BÀI 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

CHƯƠNG 5. GIỚI HẠN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1: Dãy số có giới hạn 0

Câu 1. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Nhận biết dãy số có giới hạn là 0

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

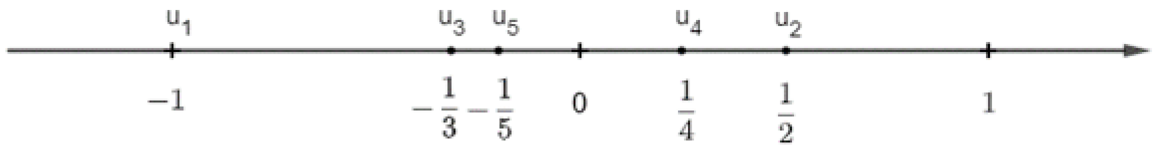
a) Biểu diễn năm số hạng đầu của dãy số này trên trục số.

b) Bắt đầu từ số hạng nào của dãy, khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn $0,01$?

Lời giải:

a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) đã cho là $u_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1; u_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}; u_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}; u_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$.

Biểu diễn các số hạng này trên trục số, ta được:



b) Khoảng cách từ un đến 0 là $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $\frac{1}{n} < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100$.

Vậy bắt đầu từ số hạng thứ 101 của dãy thì khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,01.

Câu 2. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$.

Lời giải:

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

Ta có $|u_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$.

Câu 3. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$. Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - 1$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Lời giải

Ta có: $v_n = u_n - 1 = \frac{n+(-1)^n}{n} - 1 = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{n}$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Câu 4. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

a. $u_n = \frac{(-1).\cos n}{n^4}$

b. $\frac{(-1)^n \sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}}$

c. $\frac{1}{n(2n+3)}$

d. $\frac{(-1)^n \sin n + 1}{n^2}$

Lời giải:

a. $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n.\cos n}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$

mà $\lim \frac{1}{n^4} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

b. $\left|\frac{-1^n \sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}}\right| \le \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

$m\mu \lim \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = 0 \Rightarrow \lim \frac{-1^n \sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$

c. $\left|\frac{1}{n(2n+3)}\right| = \left|\frac{1}{2n^2+3n}\right| \le \frac{1}{n^2}$

mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{n(2n^2+3)} = 0$

d. $\left|\frac{(-1)^n \sin n + 1}{n^2}\right| \le \frac{2}{n^2}$

mà $\lim \frac{2}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n \sin n + 1}{n} = 0$

Câu 5. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

a. $u_n = (0,99)^{2n}$

b. $u_n = \frac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2n+1}$

c. $u_n = \frac{(\cos(2n-1))^{2n}}{5^n}$

d. $u_n = \frac{2.\sin n^2}{n^4+1}$

Lời giải:

a. $u_n (0,99)^{2n} = (0,99^2)^n$

có $0,99^2 < 1 \Rightarrow \lim(0,99^2)^n = 0$

b. $u_n = \frac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2n+1}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2^n+1}\right| \le \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Có $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\dfrac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2^n+1} = 0$

c. $u_n = \dfrac{(\cos(2n-1))^{2n}}{5^n}$

$\left|\dfrac{(\cos(2n-1))^{2n}}{5^n}\right| \le \dfrac{1}{5^n} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

Có $\lim\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\dfrac{(\cos(2n-1))^{2n}}{5^n} = 0$

d. $u_n = \dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1}$

$\left|\dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1} \le \dfrac{2}{n^4}\right|$

Có $\lim\dfrac{2}{n^4} = 0 \Rightarrow \lim\dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1} = 0$

Câu 6. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$

a. Chứng minh rằng: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{2}{3}$ với mọi n

b. Chứng minh rằng: $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. Chứng minh dãy số có giới hạn 0

Lời giải:

a. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3n}$ là dãy số giảm.

$\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3n} \le \dfrac{2}{3}$

b. Có : $u_n = \dfrac{n}{3^n} \le \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. Theo b. Ta có

$|u_n| = \dfrac{n}{3^n} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$m\mu\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

Câu 7. Chứng minh rằng hai dãy số $(u_n),(v_n)$ với $u_n = \dfrac{1+\cos n^2}{2n+1}$; $v_n = \dfrac{n+\sin 2n}{n^2+n}$ có giới hạn 0

Lời giải:

Ta có: $0 \le u_n \le \frac{2}{2n+1} \le \frac{1}{n}$

$0 \le v_n \le \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$

Do đó, $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = 0$

Câu 8. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0

a. $u_n = \frac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$ b. $u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$ c. $u_n = \frac{n+\cos\frac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$ d. $\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}$

Lời giải:

a. $0 < u_n = \frac{(\sqrt{5})^n}{3^n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$ với mọi n

Vì $0 < \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ nên $\lim\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 0$. Do đó $\lim u_n = 0$

b. $|u_n| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ với mọi n

Vì $\lim\frac{1}{2n} = 0$ từ đó suy ra $\lim u_n = 0$

c. $0 \le u_n \le \frac{n+1}{\sqrt{n}(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ với mọi n

Sử dụng định lí kẹp ta có $\lim u_n = 0$

d.Vì $\left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}\right| = \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}+1} \le \frac{1}{n}$ với mọi n và $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1} = 0$

Câu 9. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0 : $u_n = \frac{n^n(n+2)^n}{(2n+2)^{2n}}$

Lời giải:

$$u_n = \frac{n^n(n+2)^2}{(2n+2)^{2n}} = \frac{(n^2+2n)^n}{2^{2n}(n+1)^{2n}} \le \frac{(n+1)^{2n}}{2^{2n}(n+1)^{2n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

Mà $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$ nên $\lim u_n = 0$

Câu 10. Chứng minh rằng:

a. $\lim 2\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0$ b. $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$

Lời giải:

a. $2\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+n} \le \frac{2}{n+n} = \frac{1}{n}$

b. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Từ đó suy ra $\lim = 0$

Câu 11. **(*)** Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0 : $u_n = \dfrac{15^n}{2^n(9^n + 25^n)}$

Lời giải:

$$u_n = \frac{15^n}{2^n(9^n+25^n)} = \frac{3^n.5^n}{2^n(3^{2n}+5^{2n})} \le \frac{\frac{3^{2n}+5}{2}}{2^n(3^{2n}+5^{2n})} = \frac{1}{2^{n+1}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Mà $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow$ đ.p.c.m

Dạng 2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

Câu 12. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3 \cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Lời giải

Ta có: $u_n - 3 = \dfrac{3.2^n - 1}{2^n} - 3 = \dfrac{(3.2^n - 1) - 3.2^n}{2^n} = -\dfrac{1}{2^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Câu 13. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\dfrac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

Lời giải

Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống mặt sàn, sau lần chạm sàn đầu tiên, quả bỏng nảy lên một độ cao là $u_1 = \dfrac{2}{3} \cdot 5$.

Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao u_1 xuống mặt sàn và nảy lên độ cao là $u_2 = \dfrac{2}{3}u_1 = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3} \cdot 5\right) = 5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao u_2 xuống mặt sàn và nảy lên độ cao là $u_3 = \dfrac{2}{3}u_2 = \dfrac{2}{3} \cdot \left(5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right) = 5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ và cứ tiếp tục như vậy.

