

ĐẠI SỐ TUYỂN TÍNH

PGS. TS My Vinh Quang

Ngày 21 tháng 4 năm 2006

Mở Đầu

Trong các kỳ thi tuyển sinh sau đại học, Đại số tuyển tính là môn cơ bản, là môn thi bắt buộc đối với mọi thí sinh thi vào sau đại học ngành toán - cụ thể là các chuyên ngành : PPGD, Đại số, Giải tích, Hình học.

Các bài viết này nhằm cung cấp cho các bạn đọc một cách có hệ thống và chọn lọc các kiến thức và kỹ năng cơ bản nhất của môn học Đại số tuyển tính với mục đích giúp những người dự thi các kỳ tuyển sinh sau đại học ngành toán có được sự chuẩn bị chủ động, tích cực nhất.

Vì là các bài ôn tập với số tiết hạn chế nên các kiến thức trình bày sẽ được chọn lọc và bám sát theo đề cương ôn tập vào sau đại học. Tuy nhiên, để dễ dàng hơn cho bạn đọc thứ tự các vấn đề có thể thay đổi. Cũng chính bởi các lý do trên các bài viết này không thể thay thế một giáo trình Đại số tuyển tính hoàn chỉnh. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo thêm một số sách viết về Đại số tuyển tính, chẳng hạn :

1. Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương ...
Toán cao cấp Tập 2 - Nxb Giáo dục 1998
2. Jean - Marie Monier.
Đại số 1 - Nxb Giáo dục 2000
3. Ngô Thúc Lanh
Đại số tuyển tính - Nxb Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1970
4. Bùi Tường Trí.
Đại số tuyển tính.
5. My Vinh Quang
Bài tập đại số tuyển tính.

Bài 1: ĐỊNH THỨC

Để hiểu được phần này, người đọc cần phải nắm được khái niệm về ma trận và các phép toán trên ma trận (phép cộng, trừ, nhân hai ma trận). Các khái niệm trên khá đơn giản, người đọc có thể dễ dàng tìm đọc trong các sách đã dẫn ở trên.

1 Định nghĩa định thức

1.1 Định thức cấp 2, 3

- Cho A là ma trận vuông cấp 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp 2) của A là một số, ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$) xác định như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

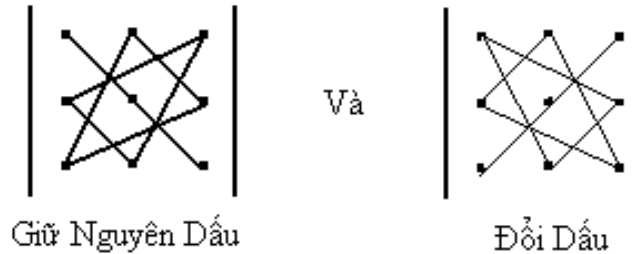
- Cho A là ma trận vuông cấp 3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp 3) của A là một số ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$), xác định như sau : $\det A =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (2)$$

Công thức khai triển (2) thường được nhớ theo quy tắc *Sarrus* như sau :



Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [(-1)(-2).4 + 2.1.(-1) + 1.0.3] - [3.(-2).(-1) + 1.0.(-1) + 2.1.4] = -8$$

Nếu ta ký hiệu S_n là tập hợp các phép thế bậc n thì các công thức (1) và (2) có thể viết lại như sau :

$$\det A = \sum_{f \in S_2} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \text{ và } \det A = \sum_{f \in S_3} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} a_{3f(3)}$$

Từ đó gợi ý cho ta cách định nghĩa định thức cấp n như sau.

1.2 Định thức cấp n

Cho A là ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp n) của ma trận A là một số, ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$), xác định như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)} \quad (3)$$

Chắc chắn là đối với một số bạn đọc, (nhất là bạn đọc không thạo về phép thế) định nghĩa định thức tương đối khó hình dung. Tuy nhiên, rất may là khi làm việc với định thức, (kể cả khi tính định thức) định nghĩa trên hiếm khi được sử dụng mà ta chủ yếu sử dụng các tính chất của định thức. Bởi vậy, bạn đọc nếu chưa có đủ thời gian có thể tạm bỏ qua định nghĩa trên và cần phải nắm vững các tính chất sau của định thức.

2 Các tính chất của định thức

2.1 Tính chất 1

Định thức không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là : $\det A^t = \det A$ (A^t : ma trận chuyển vị của ma trận A)

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Từ tính chất này, một mệnh đề về định thức nếu đúng với dòng thì cũng đúng với cột và ngược lại.

2.2 Tính chất 2

Nếu ta đổi chỗ hai dòng bất kỳ (hoặc 2 cột bất kỳ) của định thức thì định thức đổi dấu.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.3 Tính chất 3

Nếu tất cả các phần tử của một dòng (hoặc một cột) của định thức được nhân với λ thì định thức mới bằng định thức ban đầu nhân với λ .

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Từ tính chất này ta có nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

2.4 Tính chất 4

Cho A là ma trận vuông cấp n . Giả sử dòng thứ i của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng : $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ với $j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Trong đó các dòng còn lại của 3 định thức ở 2 vế là hoàn toàn như nhau và chính là các dòng còn lại của ma trận A . Tất nhiên ta cũng có kết quả tương tự đối với cột.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Các tính chất 2, 3, 4 chính là tính đa tuyến tính thay phiên của định thức.

Từ các tính chất trên, dễ dàng suy ra các tính chất sau của định thức :

2.5 Tính chất 5

Định thức sẽ bằng 0 nếu :

1. Có hai dòng (hai cột) bằng nhau hoặc tỉ lệ.
2. Có một dòng (một cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng khác (cột khác).

2.6 Tính chất 6

Định thức sẽ không thay đổi nếu :

1. Nhân một dòng (một cột) với một số bất kỳ rồi cộng vào dòng khác (cột khác).
2. Cộng vào một dòng (một cột) một tổ hợp tuyến tính của các dòng khác (cột khác)

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

(Lý do: nhân dòng một với (-2) cộng vào dòng 2, nhân dòng một với 1 cộng vào dòng 3, nhân dòng một với 3 cộng vào dòng 4).

Để tính định thức, ngoài việc sử dụng các tính chất trên của định thức ta còn rất hay sử dụng *định lý Laplace* dưới đây.

3 Định lý Laplace

3.1 Định thức con và phần bù đại số

Cho A là ma trận vuông cấp n , k là số tự nhiên $1 \leq k \leq n$. Các phần tử nằm trên giao của k dòng bất kỳ, k cột bất kỳ của A làm thành một ma trận vuông cấp k của A . Định thức của ma trận này gọi là một định thức con cấp k của ma trận A .

