

# BÀI 25. HAI MẶT PHẶNG VUÔNG GÓC

## CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

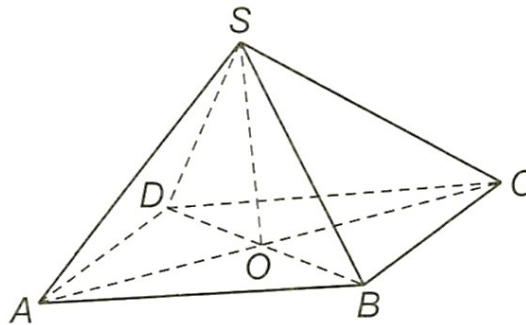
### PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

#### Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

**Câu 1.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là một hình chữ nhật có tâm  $O$ ,  $SO \perp (ABCD)$ . Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $ABCD$  là một hình vuông.

Lời giải

Gọi  $O$  là giao điểm  $AC$  và  $BD$ .

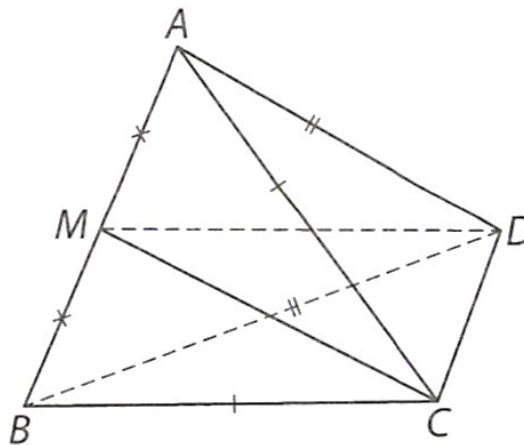


Hình 7.15

Vì  $AO \perp SO, BO \perp SO$  và  $SO = (SAC) \cap (SBD)$  nên góc giữa  $(SAC)$  và  $(SBD)$  bằng góc giữa  $AO$  và  $BO$ . Do đó:  $(SAC) \perp (SBD) \Leftrightarrow AO \perp BO \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ \Leftrightarrow ABCD$  là hình vuông.

**Câu 2.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = BC, AD = BD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh rằng  $(CDM) \perp (ABC)$  và  $(CDM) \perp (ABD)$ .

Lời giải



Hình 7.39

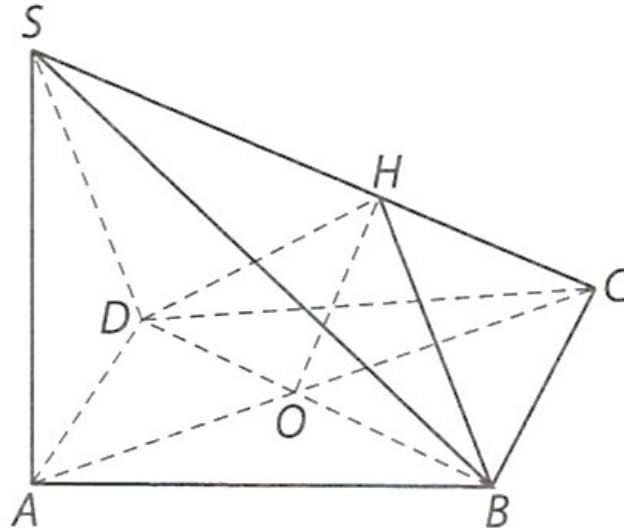
Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $AB \perp CM, AB \perp DM$ , suy ra  $AB \perp (CDM)$ .

Vì hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ABD)$  đều chứa đường thẳng  $AB$  nên  $(ABC) \perp (CDM), (ABD) \perp (CDM)$ .

**Câu 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$ , góc  $BAD$  bằng  $60^\circ$ . Kẻ  $OH$  vuông góc với  $SC$  tại  $H$ . Biết  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Chứng minh rằng:

- $(SBD) \perp (SAC)$ ;
- $(SBC) \perp (BDH)$ ;
- $(SBC) \perp (SCD)$ .

**Lời giải**



Hình 7.40

- Ta có  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA \perp BD$  mà  $BD \perp AC$ , do đó  $BD \perp (SAC)$ . Vì mặt phẳng  $(SBD)$  chứa  $BD$  nên  $(SBD) \perp (SAC)$ .
- Ta có  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp SC$  mà  $SC \perp OH$ , do đó  $SC \perp (BDH)$ . Vì mặt phẳng  $(SBC)$  chứa  $SC$  nên  $(SBC) \perp (BDH)$ .

c) Ta có:  $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ .

Vì  $\triangle CHO$  cs  $\triangle CAS$  nên  $\frac{HO}{AS} = \frac{CO}{CS}$ , suy ra  $HO = \frac{CO \cdot AS}{CS} = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$ .

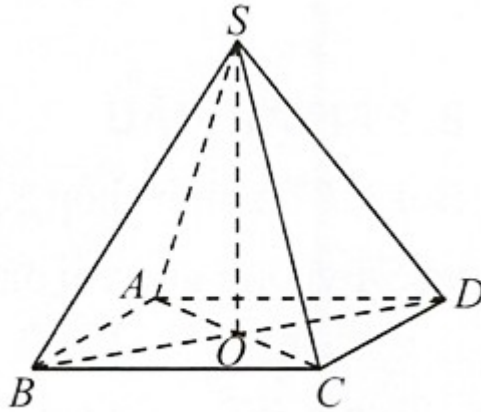
Do đó, tam giác  $BDH$  vuông tại  $H$ , suy ra  $\angle BHD = 90^\circ$ .

Ta lại có  $BH \perp SC, DH \perp SC$  nên  $(SBC) \perp (SCD)$ .

**Câu 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$ . Các tam giác  $SAC$  và  $SBD$  cân tại  $S$ . Chứng minh rằng:

- $SO \perp (ABCD)$ ;
- $(SAC) \perp (SBD)$ .

**Lời giải**



Hình 10

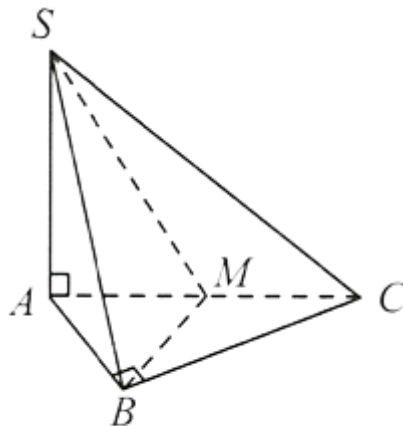
- a) Ta có các tam giác  $SAC$  và  $SBD$  cân tại  $S$  nên  $SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .  
 b) Ta có  $AC \perp SO$  (vì  $SO \perp (ABCD)$ ) và  $AC \perp BD$  (vì  $ABCD$  là hình thoi)  
 $\Rightarrow AC \perp (SBD)$ .

Vậy  $(SAC) \perp (SBD)$ .

**Câu 5.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  và  $SA \perp (ABC)$ .

- a) Chứng minh rằng  $(SBC) \perp (SAB)$ .  
 b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Chứng minh rằng  $(SBM) \perp (SAC)$ .

