Phần một: MỞ ĐẦU

LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong thời kỳ đổi mới hiện nay vấn đề đổi mới phương pháp dạy học Toán ở bậc THCS là nhiệm vụ hàng đầu đối với nghành giáo dục. Việc vận dụng đổi mới phương pháp dạy học Toán trong các năm qua của giáo viên ở mỗi trường có những thành công và hạn chế khác nhau. Nhất là việc dạy học phân môn hình học có nhiều vấn đề còn nhiều vướng mắc và trừu tượng. Chính vì thế, hơn 1 năm học qua tôi đã tìm hiểu thực trạng, nguyên nhân khiến cho nhiều học sinh học yếu và không đam mê phân môn hình học và giải pháp khắc phục. Từng bước tôi đã vận dụng các giải pháp mà mình tìm được và thấy hiệu quả học tập của học sinh có nâng dần hơn.

Môn toán là môn học rất phong phú và đa dạng, đó là niềm say mê của những người yêu thích toán học. Đối với học sinh để có một vốn kiến thức vững chắc, đòi hỏi phải phấn đấu rèn luyện, học hỏi nhiều và bền bỉ. Đối với giáo viên làm thế nào để trang bị cho các em đủ kiến thức? Đó là câu hỏi mà giáo viên nào cũng đặt ra cho bản thân.

Đối với học sinh THCS, có những bài toán mà nếu không biết sử dụng phương pháp diện tích để chứng minh thì việc giải bài toán đó sẽ gặp nhiều khó khăn. Bởi vậy khi dạy phần diện tích đa giác, tôi cũng rất quan tâm đến vấn đề này, mỗi khi có điều kiện để nêu ra cho học sinh , tôi đều không bỏ qua. Học sinh THCS đã biết sử dụng công thức diện tích để tính toán vì các em đã được làm quen từ Tiểu học. Nhưng làm thế nào để HS biết sử dụng chúng để chứng minh thì không đơn giản chút nào. Sau đây tôi xin được trình bày một số kinh nghiệm của mình kết hợp với những vấn đề mình tìm tòi học hỏi được để “Giúp học sinh biết sử dụng phương pháp diện tích trong chứng minh hình học".

Phần hai: NỘI DUNG

I. CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN:

1. Cơ sở lý luận:

Ở tiểu học, học sinh đã được học về diện tích các hình chữ nhật, hình vuông, hình tam giác … Các công thức về diện tích các hình nói trên chủ yếu được các em ứng dụng trong việc giải quyết các bài tập tính toán có liên quan đến diện tích. Lên đến THCS, HS lớp 8 lại tiếp tục được học về diện tích của các hình này nhưng ở diện rộng hơn và sâu hơn. Tới đây, ta cũng cần cho học sinh thấy được ngoài ứng dụng tính toán, các công thức tính diện tích còn cho ta mối quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng, chúng rất có ích trong một số bài toán chứng minh về đại số cũng như hình học.

2. Cơ sở thực tiễn:

Phân môn hình học cũng được xem là một môn học năng khiếu. Nếu học sinh không có năng khiếu phân tích, óc quan sát, trí tưởng tượng thì không thể tự phát hiện vấn đề và giải quyết vấn đề.

Đa số học sinh học yếu môn Toán và Hình học nói riêng là do các em hổng kiến thức từ lớp dưới, vì đặc trưng của môn Toán là môn hệ thống kiến thức được xây dựng đi lên như xây một bức tường.

Có những học sinh lười học dẫn đến học yếu. Mà nguyên nhân chủ yếu do các em không nghe giảng bài, ghi chép không đầy đủ, không làm bài tập, … Có những em lười học trốn tiết liên tục dẫn đến kiến thức bị hụt hỏng không làm được bài tập dẫn đến chán học.

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU:

Khi giải các bài toán hình học, học sinh rất ngại vẽ thêm đường phụ,học sinh rất khó tìm ra phương pháp đi giải bài toán.Vì vậy người giáo viên phải đầu tư, nghiên cứu tìm ra phương pháp phù hợp để việc “dạy – học” đạt hiệu quả. Vì những nguyên nhân này mà tôi đưa ra một số giải pháp nhỏ khi giải bài tập bằng cách ứng dụng phương pháp diện tích trong chứng minh hình học.

III. CÁC GIẢI PHÁP VÀ KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC:

1. Các giải pháp:

Các bài toán hình học sử dụng phương pháp diện tích để chứng minh ở trung học cơ sở đa số nằm trong chương trình hình học lớp 8. Đây là một trong những phương pháp rất hiệu quả trong việc bồi dưỡng, nâng cao kiến thức cho học sinh. Khi dạy nội dung này tôi chia làm các phần sau:

Phần 1: Chứng minh các công thức diện tích.

Phần 2: Chứng minh các bổ đề và các định lý:

- Định lý Talet.
- Tính chất đường phân giác của tam giác.