Đặc biệt, cho trước $1 \leq i, j \leq n$, nếu ta xóa đi dòng i , cột j của A ta sẽ được ma trận con cấp $n - 1$ của A , ký hiệu là M_{ij} . Khi đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ được gọi là phần bù đại số của phần tử $(A)_{ij}$. ($(A)_{ij}$ là phần tử nằm ở hàng i , cột j của ma trận A)

3.2 Định lý Laplace

Cho A là ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có :

1. Khai triển định thức theo dòng i

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$$

2. Khai triển định thức theo cột j

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj}$$

Từ *định lý Laplace*, ta có thể chứng minh được 2 tính chất quan trọng sau của định thức :

3.3 Tính chất 1

Nếu A là ma trận tam giác trên, (hoặc tam giác dưới) thì $\det A$ bằng tích của tất cả các phần tử trên đường chéo chính, tức là :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} \dots a_{nn}$$

3.4 Tính chất 2

Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n thì $\det(AB) = \det A \det B$

4 Các ví dụ và áp dụng

Nhờ có *định lý Laplace*, để tính một định thức cấp cao (cấp > 3) ta có thể khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột bất kỳ để đưa về tính các định thức cấp bé hơn. Cứ như vậy sau một số lần sẽ đưa được về việc tính các định thức cấp 2, 3. Tuy nhiên, trong thực tế nếu làm như vậy thì số lượng phép tính khá lớn. Bởi vậy ta làm như sau thì số lượng phép tính sẽ giảm đi nhiều :

1. Chọn dòng (cột) có nhiều số 0 nhất để khai triển định thức theo dòng (cột) đó.
2. Sử dụng *tính chất 2.6* để biến đổi định thức sao cho dòng đã chọn (cột đã chọn) trở thành dòng (cột) *chỉ có một số khác 0*.
3. Khai triển định thức theo dòng (cột) đó. Khi đó việc tính một định thức cấp n quy về việc tính một định thức cấp $n-1$. Tiếp tục lặp lại quá trình trên cho định thức cấp $n-1$, cuối cùng ta sẽ dẫn về việc tính định thức cấp 2, 3.

Ví dụ 1

Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta chọn cột 2 để khai triển nhưng trước khi khai triển, ta biến đổi định thức như sau : nhân dòng 2 với (-2) cộng vào dòng 3. Nhân dòng 2 với (-1) cộng vào dòng 5. Định thức đã cho sẽ bằng (*Tính chất 2.6*)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Khai triển theo cột 2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Để tính định thức cấp 4, ta lại chọn dòng 4 để khai triển, trước khi khai triển ta lại biến đổi định thức như sau : nhân cột 1 với (-1) rồi cộng vào cột 3, nhân cột 1 với 2 rồi cộng vào cột 4. Định thức đã cho sẽ bằng :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{\text{(Khai triển theo dòng 4)}} (-1) \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Ví dụ 2 Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

$$\begin{aligned} VT & \underset{=}{\text{(Khai triển theo dòng 2)}} (-1)^5 (x^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & x & x+2 \\ x & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & x^{100} \end{vmatrix} \\ & \underset{=}{\text{(Khai triển theo dòng 3)}} (1 - x^2) \cdot x^{100} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^2)^2 \cdot x^{100} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $(1 - x^2)^2 \cdot x^{100} = 0 \iff x = 0, x = \pm 1$

Bài Tập

1. Tính

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} \text{ trong đó } \alpha, \beta, \gamma, \text{ là các nghiệm của phương trình : } x^3 + px + q = 0$$

2. Giải phương trình :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

3. Chứng minh :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. Chứng minh :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS My Vinh Quang

Ngày 21 tháng 4 năm 2006

Bài 2 : Các Phương Pháp Tính Định Thức Cấp n

Định thức được định nghĩa khá phức tạp, do đó khi tính các định thức cấp cao (cấp lớn hơn 3) người ta hầu như không sử dụng định nghĩa định thức mà sử dụng các tính chất của định thức và thường dùng các phương pháp sau.

1 Phương pháp biến đổi định thức về dạng tam giác

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) của ma trận và các tính chất của định thức để biến đổi ma trận của định thức về dạng tam giác. Định thức sau cùng sẽ bằng tích của các phần tử thuộc đường chéo chính (theo *tính chất 3.3*).

Ví dụ 1.1: Tính định thức cấp n ($n \geq 2$) sau đây:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Nhân dòng (2) với (-1) rồi cộng vào dòng (3), (4), $\dots$, (n). Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)!$$

(1): nhân dòng (1) với (-2) cộng vào dòng (2).

Ví dụ 1.2: Tính định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Bài giải: Đầu tiên cộng các cột (2), (3), ..., (n) vào cột (1). Sau đó nhân dòng (1) với (-1) cộng vào các dòng (2), (3), ..., (n). Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \dots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \dots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a + (n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

2 Phương pháp qui nạp

Áp dụng các tính chất của định thức, biến đổi, khai triển định thức theo dòng hoặc theo cột để biểu diễn định thức cần tính qua các định thức cấp bé hơn nhưng có cùng dạng. Từ đó ta sẽ nhận được công thức truy hồi.

Sử dụng công thức truy hồi và tính trực tiếp các định thức cùng dạng cấp 1, cấp 2, ..., để suy ra định thức cần tính.

Ví dụ 2.1: Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Sử dụng *tính chất 2.4*, tách định thức theo cột n , ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1 + a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1 + a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1 + a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1 + a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức đầu theo cột (n) ta sẽ có định thức đầu bằng D_{n-1} .

Nhân cột (n) của định thức thứ hai lần lượt với $(-b_i)$ rồi cộng vào cột i ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Ta được:

$$D_n = D_{n-1} + b_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n b_n$$

Vậy ta có công thức truy hồi $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Vì công thức trên đúng với mọi n nên ta có

$$D_n = D_{n-1} + a_n b_n = (D_{n-2} + a_{n-1} b_{n-1}) + a_n b_n = \dots = D_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Vì $D_1 = a_1 b_1 + 1$ nên cuối cùng ta có

$$D_n = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Ví dụ 2.2: Cho $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Bài giải: Khai triển định thức theo dòng đầu, ta được:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức sau theo cột (1) ta có công thức:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \text{ với } n \geq 3 \quad (*)$$

Do đó:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

Công thức này đúng với mọi $n \geq 3$ nên ta có

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \dots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ và $D_1 = a + b$ do đó $D_2 - aD_1 = b^2$. Bởi vậy

$$D_n - aD_{n-1} = b^n \quad (1)$$

Tiếp tục, từ công thức (*) ta lại có $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$. Do công thức này đúng với mọi $n \geq 3$ nên tương tự như trên ta lại có

$$\begin{aligned} D_n - bD_{n-1} &= a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) \\ &= \dots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^n \text{ vì } D_2 - bD_1 = a^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$D_n - bD_{n-1} = a^n \quad (2)$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta sẽ được kết quả

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

3 Phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức

Nhiều định thức cấp n có thể tính được dễ dàng bằng các tách định thức (theo các dòng hoặc theo các cột) thành tổng của các định thức cùng cấp. Các định thức mới này thường bằng 0 hoặc tính được dễ dàng.

Ví dụ 3.1: Ta sẽ tính định thức D_n trong Ví dụ 2.1 bằng phương pháp này.