**Lời giải**



Hình 3

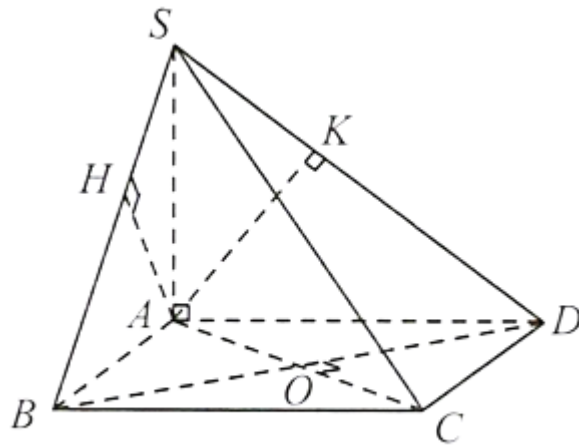
- a) Ta có:  $BC \perp AB$  (giả thiết),  
 $BC \perp SA$  (vì  $SA \perp (ABC)$ )  
 $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ .  
 b) Vì tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  nên  $BM \perp AC$ .  
 Mà  $BM \perp SA$  (vì  $SA \perp (ABC)$ ) suy ra  $BM \perp (SAC)$ .  
 Vậy  $(SBM) \perp (SAC)$ .

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ . Hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $SB$  và  $SD$ . Chứng minh rằng:

- a)  $(SBC) \perp (SAB)$ ;  
 b)  $(SCD) \perp (SAD)$ ;

- c)  $(SBD) \perp (SAC)$ ;  
 d)  $(SAC) \perp (AHK)$ .

**Lời giải**



Hình 4

- a) Ta có:  $(SAB) \perp (ABCD)$ ;  
 $(SAD) \perp (ABCD)$ ;  
 $(SAB) \cap (SAD) = SA$   
 $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Khi đó:  $BC \perp AB$  (giả thiết);  
 $BC \perp SA$  (vì  $SA \perp (ABCD)$ )  
 $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta được  $(SCD) \perp (SAD)$

- c) Ta có  $BD \perp AC$  (giả thiết)  
 $BD \perp SA$  (vì  $SA \perp (ABCD)$ )  
 $\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$ .

d) Ta có  $(SAB) \perp (SBC)$  (chứng minh trên)  
 $(SAB) \cap (SBC) = SB$ ;  
 $AH \perp SB$  (giả thiết)  
 $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ . (1)

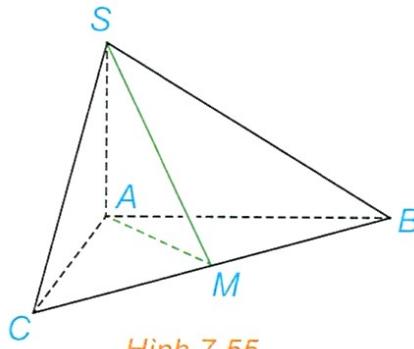
Ta có:  $(SCD) \perp (SAD)$  (chứng minh trên);  
 $(SCD) \cap (SAD) = SD$   
 $AK \perp SD$  (giả thiết)  
 $\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $SC \perp (AHK)$ .  
 Vậy  $(SAC) \perp (AHK)$ .

**Dạng 2. Góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện**

**Câu 7. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AB = AC = a$ ,

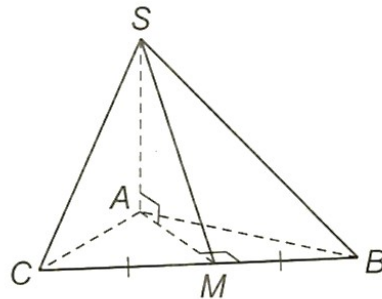
$\angle BAC = 120^\circ$ ,  $SA = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .



Hình 7.55

- a) Chứng minh rằng  $\sphericalangle SMA$  là một góc phẳng của góc nhị diện  $[S, BC, A]$ .  
 b) Tính số đo của góc nhị diện  $[S, BC, A]$ .

Lời giải

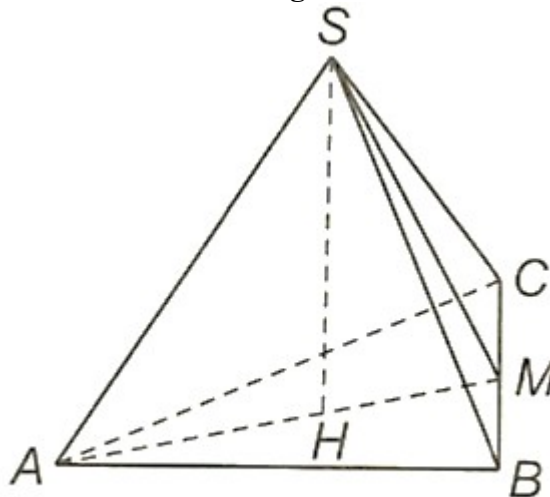


Hình 7.17

- a)  $AM \perp BC, SM \perp BC \Rightarrow \sphericalangle SMA$  là một góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ .  
 b)  $AM = \frac{a}{2} \Rightarrow \tan \sphericalangle SMA = \frac{SA}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sphericalangle SMA = 30^\circ$

**Câu 8.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{\frac{5}{12}}$ . Tính số đo của góc nhị diện  $[S, BC, A]$ .

Lời giải



Hình 7.18

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Ta tính được

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

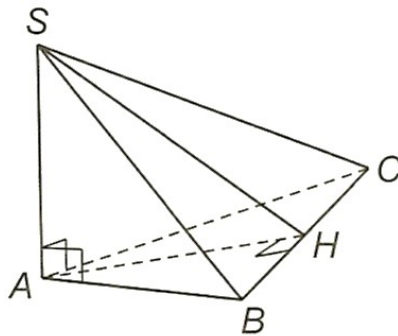
$$\Rightarrow \cos \angle SMH = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle SMH = 45^\circ.$$

**Câu 9.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ .

a) Chứng minh rằng  $(SAB) \perp (ABC)$  và  $(SAH) \perp (SBC)$ .

b) Giả sử tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính số đo của góc nhị diện  $[S, BC, A]$ .

**Lời giải**



Hình 7.19

a)  $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

Vì  $BC \perp AH, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$

b)  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle SHA = 45^\circ$

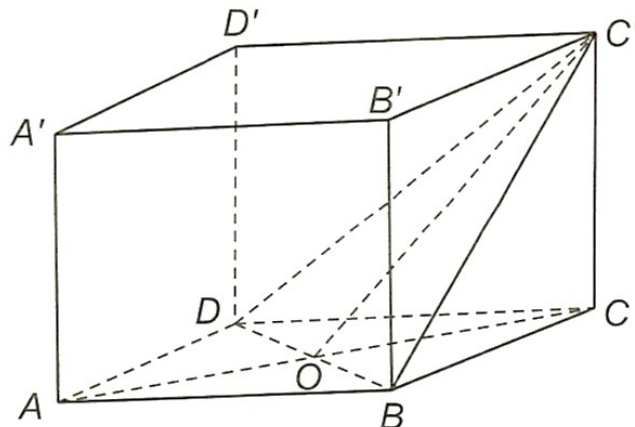
**Câu 10.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng  $(ACC'A') \perp (BDD'B')$

c) Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\angle OC'C$  là một góc phẳng của góc nhị diện  $[C, BD, C']$ . Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện  $[C, BD, C']$ ,  $[A, BD, C']$ .

**Lời giải**



Hình 7.20

a) Ta có:  $AC = a\sqrt{2}, CC' = a$

Do đó  $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

b)  $AC \perp BD, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \Rightarrow (ACC'A) \perp (BDD'B')$

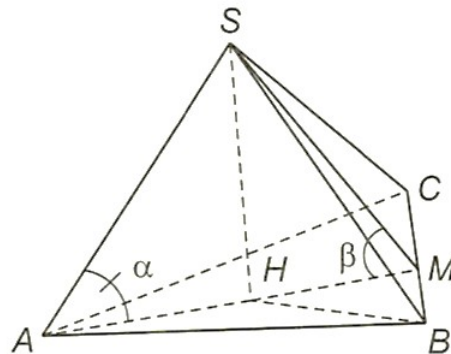
c)  $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CC' = a \Rightarrow \tan \angle OC'C = \sqrt{2} \Rightarrow \angle OC'C \approx 55^\circ$  và góc nhị diện  $[A, BD, C']$  bằng  $180^\circ - \angle C' \approx 125^\circ$

**Câu 11. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp đều  $S.ABC$ , đáy có cạnh bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $b$ .