Sau lần chạm sàn thứ n, quả bóng nảy lên độ cao là $u_n = 5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 14. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n - u_n}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.u_n) = 2.2 = 4$.

Và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 3 - 2 = 1$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n - u_n} = \dfrac{4}{1} = 4$

b) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$, do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(2.v_n) = 2.3 = 6$.

Và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + 2v_n) = 2 + 6 = 8$

Vì $u_n \ge 0, v_n \ge 0$ với mọi n nên $u_n + 2v_n \ge 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + 2v_n) = 8 > 0$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n + 2v_n} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Câu 15. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$.

Lời giải

a) $$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

b) $$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(n^2 + 2n\right) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{2}{n}\right)} + n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n}$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1.$$

Câu 16. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}, v_n = 3 - \dfrac{2}{n}$.

Tính và so sánh: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Lời giải

+) Ta có: $u_n + v_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) + \left(3 - \dfrac{2}{n}\right) = 5 - \dfrac{1}{n}$.

Lại có $(u_n + v_n) - 5 = \left(5 - \dfrac{1}{n}\right) - 5 = -\dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 5$.

+) Ta có: $u_n - 2 = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) - 2 = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Và $v_n - 3 = \left(3 - \frac{2}{n}\right) - 3 = -\frac{2}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Khi đó, $\lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = 2 + 3 = 5 = \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$.

Vậy $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Câu 17. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Tìm $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$.

Lời giải

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Câu 18. Cho dãy số (v_n) với $v_n = \frac{1}{n^3} + 2$. Bằng định nghĩa hãy chứng minh rằng $\lim v_n = 2$.

Lời giải

Ta có: $\lim(v_n - 2) = \lim\left(\frac{1}{n^3} + 2 - 2\right) = \lim \frac{1}{n^3} = 0$

Vậy $\lim v_n = 2$

Câu 19. Chứng minh rằng: $\lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right) = 5$

Lời giải

Ta có $\lim\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 - 5\right] = \lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Theo định nghĩa suy ra điều phải chứng minh

Câu 20. Chứng minh rằng $\lim \frac{6n+2}{n+5} = 6$

Lời giải

Ta có $\lim\left(\frac{6n+2}{n+5} - 6\right) = \lim \frac{-28}{n+5} = 0$ do $\left(\left|\frac{28}{n+5}\right| < \frac{28}{n}\right)$

Theo định nghĩa suy ra điều phải chứng minh

Câu 21. Chứng minh: $\lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -2$.

Lời giải

Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\frac{9}{a^2} - 1}$, ta có:

$$\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = \left|\frac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right| < \left|\frac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{3}{\sqrt{n_a^2+1}} < a$$ với $\forall n > n_a$.

Suy ra $\lim\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right|=0 \Rightarrow \lim\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-2$.

Câu 22. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\frac{n+1}{n^2-2}$. b. $\lim\frac{n(n+1)}{(n+4)^3}$. c. $\lim\frac{3n^3-2n+5}{2n^2+5n-3}$. d. $\lim\frac{2n^3}{n^4+3n^2+1}$.

Lời giải

a. $\lim\frac{n+1}{n^2-2}=\lim\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}=0$.

b. $\lim\frac{n(n+1)}{(n+4)^3}=\lim\frac{n^2+n}{(n+4)^3}=\lim\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}=0$.

c. $\lim\frac{3n^3-2n+5}{2n^2+5n-3}=\lim\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{2}$.

d. $\lim\frac{2n^3}{n^4+3n^2+1}=\lim\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=0$.

Câu 23. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$. b. $\lim\frac{1+3^n}{4+3^n}$. c. $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$. d. $\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Lời giải

a. $\lim\frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}=\lim\frac{\frac{3^n}{5^n}-\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}-1}=-1$.

b. $\lim\frac{1+3^n}{4+3^n}=\lim\frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{4}{3^n}+1}=1$.

c. $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\frac{4.\frac{3^n}{7^n}+7}{2.\frac{5^n}{7^n}+1}=7$.

d. $\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim\frac{4.\frac{4^n}{8^n}+36.\frac{6^n}{8^n}}{\frac{5^n}{8^n}+1}=0$.

Câu 24. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}$. b. $\lim \dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}$.

Lời giải

a. Ta có: $\left|\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}\right| \le \dfrac{2}{n}$ mà $\lim \dfrac{2}{n}=0 \Rightarrow \lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}=0$.

b. Ta có: $\left|\dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}\right| \le \dfrac{2}{n^2}$ mà $\lim \dfrac{2}{n^2}=0 \Rightarrow \lim \dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}=0$.

Câu 25. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{n\sqrt{n}-1}{n+n\sqrt{n}}$. b. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2}+2}{n+\sqrt{n}}$. c. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}}{\sqrt{n^2-4n+5}}$.

Lời giải

a. $\lim \dfrac{n\sqrt{n}-1}{n+n\sqrt{n}}=\lim \dfrac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+n^{\frac{3}{2}}}=\lim \dfrac{1-\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+1}=1$.

b. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2}+2}{n+\sqrt{n}}=\lim \dfrac{n^{\frac{2}{3}}+2}{n+n^{\frac{1}{2}}}=\lim \dfrac{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=0$.

c. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}}{\sqrt{n^2-4n+5}}=\lim \dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^3}}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}}=1$.

Câu 26. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \sqrt[3]{\dfrac{8n^2-3n}{n^2}}$. b. $\lim \dfrac{2n^2-3n-1}{-n^2+2}$.

c. $\lim\left(n-1-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Lời giải

a. $\lim \sqrt[3]{\dfrac{8n^2-3n}{n^2}}=\lim \sqrt[3]{8-\dfrac{3}{n}}=\sqrt[3]{8}=2$.

b. $\lim \dfrac{2n^2-3n-1}{-n^2+2}=\lim \dfrac{2-\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{-1+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{2}{-1}=-2$.

c. $\lim\left(n-1-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim \dfrac{-2n}{n-1+\sqrt{n^2+1}}=\lim \dfrac{-2}{1-\dfrac{1}{n}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=-1$.

Câu 27. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{2n^3+2n-1}{3n^3-n+3}$. b. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{4n^2+1}+n-1}$.

c. $\lim\dfrac{4+2^n+3^{n+2}}{(-2)^{n+1}+5.3^n}$. d. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$.

Lời giải

a. $\lim\dfrac{2n^3+2n-1}{3n^3-n+3}=\lim\dfrac{2+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{3-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{2}{3}$.

b. $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{4n^2+1}+n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+n}{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}+n-1}=\lim\dfrac{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}{n\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+1-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{2}{3}$.

c. $\lim\dfrac{4+2^n+3^{n+2}}{(-2)^{n+1}+5.3^n}=\lim\dfrac{4+2^n+9.3^n}{-2.(-2)^n+5.3^n}=\lim\dfrac{4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+9}{-2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+5}=\dfrac{9}{5}$.

d. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}-n}=\lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=1$.

