 \text{ (TMĐK)}$$

TH2:  $\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x-2}} < 0$

Mà  $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0, \forall x$  TMĐKXĐ

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-3)^2 > 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}-3 \neq 0 \\ \sqrt{x} < 2 \end{cases}$$

---



$$\begin{cases} \sqrt{x} \neq 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 9 \\ x < 4 \end{cases}$$

$x < 4$  mà  $x > 0, x \neq 4$  và  $x$  là số nguyên

$$x \in \{1; 2; 3\}$$

Vậy để  $P \leq 6$  thì  $x \in \{1; 2; 3; 9\}$

### Bài 48.

$$1) B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - x - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{x}$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} - x - 4}{(\sqrt{x} + 2)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x}}, x > 0, x \neq 4$$

$$B = \frac{-2}{\sqrt{x}} = \frac{-2}{\sqrt{1}} = \frac{-2}{1} = -2$$

2) Với  $x = \frac{1}{4}$ , thay vào  $B$ , ta có

3) Với  $x > 0, x \neq 4$ , ta có

$$B < -\sqrt{x}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}} < -\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} > 0$$

$$\frac{2 - x}{\sqrt{x}} > 0$$

$$2 - x > 0$$

4)  $x < 2$

Kết hợp điều kiện suy ra  $0 < x < 2$ , mà  $x$  nguyên nên  $x = 1$

Vậy  $x = 1$ .

### Bài 49.

1) Thay  $x = 9$  (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức  $A$  ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9} + 4}{\sqrt{9} - 1} = \frac{7}{2}$$

Vậy khi  $x = 9$  thì  $A = \frac{7}{2}$ .

$$2) B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

$$3) \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+4 \quad (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 3)$$

$$\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$$

$$\sqrt{x}+4 \geq \frac{x}{4} + 5$$

$$\frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1 \leq 0$$

$$x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0$$

$$(\sqrt{x}-2)^2 \leq 0$$

Mà  $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0$  với mọi  $x$  thỏa mãn điều kiện xác định.

$$(\sqrt{x}-2)^2 \leq 0$$

$$\sqrt{x}-2=0$$

$$\sqrt{x}=2$$

$$x=4$$

So với điều kiện, thỏa mãn.

Vậy  $x=4$  thì  $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$ .

### Bài 50.

1) Với  $x=16$  (thỏa mãn  $x > 0, x \neq 4$ ) ta có  $A = \frac{16+3}{\sqrt{16}-2} = \frac{19}{2}$ . Vậy  $A = \frac{19}{2}$  khi  $x=16$ .

2) Với  $x > 0, x \neq 4$  ta có  $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2) - 3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{x+5\sqrt{x}+6 - 3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}
\end{aligned}$$

Vậy với  $x > 0, x \neq 4$  thì  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

Xét  $\frac{A}{B} - 3 = \frac{x+3}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{x - 3\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{x}}$

Với  $x > 0, x \neq 4$  thì  $\sqrt{x} > 0, \left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  nên  $\frac{A}{B} - 3 > 0$ . Suy ra  $\frac{A}{B} > 3$ .

Vậy với  $x > 0, x \neq 4$  thì  $\frac{A}{B} > 3$ .