Bài giải: Mỗi cột của D_n được viết thành tổng của 2 cột mà ta ký hiệu là cột loại (1) và loại (2) như sau:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & 0 + a_1b_2 & \dots & 0 + a_1b_n \\ 0 + a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \dots & 0 + a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + a_nb_1 & 0 + a_nb_2 & \dots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix}$$

(1) (2) (1) (2) (1) (2)

Sử dụng *tính chất 2.4* của định thức, ta lần lượt tách các cột của định thức. Sau n lần tách ta có D_n là tổng của 2^n định thức cấp n . Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D_n . Ta chia 2^n định thức này thành ba dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) tỉ lệ nên tất cả các định thức loại này có giá trị bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1). Giả sử cột i là loại (2) ta có định thức đó là

$$D_{n,i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_1b_i & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_2b_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_nb_i & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_ib_i$$

↑
cột i

(khai triển theo cột i). Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1) và do đó có đúng một định thức dạng 3 là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy D_n bằng tổng của tất cả các định thức ba dạng trên và bằng

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i + 1$$

Nhận xét: Tất cả các định thức mà các cột (dòng) có thể biểu diễn dưới dạng tổng 2 cột (2 dòng) trong đó các cột loại (2) (dòng loại (2)) tỉ lệ với nhau đều có thể tính được dễ dàng bằng phương pháp 3 với cách trình bày giống hệt như trên.

4 Phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức

Giả sử ta cần tính định thức D cấp n . Ta biểu diễn ma trận tương ứng A của D thành tích các ma trận vuông cấp n đơn giản hơn: $A = B.C$. Khi đó ta có

$$D = \det A = \det(B.C) = \det B \cdot \det C$$

với các định thức $\det B$, $\det C$ tính được dễ dàng nên D tính được.

Ví dụ 4.1: Tính định thức cấp n ($n \geq 2$) sau

$$D = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geq 2$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_C \end{aligned}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B \cdot \det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4.2: Tính định thức cấp n ($n \geq 2$)

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \dots & \cos \alpha_n \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \dots & \sin \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_C$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B \cdot \det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ -\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

Bài Tập

Tính các định thức cấp n sau:

$$6. \begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1 + a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix}$$

Tính các định thức cấp $2n$ sau

$$12. \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

(đường chéo chính là a , đường chéo phụ là b , tất cả các vị trí còn lại là 0)

$$13. \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix}$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS My Vinh Quang

Ngày 10 tháng 11 năm 2004

Bài 3 : Giải Bài Tập Định Thức

1. Tính

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} \text{ trong đó } \alpha, \beta, \gamma \text{ là các nghiệm của phương trình } :x^3+px+q=0$$

Giải :

Theo định lí Viet ta có $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Cộng cột (1), cột (2) vào cột (3) ta có:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha + \beta + \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha + \beta + \gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha + \beta + \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

Giải :

Khai triển định thức về trái theo dòng đầu, ta sẽ có về trái là một đa thức bậc 3 của x , kí hiệu là $f(x)$. Ta có $f(2) = 0$ vì khi đó định thức ở về trái có 2 dòng đầu bằng nhau. Tương tự $f(3) = 0, f(4) = 0$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc 3, có 3 nghiệm là 2, 3, 4 nên phương trình trên có nghiệm là 2, 3, 4.

3. Chứng minh

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

Nhân cột (2) với (-1), cột (3) với 1 rồi cộng vào cột (1), ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ 2a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ 2a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Giải thích:

(1) : nhân cột (1) với (-1) cộng vào cột (3)

(2) : nhân cột (3) với (-1) cộng vào cột (2)

4. Chứng minh

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

$$VT \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 0$$

Giải thích:

(1) : Nhân cột (1) với (-1) cộng vào cột (4), nhân cột (2) với (-1) cộng vào cột (3)

(2) : Định thức có 2 cột tỷ lệ

5. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Giải :

$$\begin{aligned} VT &\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+\dots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+\dots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_1+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+\dots+a_n \end{aligned}$$

Giải thích:

(1): Cộng các cột (2), (3), ..., (n) vào cột (1)

(2): Nhân dòng (1) với (-1) rồi cộng vào các dòng (2), (3), ..., (n)

6. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Giải :

Với $x \neq 0$

$$VT \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n-1}{x}(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Giải thích:

(1): Nhân dòng (1) với $(-x)$ cộng vào dòng (2), (3), ..., (n)

(2): Nhân cột (2), (3), ..., (n) với $\frac{1}{x}$ rồi cộng tất cả vào cột (1)

Dễ thấy khi $x = 0$, đáp số trên vẫn đúng do tính liên tục của định thức.

7. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Giải :

Khai triển định thức theo dòng đầu ta có :

$$D_n = 5D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức theo cột (1) ta có công thức truy hồi :

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \quad (*) \quad (n \geq 3)$$

Từ (*) ta có :

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$$

Do công thức đúng với mọi $n \geq 3$ nên ta có:

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = 3^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = \dots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = 19$, $D_1 = 5$ nên $D_2 - 2D_1 = 9$. Bởi vậy ta có:

$$D_n - 2D_{n-1} = 3^n \quad (1)$$

Mặt khác, cũng từ công thức (*) ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$$

Tương tự như trên ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = 2^2(D_{n-2} - 3D_{n-3}) = \dots = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1) = 2^n$$

Vậy ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2^n \quad (2)$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta có:

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

(Bạn đọc có thể so sánh cách giải bài này với cách giải ở ví dụ 4)

8. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Giải :

Định thức này có thể tính bằng phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức. Trước hết ta viết định thức dưới dạng:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x + x & 0 + x & \dots & 0 + x \\ 0 + x & a_2 - x + x & \dots & 0 + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + x & 0 + x & \dots & a_n - x + x \end{vmatrix}$$

(1) (2) (1) (2) (1) (2)

Lần lượt tách các cột của định thức, sau n lần tách ta có định thức D bằng tổng của 2^n định thức cấp n . Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D . Chia 2^n định thức này thành 3 dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) bằng nhau nên tất cả các định thức dạng này đều bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1).

Giả sử cột i là loại (2). Ta có định thức đó là:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & x & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$

$\uparrow$
cột i

$$\stackrel{(1)}{=} x(a_1 - x) \dots (a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x) \dots (a_n - x) = \frac{x \prod_{k=1}^n (a_k - x)}{a_i - x}$$

((1) khai triển định thức theo cột i)

Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là:

$$x(a_1 - x) \dots (a_n - x) \left[\frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x} \right]$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1). Và do đó có đúng 1 định thức dạng (3) là:

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} = (a_1 - x) \dots (a_n - x)$$

Vậy D bằng tổng của tất cả các định thức của 3 dạng trên và bằng:

$$x(a_1 - x) \dots (a_n - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x} \right)$$

9. Tính

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

Định thức này có thể được tính bằng phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức với cách giải tương tự như bài 8. *Chi tiết của cách giải này xin dành cho bạn đọc.* Ở đây chúng tôi đưa ra một cách tính nữa dựa vào phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức. Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_C$$

Bởi vậy, ta có:

$$D = \det A = \det(BC) = \det B \cdot \det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ (a_1 - a_2)(b_2 - a_1) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

10. Tính

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix}$$

Để tính định thức này ta dùng phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức. Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \alpha_n & \sin \alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \dots & \cos \beta_n \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \dots & \sin \beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_C$$