Câu 28. Tìm các giới hạn sau:

a. $u_n=\dfrac{2n^5-7n^2-3}{n-3n^5}$. b. $u_n=\dfrac{2n^2-n+4}{\sqrt{2n^4-n^2+1}}$. c. $u_n=\dfrac{7.2^n+4^n}{2.3^n+4^n}$.

Lời giải

a. $\lim u_n=\lim\dfrac{2n^5-7n^2-3}{n-3n^5}=\lim\dfrac{2-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{3}{n^5}}{\dfrac{1}{n^4}-3}=-\dfrac{2}{3}$.

b. $\lim u_n=\lim\dfrac{2n^2-n+4}{\sqrt{2n^4-n^2+1}}=\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}}=\sqrt{2}$.

c. $\lim u_n=\lim\dfrac{7.2^n+4^n}{2.3^n+4^n}=\lim\dfrac{7.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}{2.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}=1$.

Câu 29. Tìm các giới hạn sau:

a. $u_n=\dfrac{n^3-n^2\sin 3n-1}{2n^4-n^2+7}$. b. $u_n=\dfrac{5.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$. c. $u_n=\sqrt{\dfrac{n^6+3n^3-3}{2n^6+n^5+2}}$.

Lời giải

a. Ta có: $\lim u_n=\lim\dfrac{n^3-n^2\sin 3n-1}{2n^4-n^2+7}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\sin 3n-\dfrac{1}{n^4}}{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{7}{n^4}}=0$.

b. Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{5.2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim \dfrac{5.2^n - 3^n}{2.2^n + 3.3^n} = \lim \dfrac{5.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1}{2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3} = -\dfrac{1}{3}$.

c. Ta có: $\lim u_n = \lim \sqrt{\dfrac{n^6 + 3n^3 - 3}{2n^6 + n^5 + 2}} = \lim \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{3}{n^6}}{2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^6}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 30. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}\right)$

c) $\lim\left(3n - \sqrt{9n^2+1}\right)$ **d)** $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n} - n\right)$

Lời giải

a) $$\lim\left(\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n\right) = \lim \frac{4n^2 + 5n - 4n^2}{\sqrt{4n^2+5n} + 2n} = \lim \frac{5n}{\sqrt{4n^2+5n} + 2n} = \lim \frac{5}{\sqrt{4 + \frac{5}{n}} + 2} = \frac{5}{4}$$

b) $$\lim\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + 1} = +\infty$$

c) $$\lim\left(3n - \sqrt{9n^2+1}\right) = \lim \frac{9n^2 - 9n^2 - 1}{3n + \sqrt{9n^2+1}} = \lim \frac{-1}{3n + \sqrt{9n^2+1}} = 0$$

d) $$\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n} - n\right) = \lim \frac{n^3 - 2n - n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3 - 2n\right)^2} + n\sqrt[3]{n^3 - 2n} + n^2}$$

$$= \lim \frac{-2n}{\sqrt[3]{\left(n^3 - 2n\right)^2} + n\sqrt[3]{n^3 - 2n} + n^2} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n^2}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Câu 31. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(n - \sqrt{n^2 + 2n - 3}\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n + 1\right)$

Lời giải

a)
$$\lim\left(n-\sqrt{n^2+2n-3}\right)=\lim\frac{n^2-n^2-2n+3}{n+\sqrt{n^2+2n-3}}=\lim\frac{-2n+3}{n+\sqrt{n^2+2n-3}}=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}}=-1$$

b)
$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n+1\right)=\lim\frac{n^2+2n-1-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n-1}=\lim\frac{4n-2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n-1}$$

$$=\lim\frac{4-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}=\frac{4}{1+1}=2$$

Câu 32. Tìm giới hạn: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+2n}-n+1}{\sqrt{9n^2+n}-2n}$

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{4n^2+2n}-n+1}{\sqrt{9n^2+n}-2n}=\lim\frac{\left[4n^2+2n-(n-1)^2\right]\left(\sqrt{9n^2+n}+2n\right)}{\left(9n^2+n-4n^2\right)\left(\sqrt{4n^2+2n}+n-1\right)}$$

$$=\lim\frac{\left[3n^2+4n-1\right]\left(\sqrt{9n^2+n}+2n\right)}{\left(5n^2+n\right)\left(\sqrt{4n^2+2n}+n-1\right)}=\lim\frac{\left(3-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}+2\right)}{\left(5+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{4+\frac{2}{n}}+1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{3.5}{5.3}=1$$

Câu 33. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(3n-5-\sqrt{9n^2+1}\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-\sqrt{4n^2-n+5}\right)$

Lời giải

a)
$$\lim\left(3n-5-\sqrt{9n^2+1}\right)=\lim\frac{(3n-5)^2-(9n^2+1)}{3n-5+\sqrt{9n^2+1}}=\lim\frac{-30n+24}{3n-5+\sqrt{9n^2+1}}=\lim\frac{-30+\frac{24}{n}}{3-\frac{5}{n}+\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}=-5$$

b)
$$\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-\sqrt{4n^2-n+5}\right)=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-2n+2n\sqrt{4n^2-n+5}\right)$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{(8n^3+1)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+1}+4n^2}+\lim\frac{n-5}{2n+\sqrt{4n^2-n+5}}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{(8n^3+1)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+1}+4n^2}+\lim\frac{1-\frac{5}{n}}{2+\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}$$

$$=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Câu 34. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$ b) $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$

Lời giải

a) $$\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$

$$=\lim\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=1$$

b) $$\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\lim\frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=0$$

Câu 35. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$ b) $\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$ c) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

Lời giải

a) $$\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim\frac{n^2+1-n^2+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=\lim\frac{3}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=0$$

b) $$\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}=\lim\frac{2n^2+2}{n\left(\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}=\lim\frac{2+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

c) $$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}$$

Câu 36. Tìm giới hạn

a. $\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]$

b. $\lim\left[1-0{,}1+0{,}1^2-0{,}1^3+\cdots+(-1)^n.0{,}1^n\right]$

Lời giải

a. $\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]=\lim\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2$

b. $\lim\left[1-0,1+0,1^2-0,1^3+\cdots+(-1)^n.0,1^n\right]$

$=\lim\left[1+(-0,1).\frac{1-(-0,1)^n}{1+0,1}\right]=1+(-0,1).\frac{1}{1,1}=10/11$

Câu 37. Tìm giới hạn

a. $\lim\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$, b. $\lim\frac{n\sqrt{2+4+\cdots+2n}}{3n^2+n-2}$. c. $\lim\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+3n}$.

Lời giải

a. $\lim\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

b. $\lim\frac{n\sqrt{2+4+\cdots+2n}}{3n^2+n-2}=\lim\frac{n\sqrt{n(n+1)}}{3n^2+n-2}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}$.

c. $\lim\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+3n}=\lim\frac{n(n+1)}{2(n^2+3n)}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{6}{n}}=\frac{1}{2}$.

Câu 38. Tìm giới hạn

a. $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}\right]$.

b. $\lim\left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{(n+1)}}\right]$.