Phần 3: Ứng dụng vào giải các bài tập cụ thể.

Phần 1: Giới thiệu và chứng minh các công thức diện tích.

1.1.Khái niệm và tính chất diện tích đa giác:

+ Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích đa giác đó.

+ Diện tích đa giác có các tính chất sau:

- *Tính chất 1*: Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

- *Tính chất 2*: Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

- *Tính chất 3*: Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1cm, 1dm, 1m,… làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là: $1cm^2$, $1dm^2$, $1m^2$,

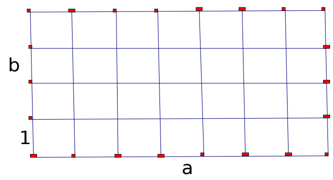
1.2. Công thức diện tích hình chữ nhật:

S = a.b (a;b là hai kích thước của hình chữ nhật)

Chứng minh: Ta xét trường hợp a và b là các số nguyên dương.

Giả sử: a = 7; b = 4 đơn vị dài.

Chia các cạnh hình chữ nhật thành 7 và 4 đoạn bằng nhau.



Qua các điểm chia vẽ các đường thẳng song song với các cạnh hình chữ nhật.

Ta được 7x4 hình vuông (cạnh có độ dài bằng 1).

Theo tính chất 1 và 3 về diện tích suy ra tất cả các hình vuông đều có diện tích bằng 1.

Theo tính chất 2 về diện tích ta có: S = 7 x 4, tức là: S = a.b

(Cách chứng minh trên cũng đúng với $a,b \in Q^+$)

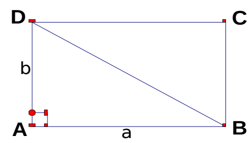
1.3.Công thức tính diện tích hình vuông,tam giác vuông.

a. Hình vuông là một trường hợp của hình chữ nhật: **S =** $\mathbf{a^2}$.
b. Tam giác vuông: **S =** $\frac{1}{2}$**a.b**

Chứng minh:

Cho tam giác vuông ABD ($\hat{A} = 90^0$)

và gọi S là diện tích của nó. Vẽ hình chữ nhật ABCD nhận AB và AD làm cạnh .



Ta có ΔABD = ΔCDB (c-c-c)

Nên S_{ABCD} = 2S (tính chất 1 và 2 của diện tích)

Nhưng S_{ABCD} = AD.AB (diện tích hình chữ nhật)

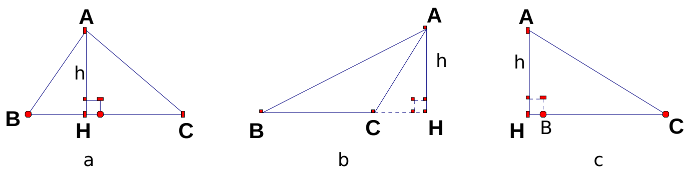
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}AD.AB = \frac{1}{2}b.a$$

1.4. Diện tích tam giác: $\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2}a.h}}$

Chứng minh: Cho ΔABC và gọi S là diện tích của nó

Lấy một cạnh tuỳ ý, chẳng hạn lấy cạnh BC và vẽ đường cao AH ứng với cạnh đó. Ta chứng minh:

S= $\frac{1}{2}$BC.AH (tức là S = $\frac{1}{2}$a.h). Có 3 trường hợp xảy ra:



a/ Điểm H nằm giữa B và C (Hình a)

ΔABC được chia thành 2 tam giác vuông BHA và CHA.

Ta có: $S_{BHA} = \frac{1}{2}$ AH.BH (diện tích tam giác vuông)

$S_{CHA} = \frac{1}{2}$ AH.CH (diện tích tam giác vuông)

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}(BH + HC).AH = \frac{1}{2}BC.AH$

b/ Điểm H nằm ngoài đoạn thẳng BC (Hình b)

Giả sử C nằm giữa B và H. Trong trường hợp này , có thể xem ΔBHA được chia thành 2 tam giác ABC và AHC không có điểm chung trong.

Do đó: $S_{BAH} = S_{ABC} + S_{ACH}$ (tính chất 2)

Nhưng: $S_{ACH} = \frac{1}{2}$AH.CH (diện tích tam giác vuông)

$S_{ABH} = \frac{1}{2}$AH.BH (diện tích tam giác vuông)

Vậy : $S_{ABC} = \frac{1}{2}(BH - CH).AH = \frac{1}{2}BC.AH$

c/ Điểm H trùng với một trong các đỉnh B hay C (Hình c)

Giả sử $H \equiv B$. Khi đó ΔABC vuông tại B.

