

VŨ VĂN THIÊN - NGUYỄN QUANG HỢP - HỒ LỘC THUẬN (Đồng chủ Biên)
HUỖNH VĂN ÁNH - MAI ĐỨC THẮNG - LÊ ANH NHÂN - HOÀNG THÀNH
TRUNG TRẦN ĐÌNH CƯ - LÊ TRUNG NGUYÊN - NGUYỄN HOÀI NAM - DƯƠNG
QUỐC THÁI

TOÁN THỰC TẾ

LỚP 12

- 5 CHUYÊN ĐỀ
- HƠN 400 BÀI TẬP GIẢI CHI TIẾT
- BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH MỚI

LỜI NÓI DÀ U

Bắt đầu từ năm học 2023 - 2024 học sinh lớp 12 học theo sách giáo khoa mới. Chương trình mới môn Toán ngoài việc rèn luyện cho học sinh kiến thức khoa học cơ bản, tư duy logic, kỹ năng tự học,... còn tập trung vào vấn đề lớn hơn là giúp học sinh áp dụng kiến thức đã học để giải quyết các bài toán thực tế trong cuộc sống.

Toán thực tế chương trình lớp 9 rất đa dạng, phong phú, liên quan đến nhiều vấn đề trong cuộc sống và bám sát vào nội dung kiến thức từng bài trong sách giáo khoa. Vì chương trình còn rất mới nên tài liệu về dạng này chưa có nhiều, điều này gây một số khó khăn cho giáo viên và học sinh khi tìm nguồn tài liệu giảng dạy và học tập.

Được sự đồng ý của nhiều đồng nghiệp, chúng tôi đã tổng hợp thành 5 chuyên đề với hơn 400 bài tập các dạng toán thực tế lớp 12. Mỗi chuyên đề gồm có:

A. Tóm tắt lý thuyết: lý thuyết được tóm tắt ngắn gọn, dễ hiểu.

B. Bài tập: Các bài toán thực tế được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, có lời giải chi tiết sau mỗi bài để người đọc dễ hiểu và dễ tiếp cận các dạng toán.

Cuốn sách được trình bày ngắn gọn, rõ ràng với một lượng bài tập phù hợp và tương đối đầy đủ các dạng toán thực tế thường gặp theo cấu trúc chương trình sách giáo khoa mới. Vì thế cho dù học sinh đang học sách giáo khoa nào cũng có thể tham khảo và nắm kiến thức phần mình muốn tìm hiểu.

Dù đã cố gắng rất nhiều trong quá trình biên soạn, nhưng cuốn sách không thể tránh khỏi thiếu sót. Tập thể tác giả xin chân thành cảm ơn quý bạn đọc gần xa và rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn để chất lượng cuốn sách ngày càng được nâng cao trong những lần tái bản sau.

Tập thể tác giả

Chủ đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRI CỦA HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

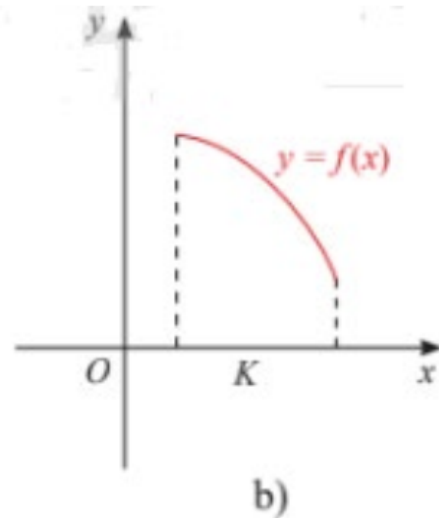
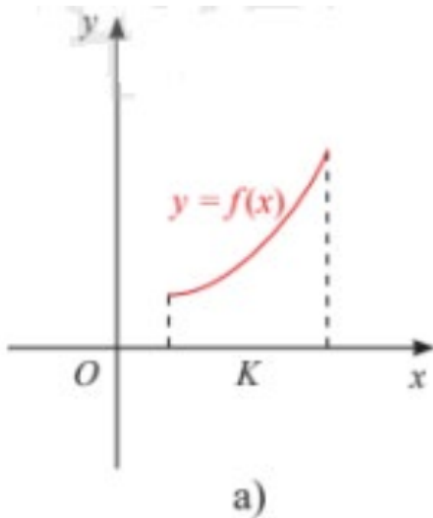
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu
 $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu
 $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

*Chú ý:

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (Hình a).
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (Hình b).