Lời giải

a. $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}\right]=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

$=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

b. $\lim\left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{(n+1)}}\right]$

$=\lim\left[\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2.1}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3.2}+\cdots+\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1).n}\right]$

$=\lim\left[\sqrt{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=\lim\left[1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=1$

Câu 39. Tìm giới hạn

a. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}}$

b. $\lim \frac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}$

c. $\lim \frac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}$.

d. $\lim \frac{n(n+1)}{(n+4)^3}$.

Lời giải

a. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}}=\lim \frac{\frac{\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n^2}}{\frac{n\sqrt{n^2+1}}{n^2}}=\lim \frac{\sqrt[3]{\frac{n^3+1}{n^6}}+\sqrt{\frac{n}{n^2}}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}}=0$

b. $\lim \frac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}=\lim \frac{\sqrt{3-\frac{4}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\lim \frac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}=\lim \frac{\sqrt[3]{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt{4-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

d. $\lim \frac{n(n+1)}{(n+4)^3}=\lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}=0$.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1=-5 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n} \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Đặt $v_n=u_n-1$ ta có $0<v_{n+1}\le\frac{1}{2}v_n$ với mọi n.

Do đó $v_2\le\frac{1}{2}v_1, v_3\le\frac{1}{2}v_2\le\frac{1}{4}v_1$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $0<v_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}v_1=9.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Vì $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ nên từ đó suy ra $\lim v_n=0$.

Vậy $\lim u_n=1$

Câu 41. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1=-1 \\ u_{n+1}=u_n+3, \forall n\in N, n\ge 1 \end{cases}$

Tính $\lim \frac{u_n}{5n+2020}$.

Lời giải

Ta có (u_n) là cấp số cộng có $u_1=-1, d=3$, $u_n=u_1+(n-1)d=-1+(n-1)3=3n-4$.

$$\Rightarrow \lim \frac{u_n}{5n+2020} = \lim \frac{3n-4}{5n+2020} = \lim \frac{3-\frac{4}{n}}{5+\frac{2020}{n}} = \frac{3}{5}$$

Câu 42. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Đặt $u_n = v_n + 3\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, thì $v_1 = u_1 - 3 = -2$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} + 3 = \frac{1}{2}(v_n + 3) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (v_n) là một cấp số nhân với

Khi đó

$v_1 = -2; q = \frac{1}{2}$, suy ra $v_n = -2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \Rightarrow u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Câu 43. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n + 2}{n};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn $\lim \frac{u_n}{n^2}$.

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n + 2}{n} \Leftrightarrow nu_{n+1} = (n+2)u_n + 2\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $u_n = v_n - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $v_1 = 1 + 1 = 2$ và

$nu_{n+1} = (n+2)u_n + 2 \Leftrightarrow nv_{n+1} = (n+2)v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{v_n}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{v_n}{n(n+1)} = \frac{v_1}{2} = 1$

$\Rightarrow v_n = n(n+1) \Rightarrow u_n = n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$

Vậy $\lim \frac{u_n}{n^2} = \lim \frac{n^2+n-1}{n^2} = 1$

Câu 44. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 2n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + \ldots + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + \ldots + \sqrt{u_{2^{2018} n}}}$.

Lời giải

Đặt $u_n = v_n + n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $v_1 = u_1 - 1 = 0$.

Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} + (n+1)^2 = v_n + n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow v_n = v_1 = 0 \Rightarrow u_n = n^2$.

Do đó $\lim\dfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+...+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+...+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\lim\dfrac{n+4n+4^2n+\cdots+4^{2018}n}{n+2n+2^2n+\cdots+2^{2018}n}$

$=\dfrac{1+4+4^2+...+4^{2018}}{1+2+2^2+...+2^{2018}}=\dfrac{\dfrac{1-4^{2019}}{1-4}}{\dfrac{1-2^{2019}}{1-2}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4^{2019}-1}{2^{2019}-1}=\dfrac{2^{2019}+1}{3}$.

Câu 45. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{2^n};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Tính $\lim(u_n-2)$

Lời giải

Ta có : $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+...+(u_2-u_1)+u_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+...+\dfrac{1}{2}+1$.

Dãy $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2},...,\dfrac{1}{2},1$ là một cấp số nhân có n số hạng với số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$ nên

$u_n=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.Vậy $\lim(u_n-2)=\lim\left[-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=0.$

Câu 46. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n+3.2^{n+1};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Tính $\lim\dfrac{u_n}{(2n+1)2^{n-1}}$

Lời giải

Ta có $u_{n+1}=2u_n+3.2^{n+1}\Leftrightarrow\dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{u_n}{2^n}+3;\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n=\dfrac{u_n}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì ta được dãy (v_n) thỏa mãn $v_1=1;v_{n+1}=v_n+3;\forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra dãy (v_n) là CSC

$\Rightarrow v_n=1+(n-1)3=3n-2\Rightarrow u_n=(3n-2)2^n$

$\lim\dfrac{u_n}{(2n+1)2^{n-1}}=\lim\dfrac{(3n-2)2^n}{(2n+1)2^{n-1}}=\lim\dfrac{(3n-2)2}{(2n+1)}=3$

Câu 47. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=\dfrac{2}{3}\\u_{n+1}=\dfrac{2nu_n}{n+3};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

. Tính $L=\lim\left(\dfrac{u_1}{2}+\dfrac{u_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{u_n}{2^n}\right)$

Lời giải

Ta có $u_{n+1}=\frac{2nu_n}{n+3}\Leftrightarrow (n+1)(n+2)(n+3)u_{n+1}=2n(n+1)(n+2)u_n;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Đặt $v_n=n(n+1)(n+2)u_n$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn $v_1=4; v_{n+1}=2v_n;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy (v_n) là một cấp số nhân, $v_n=4.2^{n-1}=2^{n+1}$. Vậy $u_n=\frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$.

Từ đó $\frac{u_n}{2^n}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

$L=\lim\left(\frac{u_1}{2}+\frac{u_2}{2^2}+\cdots+\frac{u_n}{2^n}\right)=\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

Câu 48. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n};\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta có: $u_1=2; u_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{2+1}{2}$; $u_3=\frac{3+1}{3}; u_4=\frac{4+1}{4}$.

Từ đó dự đoán $u_n=\frac{n+1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\quad (*)$

Chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp :

Với $n=1\to u_1=2$ (đúng).

Gỉa sử (*) đúng với $n=k\,(k\geq 1)$ nghĩa là $u_k=\frac{k+1}{k}$

Ta chứng minh (*) đúng khi $n=k+1$ .Nghĩa là ta phải chứng mính : $u_{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$

Thật vậy theo bài ra và giả thiết quy nap ta có $u_{k+1}=2-\frac{1}{u_k}=2-\frac{1}{\frac{k+1}{k}}=\frac{k+2}{k+1}$ đúng , nghĩa là (*)cũng đúng với $n=k+1$.

Vậy $u_n=\frac{n+1}{n};\ \forall n\in N^*$. Ta có $\lim u_n=\lim\frac{n+1}{n}=1$. Vậy $\lim u_n=1$.