Ta có : $S = \frac{1}{2}BC.AB = \frac{1}{2}BC.AH$

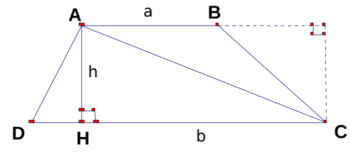
1.5. Diện tích hình thang: $\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2}(a+b).h}}$

Chứng minh:

Cho hình thang ABCD (AB // CD) và gọi AH là đường cao, S là diện tích.

Vẽ đường chéo AC ta được hai tam giác ABC, ACD có cùng chiều cao.

Do đó: $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ACB}$ (tính chất 2)



Nhưng: $S_{ADC} = \frac{1}{2}DC.AH$, $S_{ACB} = \frac{1}{2}AB.AH$

Suy ra: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+DC).AH$

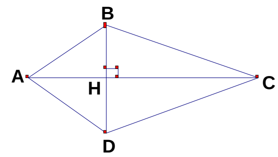
Vậy $S= \frac{1}{2}(a+b)h$

*** Hình bình hành là hình thang có hai đáy bằng nhau nên có S = a.h.**

1.6. Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc :

$\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2}d_1.d_2} \text{ (} d_1,d_2\text{: là độ dài hai đường chéo)}}$

Chứng minh:



Cho tứ giác ABCD có AC $\perp$ BD tại H.

Gọi S là diện tích ABCD, ta có:

$$S = S_{ABC} + S_{ADC} \text{ nhưng } S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \text{ , } S_{ADC} = \frac{1}{2}DH.AC$$

Vậy $S = \frac{1}{2}AC(BH + DH) = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}d_1.d_2$

*** Diện tích hình thoi:** $\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2}d_1.d_2}}$

<u>Phần 2</u> : <u>Chứng minh các bổ đề và các định lí</u>.

Bổ đề 1: Nếu hai tam giác có chung đường cao thì tỉ số hai cạnh đáy tương ứng bằng tỉ số diện tích của hai tam giác.

Chứng minh: Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai tam giác có chung đường cao h,hai cạnh đáy tương ứng có độ dài a_1 và a_2.

Ta có : $S_1= \frac{1}{2}a_1h$, $S_2 = \frac{1}{2}a_2h$ nên $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1h}{\frac{1}{2}a_2h} = \frac{a_1}{a_2}$ (đpcm)

Bổ đề 2: Nếu hai tam giác có hai cạnh đáy bằng nhau thì tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số diện tích của hai tam giác.

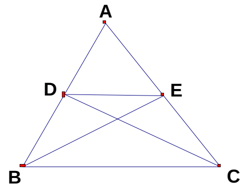
Chứng minh: Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai tam giác chung cạnh đáy có độ dài b, hai đường cao tương ứng la h_1, h_2.

Ta có : $S_1 = \frac{1}{2}bh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{2S_1}{b}$

$$S_2 = \frac{1}{2}bh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{2S_2}{b} \text{ nên } \frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{2S_1}{b}}{\frac{2S_2}{b}} = \frac{S_1}{S_2} \text{ (đpcm).}$$

<u>2.1 Chứng minh định lí talet</u>:

Cho ΔABC, nếu DE//BC thì $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



Chứng minh:

ΔADE và ΔABE có chung đường cao kẻ từ E nên theo bổ đề 1 ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}}$ (1)

ΔAED và Δ ACD có chung đường cao kẻ từ D nên theo bổ đề 1 ta có : $\frac{AE}{AC} = \frac{S_{AED}}{S_{ACD}}$ (2)

Ta lại có : $S_{BEC} = S_{BDC}$ (chung đáy BC, các đường cao tương ứng bằng nhau)

Nên $S_{ABC} – S_{BEC} = S_{ABC} – S_{BDC} \Rightarrow S_{ABE} = S_{ACD}$ (3)

Từ (1) , (2) và (3) suy ra $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

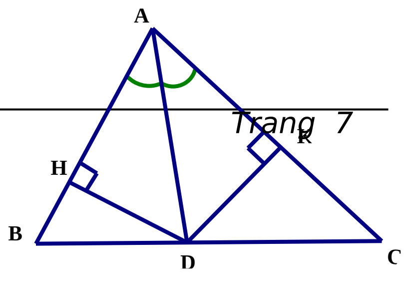
<u>2.2 Chứng minh tính chất phân giác của tam giác</u>.

Nếu AD là phân giác của ΔABC thì $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Cách 1: Dùng định lý Talet để chứng minh (tham khảo SGK toán 8 tập 2 trang 66)

Cách2: Dùng diện tích để chứng minh.

Chứng minh: ΔADB và ΔADC có chung đường cao kẻ từ A đến BC



Nên theo bổ đề 1 ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{S_{ADB}}{S_{ADC}}$ (1)

Kẻ DH $\perp$ AB; DK $\perp$ AC.