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K .

- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

- Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

*Chú ý:

- Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .

Nhận xét:

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các đi $m_{x_i} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ tại ó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.
- Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. CỰC TRI CỦA HÀM SỐ

a) Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

***Chú ý:**

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu còn được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

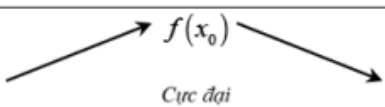
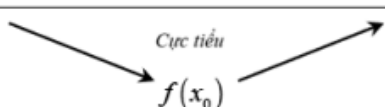
b) Cách tìm cực trị của hàm số

- Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+			$f'(x)$	-		
$f(x)$				$f(x)$			

***Chú ý:** Từ định lý trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

+Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

+Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

+Bước 3: Lập bảng biến thiên.

+Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

PHẦN B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)(\text{m})$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

Bài 2. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức

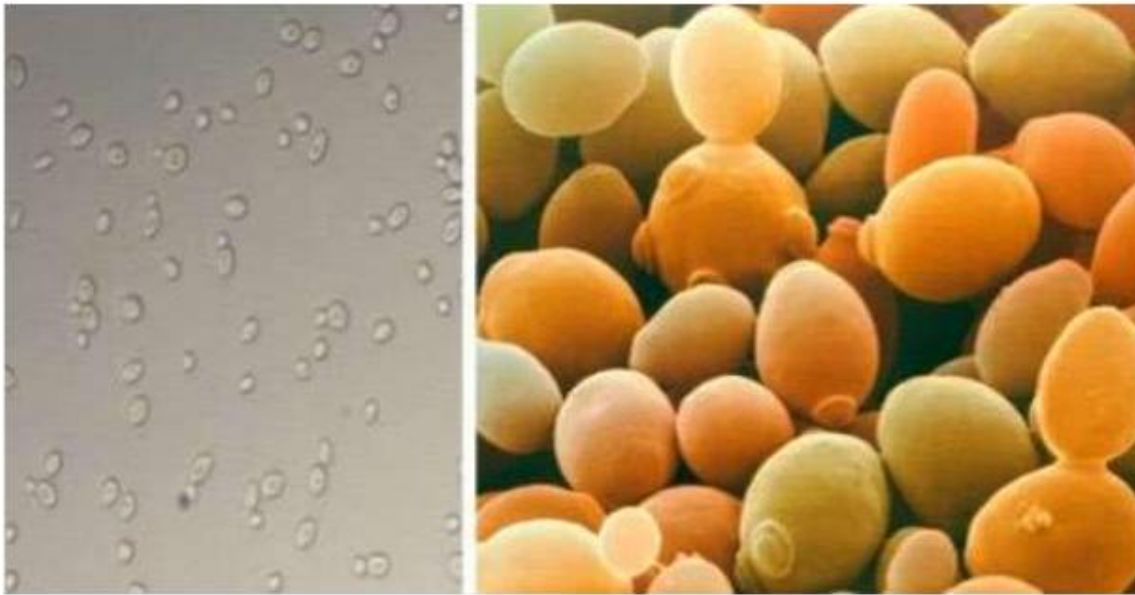
$V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ với $0 \leq t \leq 90$. Tốc độ bơm nước ở thời đi mt được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.