Câu 49. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1=1; u_2=2 \\ u_{n+2}=\frac{2u_nu_{n+1}}{u_n+u_{n+1}};\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+2}=\dfrac{2u_nu_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}\right);\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ thì $v_1=1;v_2=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $\dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}\right)\Leftrightarrow v_{n+2}=\dfrac{1}{2}(v_{n+1}+v_n)\Leftrightarrow v_{n+2}+\dfrac{1}{2}v_{n+1}=v_{n+1}+\dfrac{1}{2}v_n;\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow v_{n+1}+\dfrac{1}{2}v_n=v_2+\dfrac{1}{2}v_1=1\Rightarrow v_{n+1}=-\dfrac{1}{2}v_n+1;\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow v_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow u_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{3}{2}$

Câu 50. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=2019\\ u_{n+1}=\dfrac{3}{u_n+2};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Giải sử dãy (u_n) có giới hạn L, giải phương trình $L=\dfrac{3}{L+2}$ ta được nghiệm dương $L=1$.

Ta chứng minh $\lim u_n=1$.

Thật vậy ta có $|u_n-1|=\left|\dfrac{3}{u_{n-1}+2}-1\right|=\dfrac{|u_{n-1}-1|}{|u_{n-1}+2|}<\dfrac{1}{2}|u_{n-1}-1|\Rightarrow |u_n-1|<\dfrac{1}{2^{n-1}}|u_1-1|=1009\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow 0\le|u_n-1|<1009\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Vì $\lim 1009\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ nên $\lim u_n=1$.

Câu 51. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\sqrt{3-\sqrt{3+u_n}};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Giải sử dãy (u_n) có giới hạn L, giải phương trình $L=\sqrt{3-\sqrt{3+L}}$ ta được nghiệm $L=1$.

Ta chứng minh $\lim u_n=1$.

Thật vậy ta có $|u_n-1|=\left|\sqrt{3-\sqrt{3+u_{n-1}}}-1\right|=\dfrac{\left|2-\sqrt{3+u_{n-1}}\right|}{\left|\sqrt{3-\sqrt{3+u_{n-1}}}+1\right|}=\dfrac{|u_{n-1}-1|}{\left|\sqrt{3-\sqrt{3+u_{n-1}}}+1\right|\left|2+\sqrt{3+u_{n-1}}\right|}<\dfrac{1}{2}|u_{n-1}-1|$

$\Rightarrow |u_n-1|<\dfrac{1}{2^{n-1}}|u_1-1|=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $\Rightarrow 0\le|u_n-1|<\dfrac{1}{2^{n-1}}$

Vì $\lim \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ nên $\lim u_n = 1$.

Câu 52. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{3}u_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta chứng minh $0 < u_n \le \frac{1}{2};\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (1)$ bằng quy nạp.

Ta có $u_1 = \frac{1}{2}$ nên (1) đúng.

Giả sử $0 < u_n \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n^2 + \frac{1}{3}u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{5}{12} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2}$

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ta có $0 < u_n \le \frac{1}{2};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{3} \le \frac{5}{6} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \le \frac{5}{6}u_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n \le \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} u_1$

Vì $\lim \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} u_1 = 0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp suy ra $\lim u_n = 0$

Câu 53. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+1} - 1 = \sqrt[3]{u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt[3]{u_n^2} + \sqrt[3]{u_n} + 1} < \frac{u_n - 1}{3};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(u_1 - 1);\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(u_1 - 1) = 0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp suy ra $\lim (u_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim u_n = 1$

Câu 54. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta chứng minh quy nạp được $1 \le u_n < 3;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $u_{n+1}-u_n=\sqrt{6+u_n}-u_n=\dfrac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n}>0;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (vì $6+u_n-u_n^2>0,\ \forall u_n\in[1;3)$). Suy ra dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn. Đặt $\lim u_n=L,(0\le L\le 3)$, giải phương trình $L=\sqrt{6+L}$ ta được $L=3$. Vậy $\lim u_n=3.$

Câu 55. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3};\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tính $\lim u_n$.

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh (u_n) là dãy số bị chặn trên bởi 2 bằng phương quy nạp

Thật vậy ta có $u_1=1<2$. Giả sử $u_n<2$ thì $u_{n+1}-2=\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}-2=\dfrac{2u_n-4}{u_n+3}<0\Rightarrow u_{n+1}<2$ nên $u_n<2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Ta chứng minh dãy (u_n) tăng .

Thật vậy $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}-u_n=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+3}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*(\text{Vì }0<u_n<2)$

Dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n=L\quad(0\le L\le 2)$, giải phương trình $L=\dfrac{2(2L+1)}{L+3}$ ta được nghiệm dương $L=2$

Vậy $\lim u_n=2$.

Câu 56. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1=2019 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^3+12u_n}{3u_n^2+4},\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta có $u_{n+1}-2=\dfrac{(u_n-2)^3}{3u_n^2+4}$ .Vì $u_1-2>0$ suy ra $u_n-2>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n(4-u_n^2)}{3u_n^2+4}<0$. Dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n=L,(L\ge 2)$, giải phương trình $L=\dfrac{L^3+12L}{3L^2+4}$ ta được $L=2$. Vậy $\lim u_n=2.$

Dạng 3: Dãy số có giới hạn vô hạn

Câu 57. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Một loại vi khuẩn được nuôi cấy với số lượng ban đầu là 50. Sau mỗi chu kì 4 giờ, số lượng của chúng sẽ tăng gấp đôi.

a) Dự đoán công thức tính số vi khuẩn u_n sau chu kì thứ n.
b) Sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10000 ?

Lời giải

a) Ta có số lượng ban đầu của vi khuẩn là $u_0 = 50$.

Sau chu kì thứ nhất, số lượng vi khuẩn là $u_1 = 2u_0 = 2.50$.

Sau chu kì thứ hai, số lượng vi khuẩn là $u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2^2 \cdot 50$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta dự đoán được sau chu kì thứ n, số lượng vi khuẩn là $u_n = 2^n.50$.

b) Giả sử sau chu kì thứ k, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10000.

Khi đó ta có $u_k = 2^k.50 > 10000 \Leftrightarrow 2^k > 200$.

Câu 58. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(n - \sqrt{n})$.

Lời giải

Ta có: $n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n - \sqrt{n}) = +\infty$.

Câu 59. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1}$;

b) $v_n = \sqrt{2n^2+1} - n$.

Lời giải

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1}$

Chia cả tử và mẫu của u_n cho n^2, ta được $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1} = \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$.

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 > 0, \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 0$ và $\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2} > 0$ với mọi n nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{2n-1} = +\infty$.

b) $v_n = \sqrt{2n^2+1} - n$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n^2+1} - n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} - n\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}} - n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}} - 1\right)\right]$

vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}} - 1\right) = \sqrt{2} - 1 > 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}} - 1\right)\right] = +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)=+\infty$.