Bởi vậy ta có:

$$D = \det A = \det(BC) = \det B \cdot \det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \sin(\beta_2 - \alpha_1) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

11. Tính định thức cấp 2n

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{2n \times 2n} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ (n-1) \\ (n) \\ (n+1) \\ (n+2) \\ \\ (2n-1) \\ (2n) \end{matrix}$$

Giải :

Xét khi $a \neq 0$

- Nhân dòng (1) với $-\frac{b}{a}$ cộng vào dòng (2n)
- Nhân dòng (2) với $-\frac{b}{a}$ cộng vào dòng (2n-1)
-
- Nhân dòng (n) với $-\frac{b}{a}$ cộng vào dòng (n+1)

Ta có :

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{a^2 - b^2}{a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & \frac{a^2 - b^2}{a} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a^2 - b^2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a^2 - b^2}{a} \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n$$

Khi $a \neq 0$, do tính liên tục của định thức công thức trên vẫn đúng. Vậy ta có: $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$

Chú ý : Khai triển định thức theo dòng (1), sau đó khai triển các định thức cấp $(2n-1)$ vừa nhận được theo dòng $(2n-1)$. Ta sẽ có công thức truy hồi:

$$D_{2n} = (a^2 - b^2)D_{2(n-1)}$$

Do công thức trên đúng với mọi $n \geq 2$ nên :

$$D_{2n} = (a^2 - b^2)D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \dots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2 = (a^2 - b^2)^n$$

(*Chi tiết của cách làm này xin dành cho bạn đọc*).

12. Tính định thức cấp $2n$

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ (n) \\ \\ (n+1) \\ (n+2) \\ \\ (2n) \end{matrix}$$

Xét khi $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều khác 0 :

- Nhân dòng (1) với $-\frac{c_1}{a_1}$ rồi cộng vào dòng $(n+1)$
- Nhân dòng (2) với $-\frac{c_2}{a_2}$ rồi cộng vào dòng $(n+2)$
-
- Nhân dòng (n) với $-\frac{c_n}{a_n}$ rồi cộng vào dòng $(2n)$

Ta có :

$$\begin{aligned}
D_{2n} &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \frac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \frac{a_2 d_2 - b_2 c_2}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \frac{a_n d_n - b_n c_n}{a_n} \end{vmatrix} \\
&= (a_1 d_1 - b_1 c_1) \dots (a_n d_n - b_n c_n) = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)
\end{aligned}$$

Khi các $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng 0, do tính liên tục của định thức công thức trên vẫn đúng.

Vậy ta có :

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)$$

Chú ý : Khai triển định thức theo dòng thứ n , sau đó khai triển các định thức cấp $2n - 1$ vừa nhận được theo dòng $(2n - 1)$ ta sẽ có công thức truy hồi:

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \quad \forall n \geq 2$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned}
D_{2n} &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} = (a_n d_n - b_n c_n) (a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) D_{2(n-2)} \\
&= \dots = (a_n d_n - b_n c_n) \dots (a_2 d_2 - b_2 c_2) D_1 \\
&= \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)
\end{aligned}$$

(Chi tiết của cách này xin dành cho bạn đọc)

1

¹Người đánh máy : Nguyễn Ngọc Quyên

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS My Vinh Quang

Ngày 15 tháng 11 năm 2004

Hạng Của Ma Trận

Cùng với định thức, ma trận (đặc biệt là hạng của ma trận) là các công cụ cơ bản để giải quyết các bài toán về hệ phương trình tuyến tính nói riêng và đại số tuyến tính nói chung. Bài viết này sẽ giới thiệu định nghĩa, các tính chất cơ bản của hạng ma trận, và hai phương pháp cơ bản để tính hạng của ma trận.

1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Trước hết, cần nhớ lại khái niệm định thức con cấp k của một ma trận. Cho A là ma trận cấp $m \times n$; k là số tự nhiên $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Chọn ra k dòng, k cột bất kỳ của A . Các phần tử thuộc giao của k dòng, k cột này tạo thành ma trận vuông cấp k , gọi là ma trận con cấp k của ma trận A . Định thức của ma trận con cấp k này gọi là một định thức con cấp k của A .

1.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Cho A là ma trận cấp $m \times n$ khác không.

Hạng của ma trận A là số tự nhiên r , $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Tồn tại ít nhất một định thức con cấp r của ma trận A khác 0.
2. Mọi định thức con cấp lớn hơn r (nếu có) của ma trận A đều bằng 0.

Nói cách khác, hạng của ma trận $A \neq O$ chính là *cấp cao nhất của các định thức con khác không* của ma trận A .

Hạng của ma trận A ký hiệu là $r(A)$ hoặc $\text{rank}(A)$.

Qui ước: hạng của ma trận không O là 0.

1.2 Các tính chất cơ bản về hạng của ma trận

1.2.1 Tính chất 1

Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là $\text{rank } A^t = \text{rank } A$.

1.2.2 Tính chất 2

Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

$$\text{rank } A = n \iff \det A \neq 0$$

$$\text{rank } A < n \iff \det A = 0$$

Nếu xảy ra trường hợp đầu, ta nói A là *ma trận vuông không suy biến*. Nếu xảy ra trường hợp thứ hai, ta nói A là *ma trận vuông suy biến*.

1.2.3 Tính chất 3

Nếu A, B là các ma trận cùng cấp thì

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

1.2.4 Tính chất 4

Cho A, B là các ma trận sao cho tồn tại tích AB . Khi đó

1. $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$
2. Nếu A là ma trận vuông không suy biến thì $\text{rank}(AB) = \text{rank } B$.

2 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp định thức

2.1 Từ định nghĩa hạng của ma trận ta có thể suy ra ngay thuật toán sau đây để tìm hạng của ma trận A cấp $m \times n$ ($A \neq O$)

Bước 1

Tìm một định thức con cấp k khác 0 của A . Số k càng lớn càng tốt. Giả sử định thức con cấp k khác không là D_k .

Bước 2

Xét tất cả các định thức con cấp $k + 1$ của A chứa định thức D_k . Xảy ra 3 khả năng sau

1. Không có một định thức con cấp $k + 1$ nào của A . Khả năng này xảy ra khi và chỉ khi $k = \min\{m, n\}$. Khi đó $\text{rank } A = k = \min\{m, n\}$. Thuật toán kết thúc.
2. Tất cả các định thức con cấp $k + 1$ của A chứa định thức con D_k đều bằng 0. Khi đó $\text{rank } A = k$. Thuật toán kết thúc.
3. Tồn tại một định thức con cấp $k + 1$ của A là D_{k+1} chứa định thức con D_k khác 0. Khi đó lặp lại bước 2 với D_{k+1} thay cho D_k . Và cứ tiếp tục như vậy cho đến khi xảy ra trường hợp (1) hoặc (2) thì thuật toán kết thúc.