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

**Lời giải**



Hình 7.22

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

Ta tính được

Gọi  $\alpha, \beta$  lần lượt là góc giữa  $SA$  và  $(ABC)$ , góc giữa  $(SBC)$  và  $(ABC)$ .

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}}$$

a) Ta có:

$$HM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \tan \beta = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$$

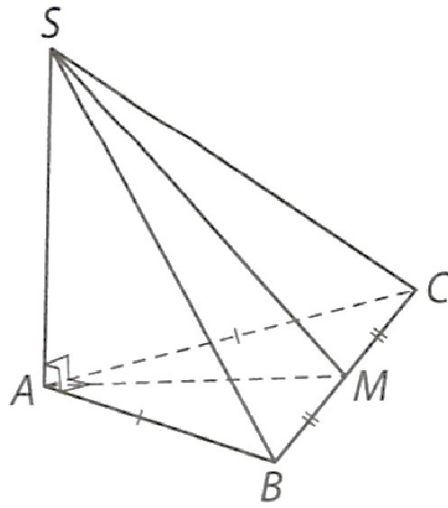
b) Vì

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $AB = a$ , biết

$SA \perp (ABC), SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Tính góc giữa mặt phẳng  $(ABC)$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

**Lời giải**

(H.7.10)



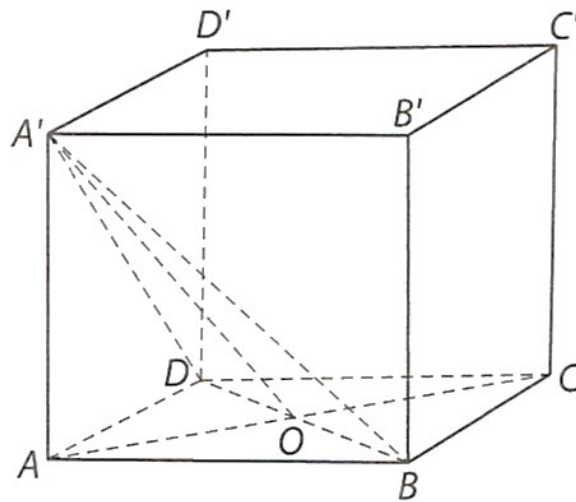
Hình 7.10

Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ , ta có:  $AM \perp BC; SM \perp BC$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(SBC)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $SM$ . Ta có  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp AM$ . Xét tam giác  $SAM$  vuông tại  $A$ , có:  $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , suy ra  $\tan \angle AMS = \frac{SA}{AM} = \sqrt{3}$ , hay  $\angle SMA = 60^\circ$ .  
 Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(SBC)$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 13.** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tang của góc giữa mặt phẳng  $(ABCD)$  và mặt phẳng  $(A'BD)$ .

Lời giải

(H.7.11)



Hình 7.11

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ , khi đó  $AO \perp BD, A'O \perp BD$ . Do đó, góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(A'BD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AO$  và  $A'O$ .

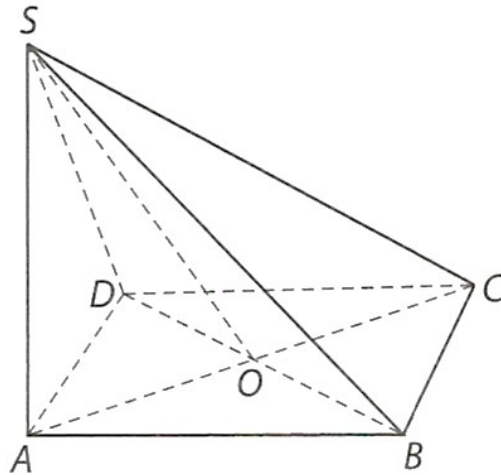
Ta có:  $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AA' = a$  và tam giác  $AA'O$  vuông tại  $A$  nên  $\tan(\angle AO, A'O) = \tan \angle OA'A = \frac{AA'}{AO} = \sqrt{2}$

Vậy tang của góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(A'BD)$  bằng  $\sqrt{2}$ .

**Câu 14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Tính số đo của góc nhị diện  $[S, BD, C]$ .

**Lời giải**

(H.7.12)



Hình 7.12

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ , khi đó  $CO \perp BD, SO \perp BD$ . Do đó, góc phẳng nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng góc  $SOC$ .

Xét tam giác  $SAO$ , có  $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SA$  và góc  $SAO$  là góc vuông nên tam giác  $SAO$  là tam giác vuông cân tại  $A$ , suy ra  $\angle SOA = 45^\circ$ ;  $\angle SOC = 135^\circ$ .

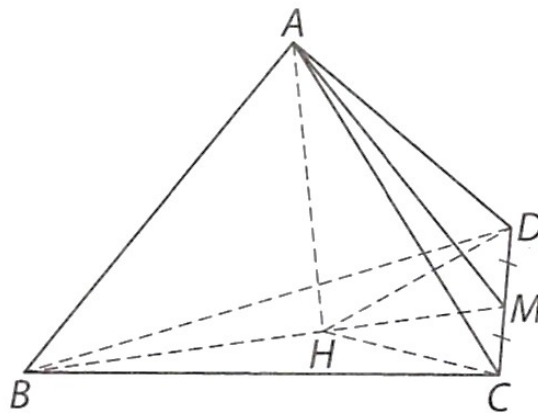
Vậy số đo của góc nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng  $135^\circ$ .

**Câu 15.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ , kẻ  $AH$  vuông góc với  $BM$  tại  $H$ .

a) Chứng minh rằng  $AH \perp (BCD)$ .

b) Tính cosin của góc giữa mặt phẳng  $(BCD)$  và mặt phẳng  $(ACD)$ .

**Lời giải**



Hình 7.38

a) Vì  $M$  là trung điểm của  $CD$  nên  $CD \perp BM$ ,  $CD \perp AM$ , do đó  $CD \perp (ABM)$ , suy ra  $CD \perp AH$ , ta lại có  $AH \perp BM$  nên  $AH \perp (BCD)$ .

b) Vì  $AM \perp CD, BM \perp CD$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $BM$ , mà  $(AM, BM) = \sphericalangle AMB$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  bằng  $\sphericalangle AMB$ .

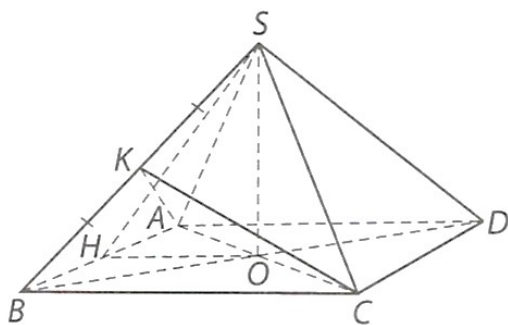
Ta có:  $HM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  và  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , tam giác  $AHM$  vuông tại  $H$  nên  $\cos \sphericalangle AMB = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 16.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ ;

b) Mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

**Lời giải**



Hình 7.41

a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Khi đó  $SO \perp (ABCD)$  nên  $SO \perp AB$ , kẻ  $OH \perp AB$  tại  $H$  thì  $AB \perp (SOH)$ , suy ra  $AB \perp SH$ . Do đó, góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SH$  và  $HO$ , mà  $(SH, HO) = \sphericalangle SHO$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABCD)$  bằng  $\sphericalangle SHO$ .