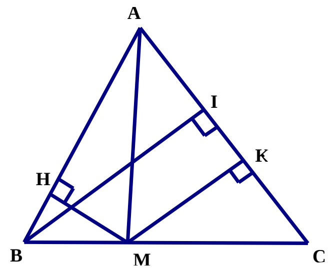
Ta có : $S_{ADB} = \dfrac{1}{2}$DH.AB, $S_{ADC} = \dfrac{1}{2}$DK.AC

Nên : $\dfrac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \dfrac{\frac{1}{2}DH.AB}{\frac{1}{2}DK.AC} = \dfrac{AB}{AC}$ (2) (vì DH = DK do ΔADH = ΔADK)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

<u>Phần 3</u>: Ứng dụng vào giải các bài toán cụ thể.

Bài toán 1: Cho ΔABC cân tại A . Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc cạnh đáy BC . Gọi MH, MK theo thứ tự là các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC. Gọi BI là đường cao của ΔABC . Chứng minh rằng MH+ MK = BI.



***Giải* :**

Đặt AB = AC = a. Ta có

MH = $\dfrac{2S_{AMB}}{AB} = \dfrac{2S_{AMB}}{a}$, MK = $\dfrac{2S_{AMC}}{AC} = \dfrac{2S_{AMC}}{a}$

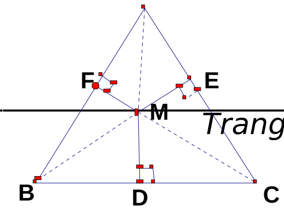
Do đó: MH + MK = $\dfrac{2S_{AMB}}{a} + \dfrac{2S_{AMC}}{a} = \dfrac{2(S_{AMB} + S_{AMC})}{a} = \dfrac{2S_{ABC}}{a} = BI$

Ghi nhớ: Đường cao h của một tam giác có diện tích S được biểu thị bằng h = $\dfrac{2S}{a}$ *(a là cạnh đáy tương ứng)*

Bài toán 2: Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trong tam giác đều ABC đến ba cạnh của tam giác bằng chiều cao của tam giác đó.

Giải :

Gọi a là độ dài các cạnh của tam giác đều ABC,



h là đường cao của tam giác đều.

Ta có:

$S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$

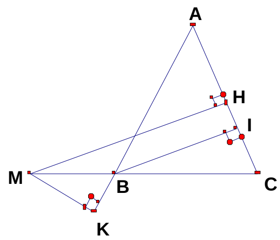
$$\Rightarrow \frac{a}{2}.MD + \frac{a}{2}.ME + \frac{a}{2}.MF = \frac{a}{2}.h \Rightarrow \frac{a}{2}(MD + ME + MF) = \frac{a}{2}.h$$
$$\Rightarrow MD + ME + MF = h$$

Ghi nhớ : Phải kẻ các đường phụ MA, MB, MC để tạo ra các tam giác MBC, MAC, MAB.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm M thuộc tia đối của tia BC. Chứng minh rằng hiệu các khoảng cách từ điểm M đến các đường thẳng AC và AB bằng đường cao ứng với cạnh bên của tam giác ABC.

Giải : Đặt AB = AC = a , kẻ MH $\perp$ AC , MK $\perp$ AB, BI $\perp$ AC.

Ta sẽ chứng minh MH – MK = BI



Ta có : $S_{MAC} – S_{MAB} = S_{ABC}$

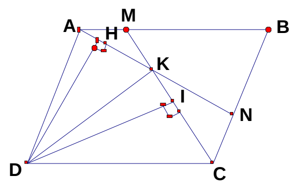
$$\Rightarrow \frac{AC}{2}.MH - \frac{AB}{2}.MK = \frac{AC}{2}.BI \Rightarrow \frac{a}{2}.MH - \frac{a}{2}.MK = \frac{a}{2}.BI$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(MH - MK) = \frac{a}{2}.BI \Rightarrow MH - MK = BI$$

Ghi nhớ: Sử dụng tính chất 2 về diện tích đa giác để có $S_{MAC} – S_{MAB} = S_{ABC}$.

Bài toán 4: Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho AN = CM. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng: KD là tia phân giác của góc AKC.

Giải :



Kẻ DH $\perp$ KA, DI $\perp$ KC.

Ta có: DH.AN = 2 S_{ADN} (1) ; DI . CM = 2 S_{CDM} (2)

Ta lại có:

$S_{ADN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (tam giác và hình bình hành có chung đáy AD, đường cao tương ứng bằng nhau)

$S_{CDM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Tam giác và hình bình hành có chung đáy CD, đường cao tương ứng bằng nhau)

Nên : $S_{ADN} = S_{CDM}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: DH.AN = DI. CM.

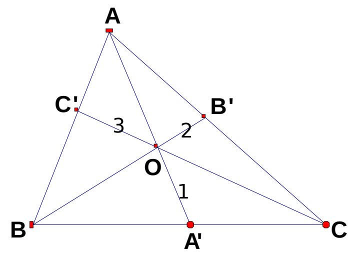
Do AN = CM nên DH = DI. Do đó KD là tia phân giác của $\widehat{AKC}$.