2.2 Ví dụ

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải

Đầu tiên ta thấy A có định thức con cấp 2, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (Định thức này được tạo thành bởi 2 dòng đầu, 2 cột đầu của A)

Xét các định thức con cấp 3 của A chứa D_2 , ta thấy có định thức con cấp 3 khác 0. Đó là định thức

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(Định thức này được thành bởi các dòng 1, 2, 3, các cột 1, 2, 4 của A)

Tiếp tục, xét các định thức con cấp 4 của A chứa D_3 . Có tất cả 2 định thức như vậy, đó là

$$D_{4,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

và

$$D_{4,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cả 2 định thức này đều bằng 0. Do đó $\text{rank } A = 3$.

Chú ý. Có thể nhận xét dòng (4) của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của dòng (1) và dòng (2); dòng (4) = dòng (1) - dòng (2), nên dễ dàng thấy được $D_{4,1} = 0$, $D_{4,2} = 0$.

Việc tìm hạng của ma trận bằng định thức như trên phải tính toán khá phức tạp nên trong thực tế người ta ít sử dụng mà người ta thường sử dụng phương pháp tìm hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp sau đây.

3 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss)

Trước khi giới thiệu phương pháp này, ta cần nhớ lại một số khái niệm sau

3.1 Ma trận bậc thang

3.1.1 Định nghĩa

Ma trận A cấp $m \times n$ khác không gọi là một ma trận bậc thang nếu tồn tại số tự nhiên r , $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ thỏa các điều kiện sau:

1. r dòng đầu của A khác không. Các dòng từ thứ $r + 1$ trở đi (nếu có) đều bằng 0.
2. Xét dòng thứ k với $1 \leq k \leq r$. Nếu $(A)_{ki_k}$ là phần tử đầu tiên bên trái (tính từ trái sang phải) khác 0 của dòng k thì ta phải có $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

Các phần tử $(A)_{ki_k}$ gọi là các phần tử *được đánh dấu* của ma trận A . Các cột chứa các phần tử được đánh dấu (các cột $i_1, i_2, \dots, i_r$) gọi là cột đánh dấu của ma trận A . Như vậy, điều kiện (2) có thể phát biểu lại như sau: *Nếu đi từ dòng trên xuống dưới thì các phần tử đánh dấu phải lùi dần về phía phải*. Và như vậy, ma trận bậc thang có dạng như sau:

$$A = \begin{matrix} & i_1 & i_2 & & i_r & & \\ \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & (A)_{1i_1}^* & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & (A)_{2i_2}^* & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & (A)_{ri_r}^* & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots & \dots & 0 \dots & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots & \dots & 0 \dots & \dots 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ (r) \\ (r+1) \\ \\ (m) \end{matrix} \end{matrix}$$

Ta có nhận xét quan trọng sau:

Nếu A là ma trận bậc thang thì số r trong định nghĩa chính là rank A .

Thật vậy, có thể chỉ ra một định thức con cấp r của A khác 0 chính là định thức D_r tạo bởi r dòng đầu và r cột đánh dấu $i_1, i_2, \dots, i_r$.

$$D_r = \begin{vmatrix} (A)_{1i_1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (A)_{2i_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (A)_{ri_r} \end{vmatrix} = (A)_{1i_1} (A)_{2i_2} \dots (A)_{ri_r} \neq 0$$

Ngoài ra, các định thức con cấp $r + 1$ của A đều tạo bởi $r + 1$ dòng nào đó nên có ít nhất một dòng bằng không. Do đó, chúng đều bằng 0.

3.1.2 Ví dụ về các ma trận bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^* \end{pmatrix}$$

Các ma trận A, B đều là các ma trận bậc thang, và ta có rank $A = 4$ (bằng số dòng khác không của A), rank $B = 5$ (bằng số dòng khác không của B).

3.2 Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Ba phép biến đổi sau gọi là phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận:

1. Đổi chỗ 2 dòng cho nhau.
2. Nhân một dòng cho một số khác 0.
3. Nhân một dòng cho một số bất kỳ rồi cộng vào dòng khác.

Tương tự, bằng cách thay dòng thành cột, ta có 3 phép biến đổi sơ cấp trên các cột của ma trận.

3.3 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp

Nội dung của phương pháp này dựa trên hai nhận xét khá đơn giản sau

1. Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.
2. Một ma trận khác O bất kỳ đều có thể đưa về dạng bậc thang sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Như vậy, muốn tìm hạng của ma trận A , ta dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa A về dạng bậc thang, do nhận xét (1), hạng của A bằng hạng của ma trận bậc thang, và ta đã biết hạng của ma trận bậc thang chính bằng số dòng khác không của nó.

Cần lưu ý bạn đọc rằng: kỹ năng đưa một ma trận về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp là một kỹ năng cơ bản, nó cần thiết không chỉ trong việc tìm hạng của ma trận mà còn cần để giải nhiều bài toán khác của Đại số tuyến tính.

Sau đây, chúng tôi xin đưa ra một thuật toán để đưa một ma trận về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp:

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3.3.1 Bước 1

Bằng cách đổi chỗ 2 dòng cho nhau (nếu cần), ta luôn có thể giả sử $a_{11} \neq 0$.

Nhân dòng (1) với $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, cộng vào dòng (2),

Nhân dòng (1) với $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, cộng vào dòng (3),

$\vdots$
Nhân dòng (1) với $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$, cộng vào dòng (n).

Ta nhận được ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Chú ý. Nếu toàn bộ cột 1 bằng 0 ($a_{11} = 0, a_{21} = 0, \dots, a_{n1} = 0$) thì ta có thể bỏ qua cột 1 mà thực hiện bước 1 với cột kế tiếp.

3.3.2 Bước 2

Xét ma trận

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Nếu $B = O$ hoặc B có dạng bậc thang thì A_1 là ma trận bậc thang, thuật toán kết thúc.

Trong trường hợp ngược lại, tiếp tục lặp lại bước 1 cho ma trận B .

Cần chú ý rằng ma trận B có ít hơn ma trận A 1 dòng và 1 cột. Do đó, sau một số hữu hạn bước lặp, B sẽ là ma trận không hoặc ma trận bậc thang. Khi đó, thuật toán sẽ kết thúc.

3.4 Ví dụ

3.4.1 Ví dụ 1

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} d_3 \xrightarrow{-3d_1+d_3} \\ d_4 \xrightarrow{-2d_1+d_4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 10 & 12 & 2 \\ 0 & -3 & 13 & 16 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} d_3 \xrightarrow{-4d_2+d_3} \\ d_4 \xrightarrow{-3d_2+d_4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} d_4 \xrightarrow{-d_3+d_4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vậy $\text{rank } A = 3$

3.4.2 Ví dụ 2

Tìm hạng của ma trận vuông cấp n

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

Giải

$$\begin{aligned} B &\xrightarrow{c_1 \rightarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & a & \cdots & a \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{d_2 = d_2 - d_1 \\ d_3 = d_3 - d_1 \\ \dots \\ d_n = d_n - d_1}} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

Xảy ra 3 trường hợp sau:

1. $a \neq 1 - n$, $a \neq 1$, khi đó ma trận C là ma trận bậc thang và $\text{rank } B = \text{rank } C = n$
2. $a = 1$, khi đó ma trận C là ma trận bậc thang và $\text{rank } B = \text{rank } C = 1$
3. $a = 1 - n$, khi đó

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

Do đó, C không là ma trận bậc thang nhưng có định thức con cấp $n - 1$ khác không, đó là định thức con tạo bởi $n - 1$ dòng cuối, $n - 1$ cột cuối

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = (-n)^{n-1} \neq 0$$

và $\det C = 0$

Do đó, $\text{rank } C = n - 1$ Bởi vậy, $\text{rank } B = n - 1$.