Ta tính được  $OH = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , suy ra  $\cos \sphericalangle SHO = \frac{OH}{SH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b) Gọi  $K$  là trung điểm của  $SB$ . Khi đó  $AK \perp SB, CK \perp SB$ , suy ra góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AK$  và  $CK$ .

Ta có:  $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = a\sqrt{2}$ .

Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ACK$ , ta có:

$\cos \sphericalangle AKC = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2 \cdot AK \cdot CK} = \frac{-1}{3}$ , suy ra  $\cos(AK, CK) = -\cos \sphericalangle AKC = \frac{1}{3}$ .

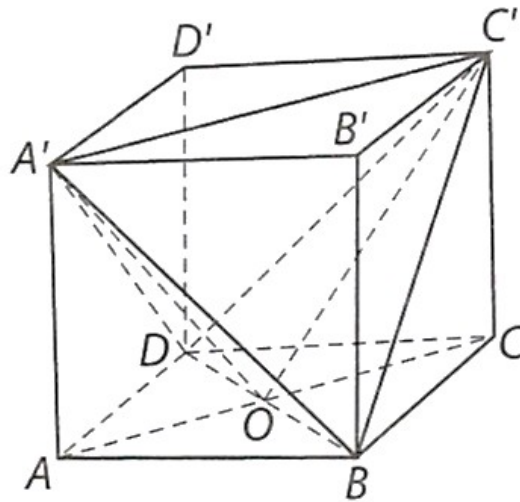
Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 17.** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

a) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(ABCD)$ .

b) Tính cosin của số đo góc nhị diện  $[A', BD, C']$ .

**Lời giải**



Hình 7.42

a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ , ta có:  $AO \perp BD, A'O \perp BD$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AO, A'O$  mà  $(AO, A'O) = \sphericalangle AOA'$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(ABCD)$  bằng  $\sphericalangle AOA'$ . Ta có:

$$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OA' = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

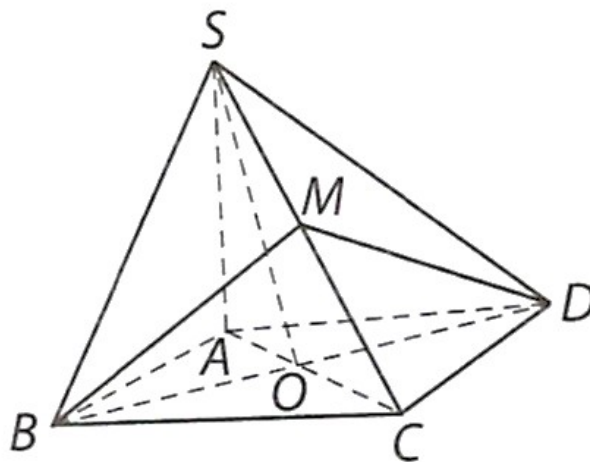
Suy ra  $\cos \sphericalangle AOA' = \frac{AO}{OA'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b) Vì  $AO \perp BD, CO \perp BD$  nên góc nhị diện  $[A', BD, C']$  bằng  $\sphericalangle AOC'$ .

Ta có  $OA' = OC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}, A'C' = a\sqrt{2}$  nên  $\cos \sphericalangle AOC' = \frac{OA'^2 + OC'^2 - A'C'^2}{2 \cdot OA' \cdot OC'} = \frac{2}{9}$ .

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , biết  $(SAB) \perp (ABCD)$ ,  $(SAD) \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Tính cosin của số đo góc nhị diện  $[S, BD, C]$  và góc nhị diện  $[B, SC, D]$ .

Lời giải



Hình 7.43

Ta có  $SO \perp BD, CO \perp BD$  nên góc nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng  $\sphericalangle SOC$ . Vì tam giác  $SAO$  vuông tại  $A$  nên

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ và}$$

$$\cos \widehat{SOC} = -\cos \widehat{SOA} = -\frac{OA}{SO} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ  $BM \perp SC$  tại  $M$  thì  $DM \perp SC$  nên  $[B, SC, D] = \widehat{BMD}$ .

Ta có  $BC \perp (SAB)$  nên tam giác  $SBC$  vuông tại  $B$ , tính được  $SB = a\sqrt{2}$ ,  $SC = a\sqrt{3}$  và

$$DM = BM = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

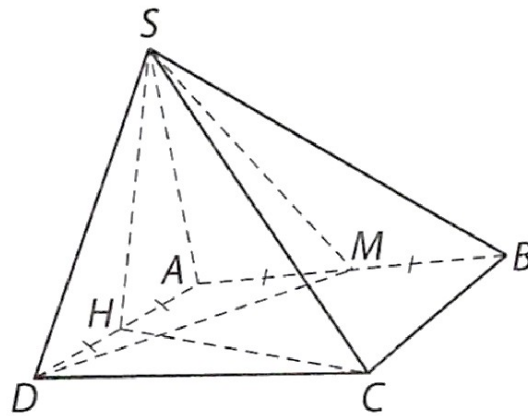
Áp dụng định lí côsin trong tam giác  $BDM$ , ta có:

$$\cos \widehat{BMD} = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = -\frac{3}{4}.$$

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tam giác  $SAD$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $H, M$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $AB$ .

- Tính côsin của góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt đáy  $(ABCD)$ .
- Chứng minh rằng  $(SMD) \perp (SHC)$ .

**Lời giải**



Hình 7.44

- Ta có  $(SAD) \perp (ABCD)$  và  $SH \perp AD$  nên  $SH \perp (ABCD)$ , suy ra góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $CH$ , mà  $(SC, CH) = \widehat{SCH}$ , ta tính được

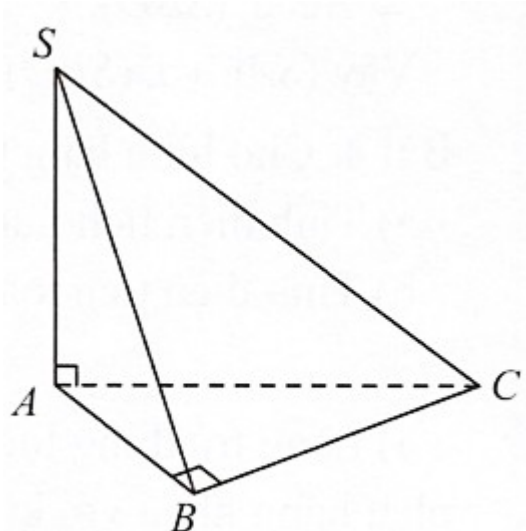
$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ và } SC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } \cos \widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

- Ta có  $DM \perp CH, DM \perp SH$  nên  $DM \perp (SCH)$ . Hơn nữa, mặt phẳng  $(SDM)$  chứa đường thẳng  $DM$  nên  $(SDM) \perp (SCH)$ .

**Câu 20.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B, AB = a, SA = a\sqrt{3}$  và  $SA$  vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$ .

**Lời giải**



Hình 8

Ta có:  $BC \perp SA$  (vì  $SA \perp (ABC)$ ) và  $BC \perp AB$  (giả thiết)  $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ .

Ta lại có:  $(SBC) \cap (ABC) = BC$  (1)

$AB \subset (ABC), AB \perp BC$  (2)

$SB \subset (SBC), SB \perp BC$  (chứng minh trên) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  $((SBC), (ABC)) = (AB, SB)$ .