Ghi nhớ: Các đường vuông góc DH, DI được vẽ thêm có liên hệ với các đoạn thẳng đã cho AN, CM trong các công thức diện tích tam giác.

Bài toán 5: Gọi O là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$.

Giải:

Kí hiệu : $S_{ABC} = S$, $S_{OBC} = S_1$, $S_{OAC} = S_2$, $S_{OAB} = S_3$.



Theo bổ đề 1 ta có: $\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OBA'}}{S_{ABA'}}; \frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OCA'}}{S_{ACA'}}$

Nên theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OBA'} + S_{OCA'}}{S_{ABA'} + S_{ACA'}} = \frac{S_1}{S}$$

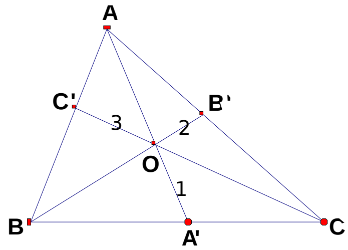
Trong đó: $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}; \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$

Do đó: $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = 1$

***Ghi nhớ**: Có thể biểu thị tỷ số của hai đoạn thẳng theo tỷ số diện tích của hai tam giác.*

Bài toán 6: Gọi O là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự ở A', B' , C' . Chứng minh rằng: $\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=1$

Giải: Theo bổ đề1: $\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{BAA'}}{S_{CAA'}};\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{BOA'}}{S_{COA'}}$



Nên theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau:

$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{BAA'}-S_{BOA'}}{S_{CAA'}-S_{COA'}}=\frac{S_3}{S_4}$

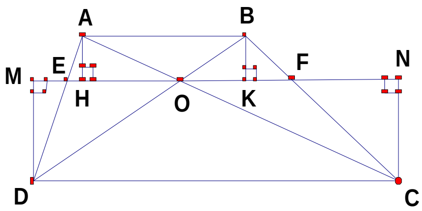
Tương tự: $\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_2}{S_1};\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_1}{S_3}$

Do đó: $\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_2}{S_1}.\frac{S}{S_2}.\frac{S_1}{S}=1$

Ghi nhớ: Có thể biểu thị tỷ số của hai đoạn thẳng theo tỷ số diện tích của hai tam giác.

Bài toán 7: Cho hình thang ABCD (AB // CD) , các đường chéo cắt nhau tại O . Qua O, kẻ đường thẳng song song với hai đáy nó cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng: OE = OF.

Giải : Cách 1



Kẻ AH , BK ,CN, DM vuông góc với EF.

Đặt AH = BK = h_1 ; CN = DM = h_2

Ta có : $\frac{1}{2}OE.h_1+\frac{1}{2}OE.h_2=S_{OEA}+S_{OED}=S_{OAD}$ (1)

$\frac{1}{2}OF.h_1+\frac{1}{2}OF.h_2=S_{OFB}+S_{OFC}=S_{OBC}$ (2)

Ta lại có: $S_{ADC}=S_{BDC}\Rightarrow S_{ADC}-S_{ODC}=S_{BDC}-S_{ODC}\Rightarrow S_{OAD}=S_{OBC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $\frac{1}{2}$OE ($h_1 + h_2$) = $\frac{1}{2}$OF ($h_1 + h_2$)

Do đó: OE =OF

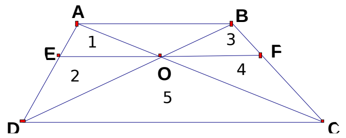
Ghi nhớ: Vẽ thêm các đường cao để sử dụng công thức diện tích tam giác.

Cách 2: (Ký hiệu như hình vẽ.)

Ta có : $S_{ADC} = S_{BDC}$, cùng trừ đi S_5 được :$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ (1)

Giả sư OE > OF thì $S_1 > S_3$ và $S_2 > S_4$

nên $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$ trái vơí (1)



Giả sử OE < OF thì $S_1 < S_3$ và $S_2 < S_4$ nên $S_1 + S_2 < S_3 + S_4$ trái vơí (1)

Vậy OE = OF.

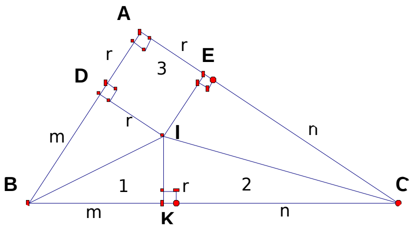
Ghi nhớ: Có thể sử dụng phương pháp phản chứng kết hợp với phương pháp diện tích để chứng minh.

Bài toán 8 : Cho tam giác ABC vuông tại A. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. Kẻ IK vuông góc với BC (K∈BC). Chứng minh rằng: KB.KC = $\frac{1}{2}$AB.AC.