Câu 60. Tìm giới hạn

a. $\lim\left(n^3+n^2+n+1\right)$

b. $\lim\left(-n^2+n\sqrt{n}-1\right)$

c. $\lim\left(n-\sin 2n\right)$

d. $\lim\dfrac{1}{n+\cos^2 n}$

Lời giải

a. $\lim\left(n^3+n^2+n+1\right)=\lim n^3.\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)=+\infty$.

b. $\lim\left(-n^2+n\sqrt{n}-1\right)=\lim n^2.\left(-1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n^2}\right)=-\infty$.

c. Ta có: $\left(n-\sin 2n\right)\ge n-1$ mà $\lim\left(n-1\right)=+\infty \Rightarrow \lim\left(n-\sin 2n\right)=+\infty$.

d. $\lim\dfrac{1}{n+\cos^2 n}=0$

Câu 61. Tìm giới hạn

a. $\lim\left(\sqrt[3]{1+2n-n^3}-n\right)$

b. $\lim\left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)$

Lời giải

a. $\lim\left(\sqrt[3]{1+2n-n^3}-n\right)=\lim\left[\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^2}-1\right)}-n\right]=\lim\left(-2n\right)=-\infty$

b. $\lim\left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim\left(n+n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)=\lim 2n=+\infty$

Câu 62. Tìm giới hạn

a. $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$

b. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$

c. $\lim\dfrac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^2+2}+n^3}{n^2+n\sqrt{n}-12}$

d. $\lim\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2}$

Lời giải

a. $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}=\lim\dfrac{n^2+n-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^3}}=\lim\dfrac{n^2+n}{4}=+\infty$.

b. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{8}{n^3}}}{1+\dfrac{12}{n}}=+\infty$.

c. $\lim\dfrac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^2+2}+n^3}{n^2+n\sqrt{n}-12}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt[3]{\dfrac{n^2+2}{n^6}}+n}{1+\dfrac{1}{\perp n}-12/n^2}=+\infty$.

d. $\lim \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = \lim \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = \frac{1}{4}\lim \frac{n^2(n+1)^2}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = +\infty$.

Câu 63. Tìm giới hạn

a. $\lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{2^{n+3}+3^n}$ b. $\lim \sqrt{2^n - n + 1}$ c. $\lim\left(4^n + 2.3^n - 3.2^n - 1\right)$

Lời giải

a. $\lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{2^{n+3}+3^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}{8.\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = -\infty$.

b. $\lim \sqrt{2^n - n + 1} = \lim \sqrt{2^n\left(1 - \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)} = +\infty$.

c. $\lim\left(4^n + 2.3^n - 3.2^n - 1\right) = \lim 4^n\left[1 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 3\left(\frac{2}{4}\right)^n - \frac{1}{4^n}\right] = +\infty$

Câu 64. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n = -n^4 - 50n + 11$ b. $u_n = \sqrt[3]{7n^2 - n^3}$

c. $u_n = \sqrt{5n^2 - 3n + 7}$ d. $u_n = \sqrt{2n^3 + n^2 - 2}$

Lời giải

a. $-\infty$

b. $-\infty$.

c. $+\infty$.

d. $u_n = \sqrt{2n^3 + n^2 - 2} = n\sqrt{n}\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}}$

$\lim\left(n\sqrt{n}\right) = +\infty; \lim \sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \lim(u_n) = +\infty$

Câu 65. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n = \frac{3n - n^3}{2n + 15}$. b. $u_n = \frac{\sqrt{2n^4 - n^2 + 7}}{4n + 5}$.

c. $u_n = \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$. d. $u_n = \frac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3 + 7n^2 - 5}}$.

Lời giải

a. $-\infty$.

b. $+\infty$

c. $+\infty$.

d. $u_n = \dfrac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3+7n^2-5}} = \dfrac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{7}{n^4}-\frac{5}{n^6}}}$

$\lim\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}-3\right) = -6 < 0; \lim\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{7}{n^4}-\dfrac{5}{n^6}} = 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$

Câu 66. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(1,001)^n$

b. $\lim\left(3.2^n - 5^{n+1} + 10\right)$.

c. $\lim\dfrac{3^n - 11}{1+7.2^n}$

d. $\lim\dfrac{2^{n+1} - 2.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n}$.

Lời giải

a. $+\infty$.

b. $3.2^n - 5^{n+1} + 10 = 5^n.\left[3.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 5 + \dfrac{10}{5^n}\right]$.

$\lim 5^n = +\infty; \lim\left[3.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 5 + \dfrac{10}{5^n}\right] = -5 < 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$.

c. $+\infty$.

d. $\dfrac{2^{n+1} - 2.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n} = \dfrac{2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 + \frac{3}{5^n}}{3.\left(\frac{2}{5}\right)^n + 7.\left(\frac{4}{5}\right)^n}$.

$\lim\left[2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 3 + \dfrac{3}{5^n}\right] = -3 < 0; \lim\left[3.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 7.\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right] = 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$

Câu 67. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Lời giải

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ là số nhỏ nhất trong n số $1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \cdots; \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Do đó: $u_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = n.\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Và $\lim\sqrt{n} = +\infty$ nên từ đó suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Câu 68. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\dfrac{2n - 3^n}{n+2^n}$

b. $\lim\left(100n - 7 - 2^n\right)$

Lời giải

a. $u_n = \dfrac{2n - 3^n}{n+2^n} = \dfrac{\frac{2n}{3^n} - 1}{\frac{n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

$$\lim\frac{n}{3^n}=0\Rightarrow \lim\left[\frac{n}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=0;\lim\left(\frac{2n}{3^n}-1\right)=-1\Rightarrow \lim u_n=-\infty$$

b. $-\infty$

Câu 69. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}$ b. $u_n=\dfrac{13.3^n-5n}{3.2^n+5.4^n}$

Lời giải

a. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}=\dfrac{2.\left(\frac{2}{3}\right)^n-1+\frac{11}{3^n}}{9+8.\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{4}{3^n}}$

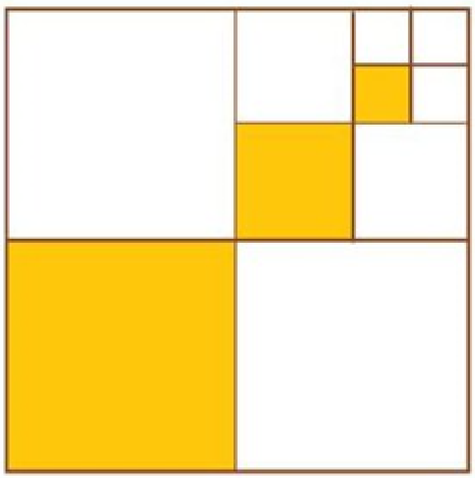
$$\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0;\lim\frac{1}{3^n}=0\Rightarrow \lim u_n=-\frac{1}{9}$$

b. $u_n=\dfrac{13.3^n-5n}{3.2^n+5.4^n}=\dfrac{13.\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{5n}{4^n}}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n+5}$

$$\lim\frac{5n}{4^n}=5\lim\frac{n}{4^n}=5.0=0;\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n=0;\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow \lim u_n=0$$

Dạng 4. Tính tổng của dãy số

Câu 70. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái $(H.5.2)$.



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

b) Tìm $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Lời giải

a) Ta có: u_1 là độ dài cạnh của hình vuông được tô màu tạo từ việc chia hình vuông cạnh 1 thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau, do đó $u_1=\frac{1}{2}$.