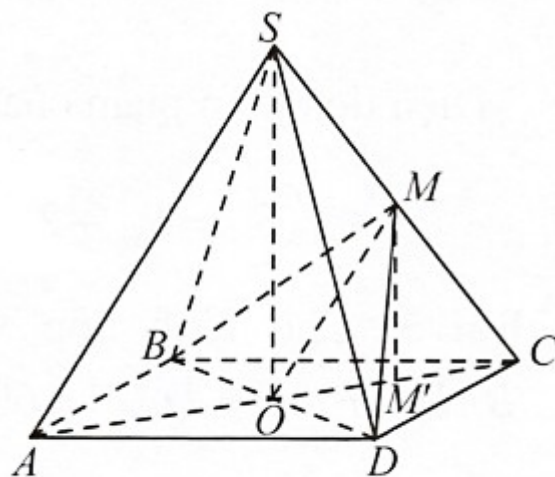
Trong tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  ta có:

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  là  $\widehat{SBA} = 60^\circ$ .

**Câu 21.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $SC$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(ABCD)$ .

Lời giải



Hình 9

Gọi  $M'$  là trung điểm  $OC \Rightarrow MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$ .

Ta có  $MB = MD$  nên  $MO \perp BD$  và  $M'O \perp BD$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(ABCD)$  là  $(MO, M'O)$ .

Ta có:  $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  ;

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

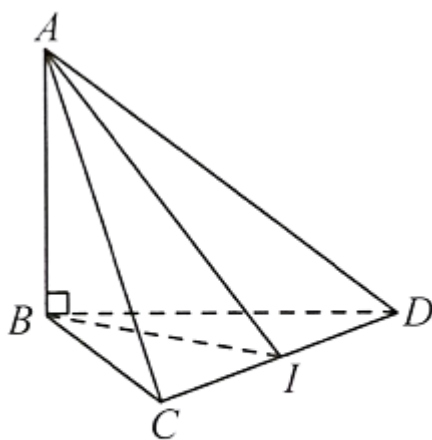
Trong tam giác vuông  $MOM'$ ,

ta có  $\tan \sphericalangle MOM' = \frac{MM'}{OM} = \frac{SO}{OC} = 1 \Rightarrow \sphericalangle MOM' = 45^\circ$

Vậy  $((MBD), (ABCD)) = (\sphericalangle MO, M'O) = \sphericalangle MOM' = 45^\circ$

**Câu 22.** Cho tứ diện  $ABCD$  có tam giác  $BCD$  vuông cân tại  $B$  và  $AB \perp (BCD)$ . Cho biết  $BC = a\sqrt{2}, AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$ .

**Lời giải**



Hình 1

Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ .

Ta có:  $CD \perp BI$  và  $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp AI$ .

Khi đó:  $(ACD) \cap (BCD) = CD$ ;

$AI \perp CD, AI \subset (ACD)$ ;

$BI \perp CD, BI \subset (BCD)$  suy ra  $((ACD), (BCD)) = (\sphericalangle AI, BI)$ .

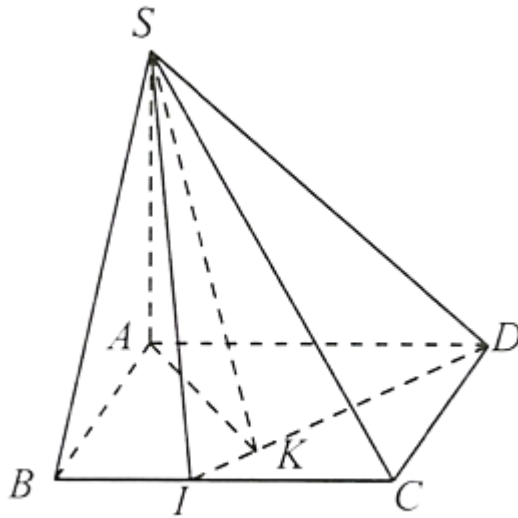
Do tam giác  $BCD$  vuông cân tại  $B$  nên  $BI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot BC\sqrt{2} = a$

Xét tam giác  $ABI$  vuông tại  $B$ , ta có:  $\tan \sphericalangle AIB = \frac{AB}{BI} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sphericalangle AIB = 30^\circ$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  là  $\sphericalangle AIB = 30^\circ$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$  cạnh  $2a$ . Cho biết  $SA = a$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Trên  $BC$  lấy điểm  $I$  sao cho tam giác  $SDI$  vuông tại  $S$ . Biết góc giữa hai mặt phẳng  $(SDI)$  và  $(ABCD)$  là  $60^\circ$ . Tính độ dài  $SI$ .

**Lời giải**



Hình 2

Vẽ  $AK \perp ID (K \in ID)$ .

Ta có  $ID \perp SA$  và  $ID \perp AK$   
 $\Rightarrow ID \perp (SAK) \Rightarrow ID \perp SK$ .

Suy ra  $((SDI), (ABCD)) = \angle AKS = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $SAK$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\sin \angle AKS = \frac{SA}{SK} \Rightarrow SK = \frac{SA}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

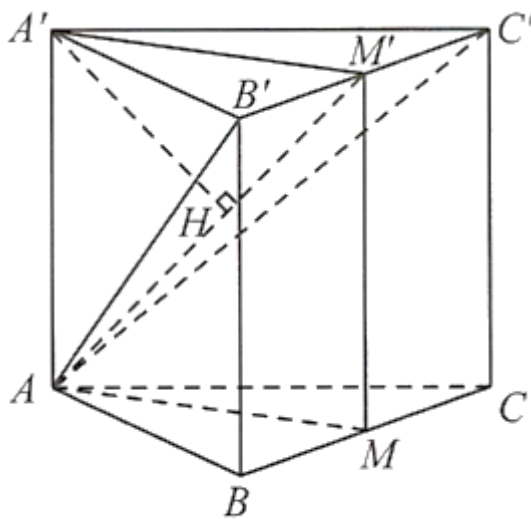
Tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$ , ta có:  $SD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$ .

Xét tam giác  $SID$  vuông tại  $S$ , ta có:

$$\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SK^2} - \frac{1}{SD^2} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{55}}{11}$$

**Câu 24.** Cho hình lăng trụ đều  $ABC \cdot A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(A'B'C')$  và  $(ABC)$ , tính  $\cos \alpha$ .

**Lời giải**



Hình 4

Gọi  $M, M'$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $B'C'$ . Vẽ đường cao  $AH$  của tam giác vuông  $A'M'$ .

Ta có:

$$\begin{cases} B'C' \perp AM' \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AAM')$$

Mà  $AH \subset (AAM')$  nên  $B'C' \perp AH$ . (1)

Ta lại có:  $AH \perp AM'$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AH \perp (AB'C')$ . (\*)

Hơn nữa,  $AA' \perp (ABC)$ . (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra:  $((ABC), (AB'C')) = (AA', AH) = \alpha$

Trong tam giác đều  $AB'C'$ , ta có  $AM' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

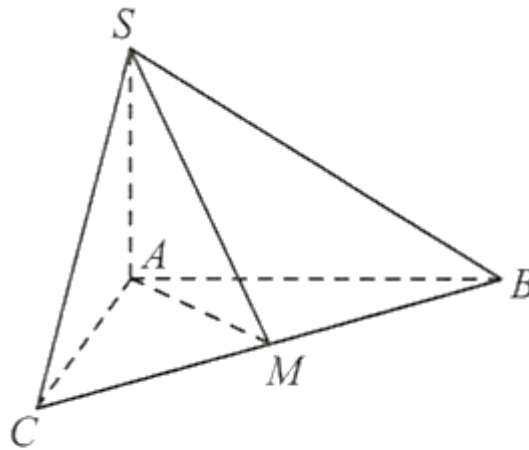
Trong tam giác vuông  $AAM'$ , ta có  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM'^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Trong tam giác vuông  $AAH$ , ta có  $\cos \sphericalangle AAH = \frac{AH}{AA'} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Vậy  $\cos \alpha = \cos \sphericalangle AAH = \frac{\sqrt{21}}{7}$

**Câu 25.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC), AB = AC = a, \sphericalangle BAC = 120^\circ, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính số đo của góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$

Lời giải



Hình 5

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

Ta có  $AB = AC \Rightarrow AM \perp BC$ .