Giải : (Hình 15) Kẻ ID ⊥ AB, IE ⊥ AC. Ta có : IK = ID = IE đặt chúng bằng r

Đặt KB = m, KC = n, ta có :BD = m, CE = n.

Tứ giác ADIE là hình vuông AD = AE = r



Ta có : AB .AC= (m +r) (n +r) = mn + mr + nr + r^2 (1)

Ta thấy : mr = $2S_1$, nr =2 S_2 , $r^2 = S_3$

Và $2S_1 + 2S_2 + S_3 = S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2}$

nên : mr +nr + $r^2 = \frac{AB.AC}{2}$ (2)

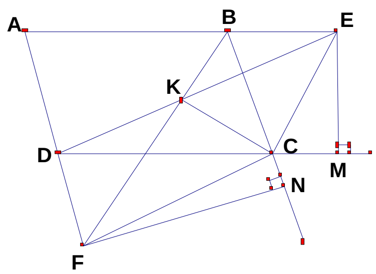
Từ (1) và (2) suy ra : AB.AC = mn + $\frac{AB.AC}{2}$

Vậy mn = $\frac{AB.AC}{2}$

Ghi nhớ : Có thể biểu thị tích của độ dài hai đoạn thẳng theo diện tích của tam giác

Bài toán 9: Cho hình bình hành ABCD. Điểm E trên tia đối của tia BA, điểm F trên tia đối của tia DA. Nối BF và DE cắt nhau tại K. Chứng minh diện tích tứ giác ABKD bằng tổng diện tích hai tam giác CKE và CKF.

Giải:



Kẻ EM $\perp$ CD, FN $\perp$ BC

$S_{ECD} = \frac{1}{2}EM \,.\, CD = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{ECK} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{KCD}$ (1)

$S_{FBC} = \frac{1}{2}FN \,.\, BC = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

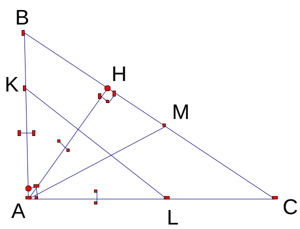
$\Rightarrow S_{FKC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{KCB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$S_{FKC} + S_{ECK} = \left(\frac{1}{2}S_{ABCD} + \frac{1}{2}S_{ABCD}\right) - \left(S_{KCD} + S_{KCB}\right) = S_{ABKD}$.

Ghi nhớ: Phải kẻ thêm đường phụ EM và FN để sử dụng công thức diện tích trong tam giác ECD,FBC.

Bài toán 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên AB,AC lấy K,L sao cho: AK = AH = AL . Chứng minh rằng: $S_{AKL} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$.



Giải: Ta có : $S_{AKL} = \frac{1}{2}AK.AL = \frac{1}{2}AH^2$ (1)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \qquad (2)$$

Gọi M là trung điểm của BC, ta có:

BM = MC = AM suy ra BC = 2AM.

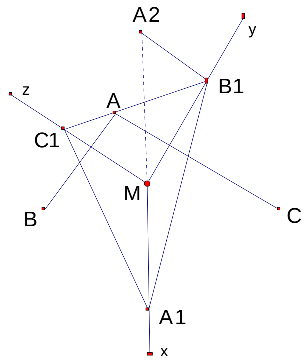
Mặt khác ta có AM $\geq$AH (đường vuông góc và đường xiên).

Từ đó suy ra: 2AH $\leq$ BC (3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra $S_{AKL} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$.

Ghi nhớ: Khi dùng công thức diện tích tam giác phải linh hoạt.

Bài toán 11: Từ một điểm M nằm trong tam giác ABC, kẻ các tia Mx,My,Mz theo thứ tự vuông góc và cắt với BC,AC,AB. Lần lượt lấy A_1,B_1,C_1 sao cho MA_1 = BC, MB_1 = CA, MC_1 = AB. Chứng minh rằng: M là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.



Giải:

Trên tia đối của tia Mx lấy điểm A_2 sao cho :

MA_2= MA_1= BC.

Ta có : $\widehat{A_2MB_1} = \widehat{ACB}$

Vậy $\Delta A_2MB_1 = \Delta BCA$ do đó $S_{A_2MB_1} = S_{BCA}$

Mặt khác: $S_{A_2MB_1} = S_{A_1MB_1}$

Nên $S_{A_1MB_1} = S_{ABC}$

Tương tự: $S_{B_1MC_1} = S_{ABC}, S_{C_1MA_1} = S_{ABC}$

Vậy ba tam giác A_1MB_1 , B_1MC_1, C_1MA_1 có cùng diện tích. Do đó M là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$.

Ghi nhớ: Phải lấy thêm điểm A_2.