Cứ tiếp tục như thế, ta được: $u_2=\frac{1}{2}u_1, u_3=\frac{1}{2}u_2, \cdots, u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}, \cdots$

Do vậy, độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{2}$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng của n số hạng đầu là $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Ta có: $S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\lim_{n\to+\infty}1-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-0=1$.

Câu 71. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Tính tổng $S=2+\frac{2}{7}+\frac{2}{49}+\cdots+\frac{2}{7^{n-1}}+\cdots$

Lời giải

$S=2+\frac{2}{7}+\frac{2}{49}+\cdots+\frac{2}{7^{n-1}}+\cdots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với u $u_1=2$ và $q=\frac{1}{7}$.

Do đó, $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{2}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{3}$.

Câu 72. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** (Giải thích nghịch lí Zeno)

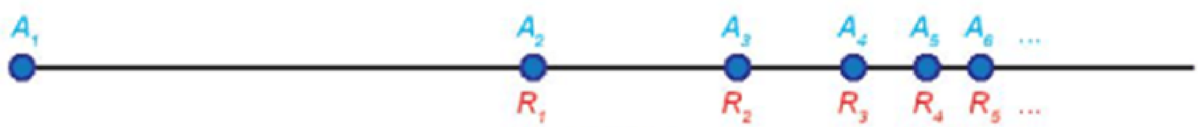
Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$ và khoảng cách ban đầu $a=100(km)$.

a) Tính thời gian $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2, từ A_2 đến $A_3, \cdots$, từ A_n đến $A_{n+1}, \cdots$

b) Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_{n+1}$,..., tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.

c) Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

Lời giải



Ta có: Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$.

a) Để chạy hết quãng đường từ A_1 đến A_2 với $A_1A_2=a=100(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_1=\frac{100}{100}=1(h)$. Với thời gian t_1 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_2A_3=1(km)$.

Để chạy hết quãng đường từ A_2 đến A_3 với $A_2A_3=1(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_2=\frac{1}{100}(h)$. Với thời gian t_2 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_3A_4=\frac{1}{100}(km)$.

Tiếp tục như vậy, để chạy hết quãng đường từ A_n đến A_n+1 với $A_nA_n+1=\frac{1}{100^{n-2}}(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_n=\frac{1}{100^{n-1}}(h)$..

b) Tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_n+1, \cdots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa là

$$T=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots+\frac{1}{100^{n-1}}+\frac{1}{100^n}+\cdots(h)$$

Đó là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1$, công bội, nên ta có

$$T=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{100}{99}=1\frac{1}{99}(h)$$

Như vậy, Achilles đuổi kịp rùa sau $1\frac{1}{99}$ giờ.

c) Nghịch lý Zeno chỉ đúng với điều kiện là tổng thời gian Achilles chạy hết các quãng đường để đuổi kịp rùa phải là vô hạn, còn nếu nó hữu hạn thì đó chính là khoảng thời gian mà anh bắt kịp được rùa.

Câu 73. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) $1,(12)=1,121212\cdots$

b) $3,(102)=3,102102102\cdots$

Lời giải

a) Ta có: $1,(12)=1,121212\cdots=1+0,12+0,0012+0,000012+\cdots$

$=1+12\cdot10^{-2}+12\cdot10^{-4}+12\cdot10^{-6}+\cdots$

$=1+12\cdot\left(10^{-2}+10^{-4}+10^{-6}+\cdots\right)$

Do $10^{-2}+10^{-4}+10^{-6}+\cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=10^{-2}$ và $q=10^{-2}$ nên

$$10^{-2}+10^{-4}+10^{-6}+\cdots=\frac{10^{-2}}{1-10^{-2}}=\frac{1}{99}$$

Vậy $1,(12)=1+12\cdot\frac{1}{99}=\frac{33}{33}+\frac{4}{33}=\frac{37}{33}$.

b) Ta có: $3,(102)=3,102102102\cdots=3+0,102+0,000102+0,000000102+\cdots$

$=3+102\cdot10^{-3}+102\cdot10^{-6}+102\cdot10^{-9}+\cdots$

$=3+102\cdot\left(10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}+\cdots\right)$

Do $10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}+\cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=10^{-3}$ và $q=10^{-3}$ nên

$$10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}+\cdots=\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}=\frac{1}{999}$$

Vậy $3,(102)=3+102\cdot\frac{1}{999}=3+\frac{34}{333}=\frac{1033}{333}$.

Câu 74. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150mg$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là $150mg$.
Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%.
Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là
$150+150\cdot 5\%=150(1+0,05)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là
$150+150(1+0,05)\cdot 5\%=150+150\left(0,05+0,05^2\right)=150\left(1+0,05+0,05^2\right)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là
$150+150\left(1+0,05+0,05^2\right)\cdot 5\%=150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3\right)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là
$150+150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3\right)\cdot 5\%=150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4\right)$

$=157,8946875(mg)$.

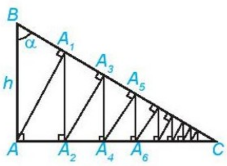
Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là
$S=150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4+\cdots\right)$

Lại có $1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4+\cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=0,05$.

Do đó, $1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4+\cdots=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{1-0,05}=\dfrac{20}{19}$.

Suy ra $S=150\cdot\dfrac{20}{19}=\dfrac{400}{361}$.

Câu 75. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB=h$ và góc B bằng α (H.5.3).



Hình 5.3

Từ A kẻ $AA_1\perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2\perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3\perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\cdots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.

Lời giải

Tam giác AA_1B vuông tại A_1 có $AB=h$ và.

Do đó, $AA_1=AB\sin B=h\sin\alpha$.

Ta có: $\hat{B}+\widehat{BAA_1}=90^\circ$ và $\widehat{A_1AA_2}+\widehat{BAA_1}=90^\circ$, suy ra $\widehat{A_1AA_2}=\hat{B}=\alpha$.

Tam giác AA_1A_2 vuông tại A_2 nên $A_1A_2=AA_1\sin\widehat{A_1AA_2}=h\sin\alpha\cdot\sin\alpha=h\sin^2\alpha$.

Vì $AB\perp AC$ và $A_1A_2\perp AC$ nên $AB//A_1A_2$, suy ra $\widehat{A_2A_1A_3}=\hat{B}=\alpha$ (2 góc đồng vị).

Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_3 nên $A_2A_3=A_1A_2\cdot\sin\widehat{A_2A_1A_3}=h\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha=h\sin^3 a$.

Tam giác $A_2A_3A_4$ vuông tại A_4 nên $A_3A_4=A_2A_3\cdot\sin\widehat{A_3A_2A_4}=h\sin^3\alpha\cdot\sin\alpha=h\sin^4\alpha$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta xác định được $A_{n-1}A_n=h\sin^n\alpha$.

Ta có: $AA_1A_2A_3\cdots=AA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+\cdots$

$= h\sin\alpha + h\sin^2\alpha + h\sin^3\alpha + \cdots + h\sin^n\alpha + \cdots$

Vì góc B là góc nhọn nên $\sin B = \sin\alpha < 1$, do đó $|\sin\alpha| < 1$.

Khi đó, độ dài của đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = h\sin\alpha$ và công bội $q = \sin\alpha$.