Mặt khác  $SC = SB$  (do  $\triangle SAC = \triangle SAB$ ) nên  $\triangle SCB$  cân tại  $S \Rightarrow SM \perp BC$ .

Từ (1) và (2) suy ra  $\sphericalangle SMA$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ .

Ta có  $\sphericalangle MAB = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = 60^\circ, AM = \cos \sphericalangle MAB \cdot AB = \frac{a}{2}$ ,

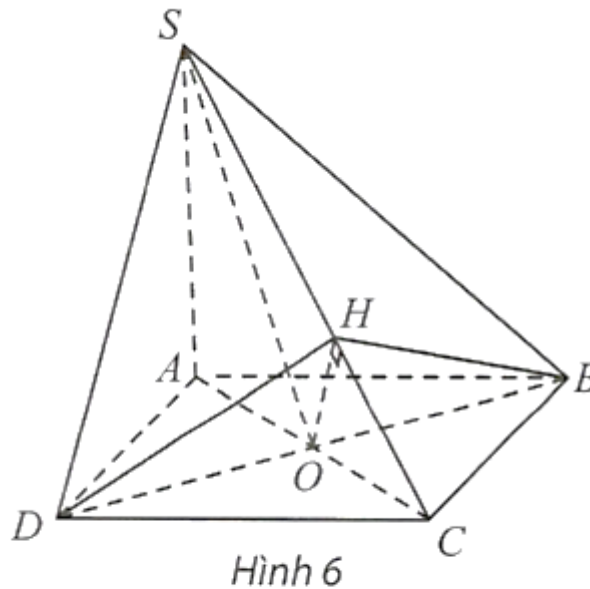
Trong tam giác  $SMA$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{MA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ.$$

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $AC = a, SA = \frac{a}{2}$ . Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình thoi  $ABCD$  và  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $SC$ . Tính số đo các góc phẳng nhị diện:

- $[B, SA, D]$ ;
- $[S, BD, A]$ ;
- $[S, BD, C]$ ;
- $[D, SC, B]$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $\begin{cases} SA \perp AD \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAB}$  là góc phẳng nhị diện  $[D, SA, B]$ .  
Tam giác  $DAC$  là tam giác đều ( $AD = DC = AC = a$ ), nên  $\widehat{DAC} = 60^\circ$ .  
Ta có  $\widehat{DAB} = 2\widehat{DAC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ .

b) Ta có  $\Delta SAD = \Delta SAB \Rightarrow SD = SB$ .  
Nên  $\Delta SBD$  cân tại  $S \Rightarrow SO \perp BD$  (do  $OB = OD$ ). (1)  
Ta lại có  $OA \perp BD$ . (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{SOA}$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BD, A]$ .  
Trong tam giác  $SOA$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ.$$

c) Ta có  $\begin{cases} OS \perp BD \\ OC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{SOC}$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BD, C]$ .

Ta có  $\widehat{SOC} = 180^\circ - \widehat{SOA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

d) Ta có  $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$  hay  $OD \perp SC$

Ta có  $\begin{cases} SC \perp OD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ODH)$  hay  $SC \perp (DHB)$ .

Nên  $\begin{cases} SC \perp DH \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow \widehat{BHB}$  là góc phẳng nhị diện  $[D, SC, B]$ .

Trong tam giác  $SAC$  vuông tại  $A$ , ta có  $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

Ta có  $\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$ .

$ADC$  là tam giác đều nên  $DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

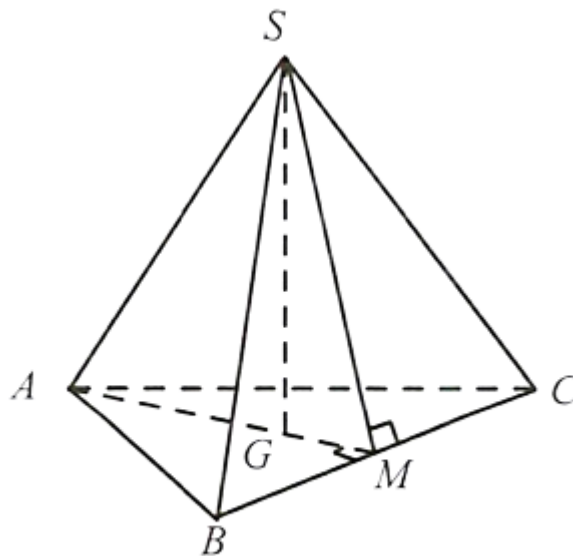
Trong tam giác  $OHD$  vuông tại  $O$ , ta có

$\tan \widehat{HHD} = \frac{OD}{OH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{a} = \sqrt{15} \Rightarrow \widehat{HHD} \approx 75,5^\circ$ .

Vậy  $\widehat{BHB} = 2 \cdot \widehat{HHD} \approx 2 \cdot 75,5^\circ = 151^\circ$ .

**Câu 27.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ . Tính số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ .

**Lời giải**



Hình 3

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Ta có  $SG \perp (ABC), SM \perp BC, AM \perp BC$ , suy ra  $\widehat{SMG}$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$

Ta tính được

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, GM = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

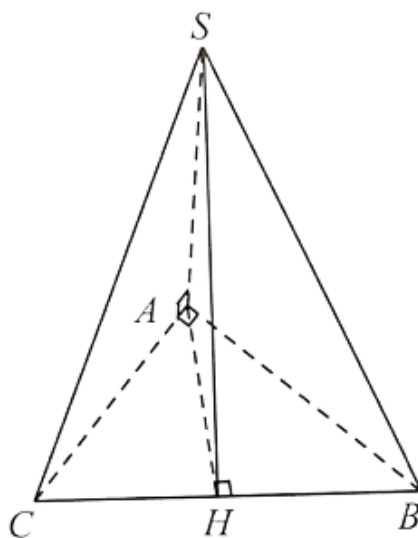
$$SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Ta có tam giác  $SMG$  vuông cân tại  $G$ , suy ra số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A] = \widehat{SMG} = 45^\circ$ .

**Câu 28.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ . Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,

$\widehat{ABC} = 30^\circ, AC = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ .

**Lời giải**



Hình 4

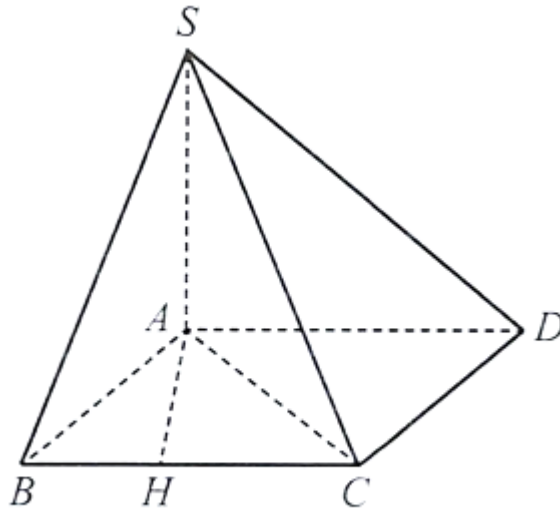
Vẽ  $AH \perp BC (H \in BC)$ , ta có  $SH \perp BC$ , suy ra  $\widehat{SHA}$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ . Ta có  $AH = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA$ , suy ra  $\widehat{SHA} = 45^\circ$ .