2. <u>Kết quả đạt được</u>:

Sau khi thấy được các công thức diện tích không phải chỉ để tính diện tích mà chúng còn rất có ích để giải nhiều bài toán chứng minh khác**,** học sinh rất thích thú, nhất là khi các em tự mình giải được bài tập theo phương pháp nói trên. Qua đó, nó giúp học sinh vững tin hơn khi vận dụng kiến thức một cách sáng tạo để giải bài tập theo nhiều phương pháp khác nhau. Nó góp phần đáp ứng yêu cầu mới hiện nay, giúp cho HS học tập một cách năng động hơn, khả năng ứng dụng phong phú hơn. Nó góp phần làm cho số lượng học sinh yêu thích môn Toán ngày càng tăng lên. Sự yêu thích bộ môn giúp các em thêm tích cực học tập và tiến bộ hơn

Phần ba: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

I. KẾT LUẬN:

Trong quá trình giảng dạy tôi luôn tìm tòi phương pháp giải phù hợp cho học sinh và khai thác phương pháp đó để học sinh vận dụng một cách linh hoạt vào các bài tập khác. Trong chứng minh hình học, học sinh rất sợ những bài toán phải vẽ thêm đường phụ và không để ý áp dụng công thức diện tích các hình (tam giác, tứ giác, đa giác). Do học sinh không biết vẽ từ đâu, và vẽ để làm gì. Qua các bài toán trên giúp học sinh định hướng được vẽ đường phụ nhằm tạo ra những tam giác để sử dụng công thức diện tích khi chứng minh. Qua thực tế bản thân tôi áp dụng phương pháp diện tích các hình (tam giác, tứ giác, đa giác) trong chứng minh các bài toán hình học ở chương trình lớp 8 để dạy học sinh giỏi, tôi thấy học sinh tiếp thu hào hứng và mạnh dạn suy nghĩ theo hướng dùng diện tích để giải quyết bài toán.

II. KIẾN NGHỊ:

Để đạt được hiệu quả cao ngoài phương pháp dạy tốt thì giáo viên phải thường xuyên nghiên cứu thêm tài liệu về phương pháp diện tích các phần miềm giảng dạy như sketchpad, mathcad .... Bên cạnh đó kết hợp với phương tiện dạy học như máy chiếu, các hình ảnh trực quan … thì bài học sẽ sinh động và gần gũi với thực tế hơn. Nhờ đó học sinh học sinh sẽ lĩnh hội được kiến thức một cách tốt hơn, kết quả giảng dạy sẽ cao hơn.

Hiện nay đồ dùng dạy học môn hình học thiếu khá nhiều. Vậy kính mong cấp trên cần trang bị nhiều hơn đồ dùng dạy học của môn này.

Trên đây là những giải pháp giảng dạy phương pháp diện tích trong chứng minh hình học. Rất mong sự góp ý của các đồng nghiệp.

Người viết

Bạch Long Hùng

V/ PHỤ LỤC:

Tham khảo các tài liệu :

1/. Sách giáo khoa toán 8 – Tập 1 – nhà xuất bản Giáo dục năm 2003.

2/. Sách giáo khoa toán 8 – Tập 2 – nhà xuất bản Giáo dục năm 2003.

3/. Sách Hình Học 8 – Nhà xuất bản Giáo dục – 1998.

4/. 500 bài toán chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi toán 8.- Nhà xuất bản ĐHSP.

5/. Toán nâng cao hình học 8 – Nhà xuất bản giáo dục .

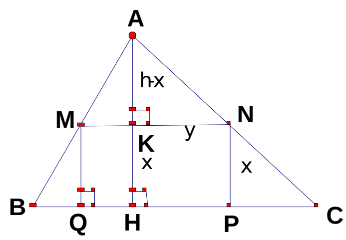
6/. Các chuyên đề hình học bồi dưỡng học sinh giỏi trung học cơ sở – Nhà xuất bản Giáo dục.

Bài toán 10: Cho tam giác ABC, đường cao AH , cạnh BC = a. Hình chữ nhật MNPQ có các đỉnh nằm trên các cạnh hình tam giác ABC.($M \in AB$, $N \in AC$, P và Q $\in BC$). Hãy xác định vị trí của M trên cạnh AB sao cho diện tích hình chữ nhật MNPQ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị lớn nhất ấy.

Giải :

NP = x , MN = y , KH = x , AK= h-x.