Do đó, $AA_1A_2A_3\cdots = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Câu 76. Cho hình vuông cạnh bằng a. Người ta lấy bốn trung điểm các cạnh của hình vuông trên để được hình vuông nhỏ hơn nằm bên trong hình vuông bên ngoài. Quy trình làm như vậy diễn ra tới vô hạn. Tính diện tích tất cả hình vuông có trong bài toán.

Lời giải

Ta có hình vuông ngoài cùng có cạnh là a nên diện tích $S_1 = a^2$. Hình vuông thứ hai chỉ có cạnh là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên có diện tích là $S_2 = \dfrac{a^2}{2}$. Cứ tiếp tục như vậy ta có:

Hình vuông thứ ba có diện tích $S_3 = \dfrac{a^2}{4}$, hình vuông thứ tư có diện tích là $S_4 = \dfrac{a^2}{8}$…

Vì thế dãy số $S_1; S_2; S_3; \ldots$ lập thành cấp số nhân lùi vô hạn (S_n) có $\begin{cases} S_1 = a^2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ nên tổng diện tích các hình vuông có trong bài toán là $S = S_1 + S_2 + \ldots = a^2\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2a^2$.

Câu 77. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\dfrac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

Lời giải

Gọi u_1 là số hạng đầu, q là công bội và S là tổng của cấp số nhân đã cho. Khi đó $S = \dfrac{u_1}{1-q}$.

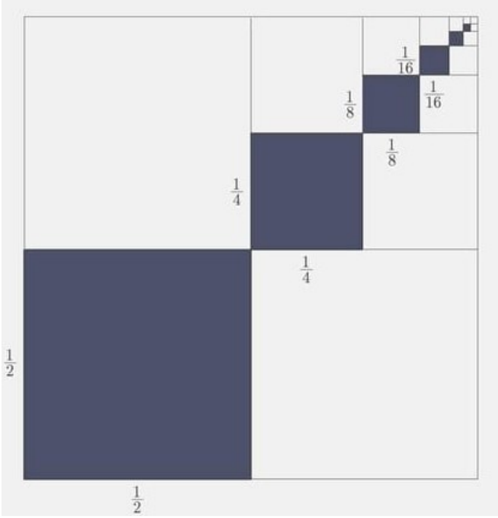
Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = 12 \\ u_1(1-q) = \dfrac{3}{4} \\ u_1 > 0 \end{cases}$.

Nhân 2 phương trình của hệ trên với nhau ta được $u_1^2 = 9$, mà $u_1 > 0 \Rightarrow u_1 = 3$.

Thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được $q = \dfrac{3}{4}$.

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = \dfrac{3}{4}$.

Câu 78. Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, 4, …n,… trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó.Giả sử quy trình tô màu của chuột Mickey có thể tiến ra vô hạn (như hình vẽ dưới đây). Tính tổng diện tích mà chuột Mickey phải tô màu.



Lời giải

Ta có cạnh của hình vuông thứ nhất là $\frac{1}{2}$ nên diện tích $S_1 = \frac{1}{4}$.

Cạnh hình vuông thứ hai là $\frac{1}{4}$ nên diện tích $S_2 = \frac{1}{16}$,…

Cứ tiếp tục như vậy thì ta có được $S_1; S_2; S_3; ...$ lập thành cấp số nhân lùi vô hạn có $S_1 = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{4}$ nên ta có tổng diện tích chuột Mickey cần tô màu là $S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ (đvdt).

Câu 79. Từ độ cao 63m của tháp nghiêng Pi-sa ở Italia, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó. Tính độ dài hành trình của quả bóng từ thời điểm ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất.

Lời giải

Ta thấy:

Ban đầu bóng cao 63m nên chạm đất lần 1 bóng di chuyển quãng đường $S_1 = 63(m)$.

Từ lúc chạm đất lần một đến chạm đất lần hai bóng di chuyển được quãng đường là $S_2 = 2S_1.\frac{1}{10} = 2.63.\frac{1}{10} = \frac{63}{5}$ (do độ cao lần hai bằng $\frac{1}{10}$ độ cao ban đầu).

Từ lúc chạm đất lần hai đến chạm đất lần ba bóng di chuyển được quãng đường là $S_3 = S_2\frac{1}{10}$ (do độ cao lần ba bằng $\frac{1}{10}$ độ cao lần hai)... Cứ tiếp tục như vậy kéo dài ra vô tận thì ta có được tổng quãng đường mà bóng cao su đã di chuyển là

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = S_1 + S_2 + S_2.\frac{1}{10} + S_2.\left(\frac{1}{10}\right)^2 + ... = S_1 + S_2\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 63 + \frac{63}{5}.\frac{10}{9} = 77(m).$$

Vậy quãng đường di chuyển của bóng là $77m$.

Câu 80. Tính tổng $M=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{10}}$

Lời giải

Ta có

$$M=\frac{1}{5^{10}}+...+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}\Leftrightarrow M+1=\left(\frac{1}{5}\right)^{10}+...+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}+1$$

$$\Leftrightarrow (M+1)\left(\frac{1}{5}-1\right)=\left(\frac{1}{5}-1\right)\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{10}+...+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}+1\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{5}(M+1)=\left(\frac{1}{5}\right)^{11}-1\Leftrightarrow M+1=\frac{5.5^{10}-1}{4.5^{10}}\Leftrightarrow M=\frac{5^{10}-1}{4.5^{10}}=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right]$$

Câu 81. Cho tổng: $S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Tính S_{30}

Lời giải

Ta có $2S_n=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

Trong đó

$$\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3};\frac{2}{2.3.4}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4};\frac{2}{3.4.5}=\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5};$$

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Khi đó

$$2S_n=\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+...+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow S_n=\frac{n^2+3n}{2(n+1)(n+2)}$$

Vậy $S_{30}=\frac{30^2+3.30}{2.(30+1)(30+2)}=\frac{495}{992}$

Câu 82. Cho tổng $S_n=\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+...+\frac{5}{n(n+1)}$. Tính $S_4^2+S_6^2$

Lời giải

Ta có

$$S_n=\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+...+\frac{5}{n(n+1)}=5\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=5\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5n}{n+1}$$

Suy ra $S_4=4;S_6=\frac{30}{7}$. Vậy $S_4^2+S_6^2=16+\frac{900}{49}=\frac{1684}{49}$

Câu 83. Cho tổng: $S = \frac{9-1}{9} + \frac{9^2-1}{9^2} + \frac{9^3-1}{9^9} + ... + \frac{9^9-1}{9^9}$. Tính 8S

Lời giải

Ta có

$S = \frac{9-1}{9} + \frac{9^2-1}{9^2} + \frac{9^3-1}{9^3} + ... + \frac{9^9-1}{9^9} \Leftrightarrow S = 9 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + ... + \frac{1}{9^9}\right)$

$\Leftrightarrow S = 10 - \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + ... + \frac{1}{9^9}\right) \Leftrightarrow S = 10 - \frac{9^{10}-1}{8.9^9} = \frac{71.9^9+1}{8.9^9} \Rightarrow 8S = 71 + \frac{1}{9^9}$