Bài 3. Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

Bài 4. Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm

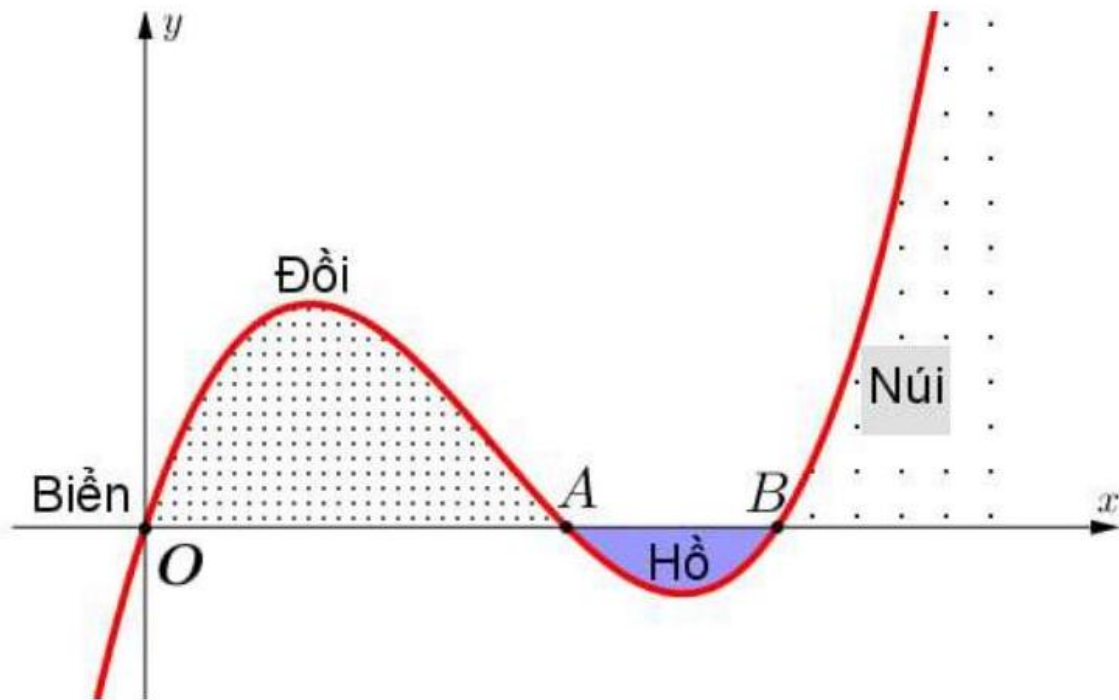
được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$



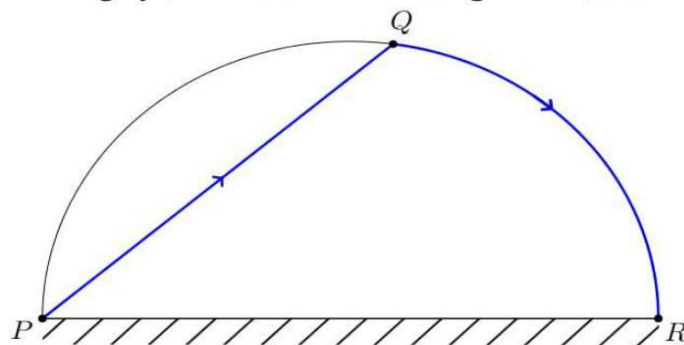
. Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?

Bài 5. Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).

Biết khoảng cách hai bên chân đê $OA = 2 \text{ km}$, độ rộng của hồ $AB = 1 \text{ km}$ và ngọn đồi cao 528 m . Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 6. Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km , đường kính PR như hình vẽ sau:



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h . Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