BÀI TẬP

Tìm hạng của các ma trận sau

$$13. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm hạng của các ma trận vuông cấp n

$$19. \begin{pmatrix} 1+a & a & \cdots & a \\ a & 1+a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ a & a & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$21. \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

GIẢI BÀI TẬP HẠNG CỦA MA TRẬN

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS My Vinh Quang

Ngày 3 tháng 12 năm 2004

13) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\substack{d3 \rightarrow -d1+d3 \\ d4 \rightarrow (-2)d1+d4}]{d2 \rightarrow (-2)d1+d2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d4 \rightarrow (-3)d2+d4}]{d3 \rightarrow -d2+d3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\text{rank } \mathbf{A} = 3$.

14) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \rightarrow -5d1+d3 \\ d4 \rightarrow -2d1+d4}]{d2 \rightarrow -3d1+d2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 12 & -23 & 3 & -31 \\ 0 & 16 & -34 & 4 & -48 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d4 \rightarrow -7d1+d4}]{d3 \rightarrow -\frac{3}{2}d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{d4 \rightarrow -2d3+d4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vậy $\text{rank } \mathbf{A} = 4$.

15) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Giải

$$\mathbf{A} \xrightarrow{d1 \leftrightarrow d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \rightarrow -3d1+d3 \\ d4 \rightarrow -5d1+d4}]{d2 \rightarrow -2d1+d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d2 \leftrightarrow -\frac{1}{3}d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d4 \rightarrow 5d2+d4}]{d3 \rightarrow 2d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d3 \leftrightarrow d4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$.

16) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d5 \rightarrow -d1+d5 \\ d6 \rightarrow -d1+d6}]{\substack{d2 \rightarrow -2d1+d2 \\ d3 \rightarrow -d1+d4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d6 \rightarrow d2+d6}]{d3 \rightarrow 2d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d3 \leftrightarrow d6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d4 \rightarrow -3d3+d4 \\ d6 \rightarrow 2d3+d6}]{\substack{d5 \rightarrow \frac{2}{3}d4+d5 \\ d6 \rightarrow \frac{1}{3}d4+d6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 4$.

17) Tìm hạng của ma trận :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi cột}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & a \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \rightarrow -7d1+d3 \\ d4 \rightarrow -2d1+d4}]{d2 \rightarrow -4d1+d2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & a-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & a-12 \\ 0 & 10 & -15 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d4 \rightarrow -5d2+d4}]{d3 \rightarrow -3d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$. Với mọi a .

18) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi cột}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d4 \rightarrow -d1+d4}]{\substack{d2 \rightarrow d1+d2 \\ d3 \rightarrow -d1+d3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d3 \rightarrow d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d4 \rightarrow -d3+d4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

Vậy : nếu $a \neq 1$ thì rank $\mathbf{A} = 4$.

nếu $a = 1$ thì $\text{rank } \mathbf{A} = 3$.

19) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & a & \dots & a \\ a & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & 1+a \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c1 \rightarrow c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} 1+na & a & \dots & a \\ 1+na & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+na & a & \dots & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow[\dots]{\begin{matrix} d2 \rightarrow -d1+d2 \\ dn \rightarrow -d1+dn \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1+na & a & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nếu $a \neq -\frac{1}{n}$. Khi đó $1+na \neq 0$ và $\text{rank } \mathbf{A} = n$.

Nếu $a = -\frac{1}{n}$. Khi đó $1+na = 0$ và $\text{rank } \mathbf{A} = n-1$ vì có định thức con cấp $n-1$ gồm $n-1$ dòng cuối, cột cuối.

$$\mathbf{D}_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Còn định thức cấp n bằng 0.

20) Tìm hạng của ma trận ($n \geq 2$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Giải:

Nếu $x \neq 0$:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\dots]{\begin{matrix} c1 \rightarrow xc1 \\ d1 \rightarrow xd1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c1 \rightarrow c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\dots]{\begin{matrix} d2 \rightarrow -d1+d2 \\ d3 \rightarrow -d1+d3 \\ dn \rightarrow -d1+dn \end{matrix}} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{bmatrix}$$

Vậy $\text{rank } \mathbf{A} = n$

Nếu $x = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \rightarrow -d2+d3 \\ dn \rightarrow -d2+dn}]{\substack{d3 \rightarrow -d2+d3 \\ dn \rightarrow -d2+dn}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} \mathbf{A} = 2$.

Vậy

$$\text{rank} \mathbf{A} = n \text{ nếu } x \neq 0$$

$$\text{rank} \mathbf{A} = 2 \text{ nếu } x = 0$$

21) Tìm hạng của ma trận vuông cấp n :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c1 \rightarrow c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d2 \rightarrow -d1+d2 \\ d3 \rightarrow -d1+d3 \\ dn \rightarrow -d1+dn}]{\substack{d2 \rightarrow -d1+d2 \\ d3 \rightarrow -d1+d3 \\ dn \rightarrow -d1+dn}} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. Nếu $a \neq (1-n)b, a \neq b$ thì $\text{rank} \mathbf{A} = n$

2. $a = b \neq 0$ thì $\text{rank} \mathbf{A} = 1$

$a = b = 0$ thì $\text{rank} \mathbf{A} = 0$

3. $a = (n-1)b = 0$ thì $\text{rank} \mathbf{A} = n-1$

Vì có định thức con cấp $n-1$ (bỏ dòng đầu, cột đầu)

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} \neq 0$$

Còn định thức cấp n bằng 0.

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS My Vinh Quang

Ngày 6 tháng 12 năm 2004

1 Ma trận khả nghịch

1.1 Các khái niệm cơ bản

Cho A là ma trận vuông cấp n , ma trận A gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho

$$AB = BA = E_n \quad (1)$$

(E_n là ma trận đơn vị cấp n)

Nếu A là ma trận khả nghịch thì ma trận B thỏa điều kiện (1) là duy nhất, và B gọi là ma trận nghịch đảo (ma trận ngược) của ma trận A , ký hiệu là A^{-1} .

Vậy ta luôn có: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E_n$

1.2 Các tính chất

1. A khả nghịch $\iff A$ không suy biến ($\det A \neq 0$)
2. Nếu A, B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

1.3 Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

1.3.1 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo nhờ định thức

Trước hết, ta nhớ lại phần bù đại số của một phần tử. Cho A là ma trận vuông cấp n , nếu ta bỏ đi dòng i , cột j của A , ta được ma trận con cấp $n - 1$ của A , ký hiệu M_{ij} . Khi đó $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ gọi là phần bù đại số của phần tử nằm ở dòng i , cột j của ma trận A .

Ma trận

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A .

Ta có công thức sau đây để tìm ma trận nghịch đảo của A .

Cho A là ma trận vuông cấp n .

Nếu $\det A = 0$ thì A không khả nghịch (tức là A không có ma trận nghịch đảo).

Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Vậy A khả nghịch.

Tìm ma trận phụ hợp P_A của A . Ta có:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nhận xét. Nếu sử dụng định thức để tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông cấp n , ta phải tính một định thức cấp n và n^2 định thức cấp $n-1$. Việc tính toán như vậy khá phức tạp khi $n > 3$.

Bởi vậy, ta thường áp dụng phương pháp này khi $n \leq 3$. Khi $n \geq 3$, ta thường sử dụng các phương pháp dưới đây.

1.3.2 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng cách dựa vào các phép biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss)

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A vuông cấp n , ta lập ma trận cấp $n \times 2n$

$$[A | E_n]$$

(E_n là ma trận đơn vị cấp n)

$$[A | E_n] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Sau đó, dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận $[A | E_n]$ về dạng $[E_n | B]$. Khi đó, B chính là ma trận nghịch đảo của A , $B = A^{-1}$.

Chú ý. Nếu trong quá trình biến đổi, nếu khối bên trái xuất hiện dòng gồm toàn số 0 thì ma trận A không khả nghịch.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải

$$\begin{aligned} [A | E_4] &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{d_1 \rightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{d_1 \rightarrow \frac{1}{3}d_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow -d_1 + d_2 \\ d_3 \rightarrow -d_1 + d_3 \\ d_4 \rightarrow -d_1 + d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{d_1 \rightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[d_3 \rightarrow -d_3]{\begin{array}{l} d_2 \rightarrow -d_2 \\ d_4 \rightarrow -d_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1.3.3 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải hệ phương trình

Cho ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Để tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} , ta lập hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là ẩn, $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các tham số.

* Nếu với mọi tham số $y_1, y_2, \dots, y_n$, hệ phương trình tuyến tính (2) luôn có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

* Nếu tồn tại $y_1, y_2, \dots, y_n$ để hệ phương trình tuyến tính (2) vô nghiệm hoặc vô số nghiệm thì ma trận A không khả nghịch.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Giải

Lập hệ

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = y_4 & (4) \end{cases}$$

Ta giải hệ trên, cộng 2 vế ta có

$$(a+3)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \quad (*)$$

1. Nếu $a = -3$, chọn các tham số y_1, y_2, y_3, y_4 sao cho $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \neq 0$. Khi đó (*) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm, bởi vậy A không khả nghịch.
2. $a \neq -3$, từ (*) ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{a+3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (**)$$

Lấy (1), (2), (3), (4) trừ cho (**), ta có

$$(a-1)x_1 = \frac{1}{a+3}((a+2)y_1 - y_2 - y_3 - y_4)$$

$$(a-1)x_2 = \frac{1}{a+3}(-y_1 + (a+2)y_2 - y_3 - y_4)$$

$$(a-1)x_3 = \frac{1}{a+3}(-y_1 - y_2 + (a+2)y_3 - y_4)$$

$$(a-1)x_4 = \frac{1}{a+3}(-y_1 - y_2 - y_3 + (a+2)y_4)$$

- (a) Nếu $a = 1$, ta có thể chọn tham số y_1, y_2, y_3, y_4 để $(a+2)y_1 - y_2 - y_3 - y_4$ khác 0. Khi đó hệ vô nghiệm và do đó A không khả nghịch.
- (b) Nếu $a \neq 1$, ta có

$$x_1 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}((a+2)y_1 - y_2 - y_3 - y_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}(-y_1 + (a+2)y_2 - y_3 - y_4)$$

$$x_3 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}(-y_1 - y_2 + (a+2)y_3 - y_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}(-y_1 - y_2 - y_3 + (a+2)y_4)$$

Do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+3)} \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a+2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Tóm lại:

Nếu $a = -3$, $a = 1$ thì ma trận A không khả nghịch.

Nếu $a \neq -3$, $a \neq 1$, ma trận nghịch đảo A^{-1} được xác định bởi công thức trên.

BÀI TẬP

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

$$22. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$25. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông cấp n

$$26. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$27. \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản chưa chỉnh sửa

PGS TS. My Vinh Quang

Ngày 19 tháng 12 năm 2004

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa

Hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn, $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ là các hằng số, gọi là *hệ phương trình tuyến tính* (m phương trình, n ẩn).

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận các hệ số của hệ (1).

Ma trận

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

gọi là ma trận các hệ số mở rộng của hệ (1). Một hệ phương trình hoàn toàn xác định khi ta biết ma trận các hệ số mở rộng của nó.

Cột

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

gọi là cột tự do của hệ (1).

Chú ý rằng, hệ phương trình (1) có thể cho dưới dạng ma trận như sau

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

trong đó A là ma trận các hệ số của hệ (1).

Nhận xét: Nếu ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của một hệ phương trình tuyến tính ta được hệ mới tương đương với hệ đã cho.

1.2 Một vài hệ phương trình đặc biệt

a. Hệ Cramer

Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ Cramer nếu $m = n$ (tức là số phương trình bằng số ẩn) và ma trận các hệ số A là không suy biến ($\det A \neq 0$).

b. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ thuần nhất nếu cột tự do của hệ bằng 0, tức là $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

2 Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

2.1 Phương pháp Cramer

Nội dung của phương pháp này cũng chính là định lý sau đây:

Định lý 1 (Cramer) Cho hệ Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2)$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

là ma trận các hệ số.

Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

trong đó A_i chính là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột i của A bằng cột tự do

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ cx_2 + ax_3 = b \\ cx_1 + bx_3 = a \end{cases}$$

trong đó a, b, c là ba số khác 0.

Giải: Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

nên hệ trên là hệ Cramer. Hơn nữa

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & c & a \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = (a^2 - b^2 + c^2) b$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (-a^2 + b^2 + c^2) a$$

và

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 - c^2) c$$

Do đó, hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2.2 Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss) để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Nội dung cơ bản của phương pháp này dựa trên định lý quan trọng sau về nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính.

Định lý 2 (Định lý Cronecker-Capelly) Cho hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1), A và $\bar{A}$ lần lượt là ma trận các hệ số và ma trận các hệ số mở rộng. Khi đó:

1. Nếu $\text{rank } A < \text{rank } \bar{A}$ thì hệ (1) vô nghiệm.
2. Nếu $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = r$ thì hệ (1) có nghiệm. Hơn nữa:
 - (a) Nếu $r = n$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất.