$S_{ABC} = S_{AMN} + S_{BMNC} \Rightarrow \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}y\,(h-x) + \frac{1}{2}\,(a+y)\,x$



$\Leftrightarrow ah = hy - xy + ax + xy.$

$\Leftrightarrow ah = hy + ax$

$\Leftrightarrow x = \frac{h(a-y)}{a}$

$S_{MNPQ} = xy = \frac{h}{a}\,(a - y)\,.\,y = \frac{h}{a}\,(ay - y^2)$

Vì $\frac{h}{a}$ không đổi nên S_{MNPQ} lớn nhất khi $ay - y^2$ lớn nhất

Ta có : $ay - y^2 = -\left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) =$

$-\left[(y-\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}\right] = -(y - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} \le \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của $ay - y^2 = \frac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow$ Giá trị lớn nhất của $S_{MNPQ} = \frac{h}{a}.\frac{a^2}{4} = \frac{ah}{4}$

Khi $y = \frac{a}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$

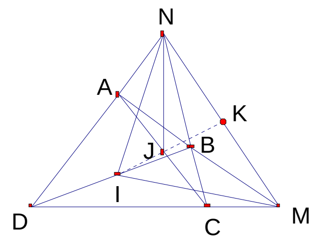
$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác ABC (vì MN // BC)

Vậy giá trị lớn nhất của $S_{MNPQ} = \frac{ah}{4}$ khi M là trung điểm của AB.

Ghi nhớ : Sử dụng tích chất 2 về diện tích đa giác để có

$$S_{ABC} = S_{AMN} + S_{BMNC}.$$

Bài toán 11: Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Gọi I,J,K theo thứ tự là trung điểm của BD,AC,MN. Chứng minh rằng I,J,K thẳng hàng.



Giải:

Ta có: $S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NDI} - S_{NJC} - S_{CIJ} - S_{CID}$

$= S_{NDC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{AIC} - \frac{1}{2}S_{CBD}$

$= S_{NDC} - S_{NAB} - \frac{1}{2}S_{ABD} - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}(S_{ADC} - S_{ADIC}) - \frac{1}{2}S_{CBD}$

$= S_{ABCD} - \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{BCD}) + \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ADC})$

$= \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Tương tự: $S_{MIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Vậy $S_{NIJ} = S_{MIJ}$. Do đó các khoảng cách từ M và N tới IJ là bằng nhau. Mặt khác M và N nằm về hai phía của IJ, nên IJ đi qua trung điểm của MN.

Ghi nhớ: Hai tam giác có diện tích bằng nhau mà có chung một cạnh thì khoảng cách từ hai đỉnh đối diện với cạch chung đó bằng nhau.

Bài toán 12: Cho góc xOy.Hai điểm A,B thuộc Ox. Hai điểm C,D thuộc Oy. Tìm tập hợp những điểm M nằm trong góc xOy sao cho hai tam giác MAB và MCD có cùng diện tích.

Giải:

Lấy E và F lần lượt trên Ox,Oy sao cho: OE = AB; OF = CD.

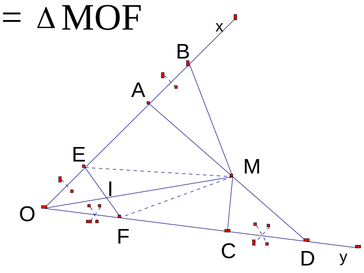
Gọi I là trung điểm của EF. Ta có:

$S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow S_{MOE} = S_{MOF} \Leftrightarrow \Delta MOE = \Delta MOF$

Mà $S_{MOE} = \frac{1}{2}S_{OEMF}$

$\Leftrightarrow S_{MOE} = S_{MOF} \Leftrightarrow$ O,I,M thẳng hàng.

Vậy tập hợp điểm M là tia OI.



Ghi nhớ: * Hai tam giác bằng nhau thì diện tích diện tích bằng nhau.

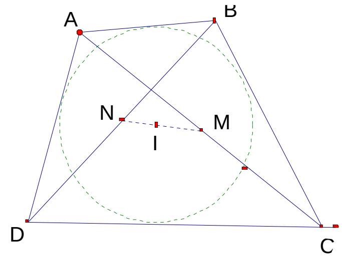
**** $S_{MOE} = S_{MOF} \Leftrightarrow$ O,I,M thẳng hàng.***

Bài toán13: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M,N là trung điểm các đường chéo AC,BD. Chứng minh rằng ba điểm M,N,I thẳng hàng.

Giải: Tương tự bài 12, trước hết hãy chứng minh rằng tập hợp những điểm K sao cho :

$S_{KAB} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (không đổi) thuộc một đường thẳng.

(1)



Ta có: $S_{NAB} = \frac{1}{2}S_{ABD}$, $S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{BCD}$

Suy ra: $S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)

$S_{MAB} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ Và $S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ACD}$

Do đó : $S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (3)

Do tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I) nên AB + CD = AD + BC

$S_{IAB} = S_{ICD} = S_{IAD} = S_{IBC}$

Do đó : $S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (4)

Từ (2),(3) và (4) suy ra N,M,I thuộc quỹ tích nói ở (1). Do đó chúng thẳng hàng.

Ghi nhớ: Do tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I) nên AB + CD = AD + BC **=>** $S_{IAB} = S_{ICD} = S_{IAD} = S_{IBC}$