**Câu 29.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$  và  $AC = a$ . Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

- $[B, SA, C]$ ;
- $[S, DA, B]$ .

**Lời giải**

(Hình 18)



Hình 18

a) Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA \perp AB, SA \perp AC$ , suy ra góc  $BAC$  là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện  $[B, SA, C]$ . Do  $AC = AB = BC = a$  nên tam giác  $ABC$  đều, suy ra  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Vậy góc nhị diện  $[B, SA, C]$  có số đo bằng  $60^\circ$ .

b) Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , lấy  $H$  thuộc  $BC$  sao cho  $AH \perp BC$ . Mà  $SA \perp AD$  (vì  $SA \perp (ABCD)$  và  $AD \subset (ABCD)$ ) nên góc  $SAH$  là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện  $[S, DA, B]$ . Mặt khác,  $SA \perp (ABCD)$  và  $AH \subset (ABCD)$  nên  $SA \perp AH$ , suy ra góc  $SAH$  bằng  $90^\circ$ .

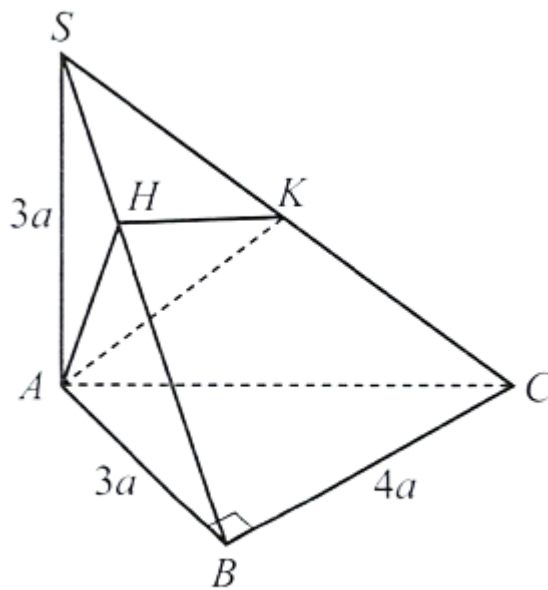
Vậy góc nhị diện  $[S, DA, B]$  có số đo bằng  $90^\circ$ .

**Câu 30.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AB \perp BC$ ,  $SA = AB = 3a, BC = 4a$ . Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là số đo của các góc nhị diện  $[B, SA, C], [A, BC, S], [A, SC, B]$ . Tính:

a)  $\cos \alpha, \cos \beta$ ;

b\*)  $\cos \gamma$ .

**Lời giải**



Hình 66

a) Vì  $SA \perp (ABC), AB \subset (ABC), AC \subset (ABC)$  nên  $SA \perp AB, SA \perp AC$ . Suy ra góc  $BAC$  là góc phẳng nhị diện của  $[B, SA, C]$ , hay  $\widehat{BAC} = \alpha$ . Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a \text{ và } \cos \alpha = \cos \sphericalangle BAC = \frac{BA}{AC} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

Ta có  $BC \perp (SAB)$  nên  $BC \perp SB$  suy ra góc  $SBA$  là góc phẳng nhị diện của  $[A, BC, S]$ . Như vậy, ta có:

$$SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a \text{ và } \cos \beta = \cos \sphericalangle SBA = \frac{AB}{SB} = \frac{3a}{3\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b\*) Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $SB, SC$ . Ta có  $BC \perp (SAB)$  nên  $BC \perp AH$ . Mà  $AH \perp SB$  nên  $AH \perp (SBC)$ , suy ra  $AH \perp SC$ . Mà  $SC \perp AK$  nên

$SC \perp (AHK)$ , suy ra  $SC \perp HK$ . Do đó góc  $AKH$  là góc phẳng nhị diện của  $[A, SC, B]$ , hay  $\sphericalangle AKH = \gamma$ .

Tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  có:

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{3a \cdot 3a}{3a\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

Tam giác  $SAC$  vuông tại  $A$  có:

$$AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{3a \cdot 5a}{\sqrt{(3a)^2 + (5a)^2}} = \frac{15a}{\sqrt{34}}.$$

Tam giác  $AHK$  vuông tại  $H$  (vì  $AH \perp (SBC)$  mà  $HK \subset (SBC)$ ) có:

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{15a}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{6a}{\sqrt{17}} \text{ và } \cos \gamma = \cos \sphericalangle AKH = \frac{HK}{AK} = \frac{\frac{6a}{\sqrt{17}}}{\frac{15a}{\sqrt{34}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

**Câu 31.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình vuông,  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O, SO \perp (ABCD)$ . Tất cả các cạnh của hình chóp bằng  $a$ .

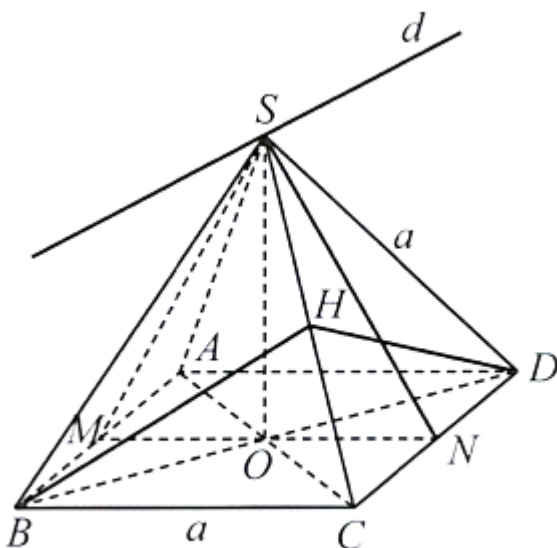
a) Tính góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .

b) Gọi  $\alpha$  là số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$ . Tính  $\cos \alpha$ .

c) Gọi  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD), \beta$  là số đo của góc nhị diện  $[A, d, D]$ . Tính  $\cos \beta$ .

d\*) Gọi  $\gamma$  là số đo góc nhị diện  $[B, SC, D]$ . Tính  $\cos \gamma$ .

**Lời giải**



Hình 67

a) Vì  $BO \perp AC, BO \perp SO$  nên  $BO \perp (SAC)$ . Suy ra góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng góc  $BSO$ . Xét tam giác  $SBD$  có  $SB = SD$  và  $SB^2 + SD^2 = BD^2$  nên tam giác  $SBD$  vuông cân tại  $S$ . Suy ra  $\widehat{BSO} = 45^\circ$ , hay góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $45^\circ$ .

b) Gọi  $N$  là hình chiếu của  $S$  trên  $CD$ . Khi đó, số đo của  $[S, CD, A]$  bằng  $\widehat{SNO}$ , hay  $\widehat{SNO} = \alpha$ . Ta có:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{SN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Gọi  $M$  là hình chiếu của  $S$  trên  $AB$ . Vì  $AB \parallel CD$  nên  $d \parallel AB$  và  $d \parallel CD$ . Khi đó  $SM \perp d, SN \perp d$ . Suy ra số đo của  $[A, d, D]$  bằng  $\widehat{MSN}$ , hay  $\widehat{MSN} = \beta$ .

$$\cos \beta = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ta có:

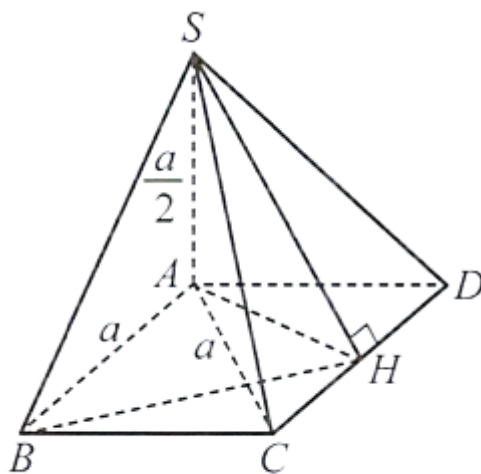
d\*) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B$  trên  $SC$ . Vì  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp SC$ . Suy ra  $SC \perp (BHD)$  nên  $SC \perp HD$ . Vậy số đo của  $[B, SC, D]$  bằng  $\widehat{BHD}$ , hay  $\widehat{BHD} = \gamma$ .