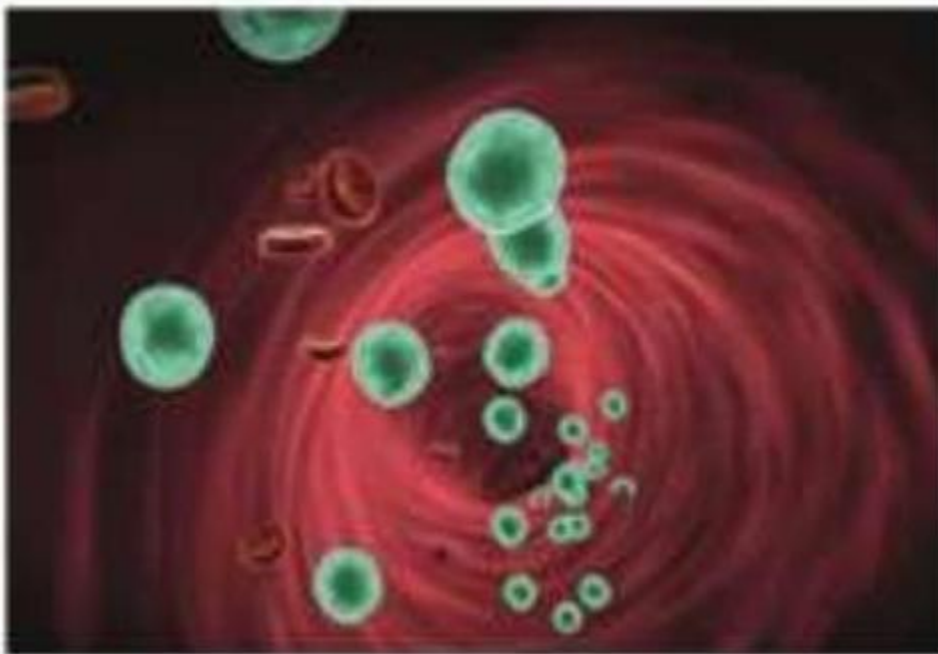
Bài 7. Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Bài 8. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/L của thuốc trong máu

sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức:

$$C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}.$$

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)



Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc

trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 9. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.

Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

***Chú ý:**

- Khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.
- Trong thực hành, ta dùng các ký hiệu $\min_D, \max_D y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên tập D .

2. QUY TẮC TÌM GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 2: Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.
- Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a, b]} f(x); m = \min_{[a, b]} f(x)$$

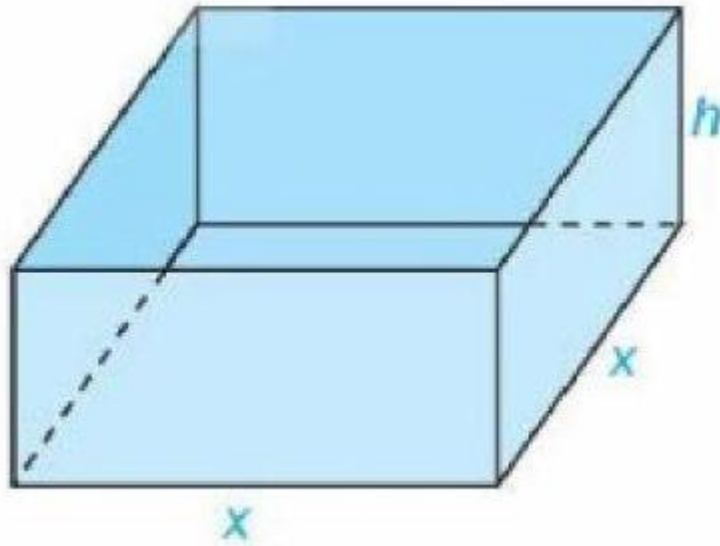
PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?



Bài 2. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là $20\text{USD}/$ người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm $1\text{USD}/$ người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi $1\text{USD}/$ người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Bài 3. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Bài 4. Nhà sản xuất dự định sử dụng hết 6 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

Bài 5. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3 , thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là 90000 đồng/m^2 và giá tôn làm thành xung quanh thùng là 40000 đồng/m^2 . Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Bài 6. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân

$$c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} (\text{mg/L})$$

sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức . Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Bài 7. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 40 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x (\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Bài 8. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ không khí đi vào khí quản. Tốc độ

của không khí đi vào khí quản khi ho đo được bởi công thức: $V = k(R - r)r^2$ với

$0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?