Vì hai tam giác  $SBC, SCD$  đều nên  $BH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Khi đó, ta có:

$$\cos \gamma = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB \cdot HD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{3}$$

**Câu 32.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ ,  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $AC = a$ ,  $SA = \frac{a}{2}$ .  
 Tính số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$ .

**Lời giải**



Hình 68

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $CD$ . Khi đó,  $AH \perp CD$ . Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA \perp CD$ . Suy ra  $CD \perp (SAH)$ . Khi đó,  $SH \perp CD$ . Như vậy, số đo của  $[S, CD, A]$  bằng  $\widehat{SHA}$ . Ta có:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a}{2}$$

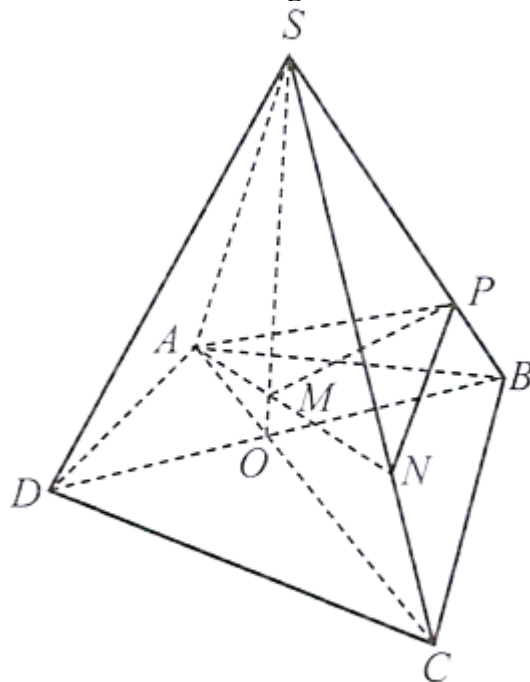
nên

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$  bằng  $\widehat{SHA} = 30^\circ$ .

**Câu 33.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ . Gọi  $\alpha, \beta$  lần lượt là số đo của các nhị diện  $[A, SO, B]$  và  $[B, SO, C]$ . Tính  $\alpha + \beta$ .

**Lời giải**



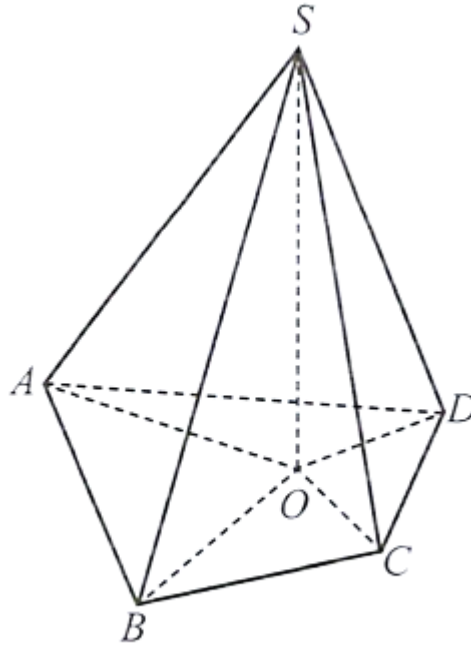
Hình 69

Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , lấy đường thẳng  $AN (N \in SC)$  sao cho  $AN \perp SO$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AN$  và  $SO$ . Trong mặt phẳng  $(SOB)$ , lấy đường thẳng  $MP (P \in SB)$  sao cho  $MP \perp SO$ . Khi đó, số đo của  $[A, SO, B]$  bằng  $\widehat{AMP}$ , hay  $\widehat{AMP} = \alpha$  và số đo của  $[B, SO, C]$  bằng  $\widehat{PMN}$ , hay  $\widehat{PMN} = \beta$ . Trong mặt phẳng  $(APN)$  có  $A, M, N$  thẳng hàng nên  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

**Câu 34.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  lần lượt là góc giữa các đường thẳng  $SA, SB, SC, SD$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ . Chứng minh rằng:

$$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

**Lời giải**



Hình 70

Gọi  $O$  là hình chiếu của  $S$  trên  $(ABCD)$ . Khi đó, ta có:  $\alpha_1 = \sphericalangle SAO, \alpha_2 = \sphericalangle SBO, \alpha_3 = \sphericalangle SCO, \alpha_4 = \sphericalangle SDO$ . Các tam giác  $SAO, SBO, SCO, SDO$  vuông có các góc  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  đều nhỏ hơn  $90^\circ$  nên  $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ .

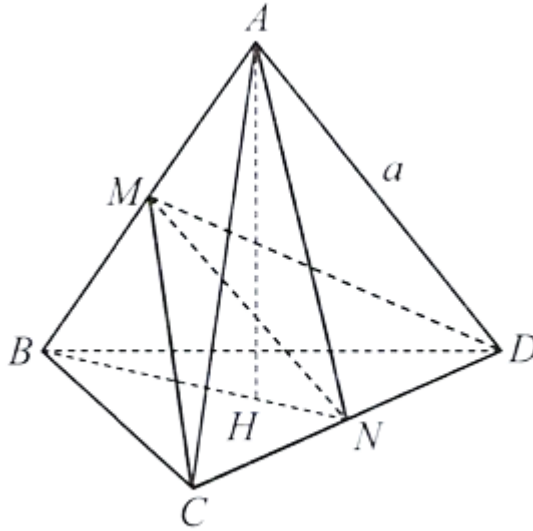
Như vậy:

$$\begin{aligned}
 SA = SB = SC = SD &\Leftrightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{SB} = \frac{SO}{SC} = \frac{SO}{SD} \\
 &\Leftrightarrow \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4 \\
 &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.
 \end{aligned}$$

**Câu 35.** Cho khối tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính:

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ ;
- Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều  $ABCD$ ;
- Côsin của góc giữa đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(BCD)$ ;
- Côsin của số đo góc nhị diện  $[C, AB, D]$ .

**Lời giải**



Hình 84

a) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Vì tứ diện  $ABCD$  đều nên các tam giác  $ABC$  và  $ABD$  đều. Suy ra  $CM \perp AB, DM \perp AB$  nên  $AB \perp (CDM)$ . Do đó,  $AB \perp MN$ . Tương tự ta có  $CD \perp MN$ . Vậy  $MN$  là đoạn vuông góc chung của  $AB, CD$ . Ta có:

$$MN = \sqrt{MC^2 - NC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy  $d(AB, CD) = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

b) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(BCD)$ . Khi đó,  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$ .

Vì tam giác  $BCD$  đều nên  $H$  thuộc  $BN$  và  $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

hay chiều cao của khối tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

Diện tích của tam giác  $BCD$  là  $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Vậy thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  bằng

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Côsin của góc giữa đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(BCD)$  bằng:

$$\cos \angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Vì  $CM \perp AB, DM \perp AB$  nên số đo của góc nhị diện  $[C, AB, D]$  bằng  $\angle MD$ .

$$\cos \widehat{EMD} = \frac{CM^2 + DM^2 - CD^2}{2CM \cdot DM} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ta có:

Vậy cosin của số đo góc nhị diện  $[C, AB, D]$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>