(b) Nếu $r < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

Ta có thuật toán sau để giải hệ phương trình tuyến tính:

Lập ma trận các hệ số mở rộng $\overline{A}$. Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang. Ma trận bậc thang cuối cùng có dạng:

$$\overline{A} \rightarrow C = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & c_{1i_1}^* & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & c_{2i_2}^* & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{ri_r}^* & c_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & d_m \end{array} \right]$$

Hệ phương trình tương ứng với ma trận C tương đương với hệ ban đầu. Do đó

1. Nếu tồn tại ít nhất d_i với $r + 1 \leq i \leq m$ khác 0 thì hệ vô nghiệm.
2. Nếu $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$ thì hệ có nghiệm. Khi đó các cột $i_1, i_2, \dots, i_r$ (là các cột được đánh dấu *) giữ lại bên trái và các $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ là các ẩn còn các cột còn lại chuyển sang bên phải, các ẩn x_k ứng với các cột này sẽ trở thành tham số. Vậy ta có $n - r$ tham số và hệ đã cho tương đương với hệ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{1i_1} & c_{1i_2} & \dots & c_{1i_r} & d_1(x_k) \\ 0 & c_{2i_2} & \dots & c_{2i_r} & d_2(x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ri_r} & d_r(x_k) \end{array} \right] \quad (3)$$

trong đó $d_i(x_k)$ là các hàm tuyến tính của x_k với $k \neq i_1, i_2, \dots, i_r$. Hệ phương trình (3) là hệ phương trình dạng tam giác, ta có thể dễ dàng giải được bằng phương pháp thế dần từ dưới lên, tức là tính lần lượt $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$.

Chú ý : Nếu trong quá trình biến đổi xuất hiện 1 dòng mà bên trái bằng 0 còn bên phải khác 0 thì ta có thể kết luận hệ vô nghiệm mà không cần phải làm tiếp.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2m - 8 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2m - 8 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow (-3)d_1 + d_3 \\ d_4 \rightarrow (-1)d_1 + d_4}]{d_2 \rightarrow (-2)d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & m - 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2m - 9 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\substack{d_4 \rightarrow (-1)d_2 + d_4}]{d_3 \rightarrow (-2)d_2 + d_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m - 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2m - 10 \end{array} \right] \xrightarrow{d_4 \rightarrow (-1)d_3 + d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m - 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m - 5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

* Nếu $m \neq 5$ hệ phương trình vô nghiệm.

* Nếu $m = 5$, hệ đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 2 tham số là x_2 và x_5 . Chuyển cột 2 và cột 5 sang bên phải, hệ có dạng

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 1 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 - x_4 = 1 + 2x_5 \\ -x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

Giải từ dưới lên ta sẽ có

$$x_4 = 2x_5$$

$$x_3 = x_4 + 2x_5 + 1 = 4x_5 + 1$$

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_5 - 2x_4 = -2x_2 - 5x_5 + 1$$

Tóm lại, trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -2a - 5b + 1 \\ x_2 = a \\ x_3 = 4b + 1 \\ x_4 = 2b \\ x_5 = b \end{cases} \quad a, b \text{ tùy ý.}$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow (-1)d_1 + d_3 \\ d_4 \rightarrow (-m)d_1 + d_4}]{d_2 \rightarrow (-1)d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{d_4 \rightarrow d_2 + d_3 + d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 & 1-m \end{array} \right] = C \end{aligned}$$

Chú ý rằng $3 - 2m - m^2 = (1 - m)(m + 3)$. Bởi vậy:

1) $m = 1$, khi đó

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 3 tham số x_2, x_3, x_4 . Nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b - c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases}$$

2) $m = -3$, khi đó

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Hệ vô nghiệm.

3) $m \neq 1$ và $m \neq -3$, hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1 - m}{3 - 2m - m^2} = \frac{1}{m + 3} \\ x_3 &= x_4 = \frac{1}{m + 3}, \quad x_2 = x_4 = \frac{1}{m + 3} \\ x_1 &= 1 - x_2 - x_3 - mx_4 = \frac{1}{m + 3} \end{aligned}$$

Vậy: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{m+3}$.

Tóm lại:

- $m = 1$ hệ có vô số nghiệm;
- $m = -3$ hệ vô nghiệm;
- $m \neq 1, -3$, hệ có một nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{m+3}$.

Bài tập

Giải và biện luận các hệ sau:

$$27. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 5x_1 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 - m \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

31. Cho a_{ij} là các số nguyên. Giải hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

32. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \cdots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

33. Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẻ, có nghiệm khác 0.

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§8. Giải bài tập về ma trận nghịch đảo

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 29 tháng 12 năm 2004

Bài 21. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải

Cách 1. *Sử dụng phương pháp định thức*

Ta có: $\det A = 2 + 12 - 9 - 2 = 3$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cách 2. *Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp*

Xét ma trận

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 \rightarrow -3d_1 + d_3]{d_2 \rightarrow -2d_1 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{d_3 = -2d_2 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3 = \frac{1}{3}d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Bài 22. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta sử dụng phương pháp định thức.

Ta có $\det A = 1 + 27 + 8 - 6 - 6 - 6 = 18$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(Bạn đọc cũng có thể sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp để giải bài này)

Bài 23. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_4 & (4) \end{cases}$$

$$(1) + (2) + (3) + (4) \implies x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (*)$$

$$(*) - (1) \implies x_1 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$(*) - (2) \implies x_2 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 + y_4)$$

$$(*) - (3) \implies x_3 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 + y_4)$$

$$(*) - (4) \implies x_4 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4)$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài 24. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ -x_1 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ -x_1 - x_2 + x_4 = y_3 & (3) \\ -x_1 - x_2 - x_3 = y_4 & (4) \end{cases}$$

$$(1) + (2) - (3) + (4) \implies -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \quad (*)$$

$$(1) - (*) \implies x_1 = -y_2 + y_3 - y_4$$

$$(*) - (2) \implies x_2 = y_1 - y_3 + y_4$$

$$(4) \implies x_3 = -x_1 - x_2 - y_4 = -y_1 + y_2 - y_4$$

$$(3) \implies x_4 = x_1 + x_2 + y_3 = y_1 - y_2 + y_3$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 25. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 & (1) \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 & (2) \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} & (n-1) \\ x_n = y_n & (n) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \implies x_1 = y_1 - y_2$$

$$(2) - (3) \implies x_2 = y_2 - y_3$$

$\vdots$

$$(n-1) - (n) \implies x_{n-1} = y_{n-1} - y_n$$

$$(n) \implies x_n = y_n$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 24 tháng 1 năm 2005

§9. Giải Bài Tập Về Hệ Phương Trình Tuyến Tính

27) Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng $\bar{A}$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $\bar{A}$ về dạng bậc thang. Nhận xét rằng hệ ban đầu tương đương với hệ có ma trận các hệ số mở rộng là ma trận bậc thang sau cùng. Cụ thể ta có

$$\begin{aligned} \bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array} \right] & \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow -2d_1 + d_2 \\ d_3 \rightarrow -d_1 + d_3 \\ d_4 \rightarrow -4d_1 + d_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow 2d_2 + d_3 \\ d_3 \leftrightarrow d_2}} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array} \right] & \xrightarrow{d_3 \rightarrow -3d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & -3m+21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

- Nếu $m \neq 7$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $m = 7$ hệ tương đương với

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1^* & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6^* & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_4 . Ta có

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{7}{3}x_4, & x_2 &= 3x_3 - 7x_4 + 1 = 1 \\x_1 &= 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = \frac{7}{3}x_4 - 4x_4 = \frac{-5}{3}x_4\end{aligned}$$

Vậy, trong trường hợp này, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -5a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 7a \\ x_4 = 3a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

28) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 5x_1 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 - m \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -5 & 4 & 9-m \end{array} \right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -5 & 4 & 9-m \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow -2d_1 + d_2 \\ d_3 \rightarrow -3d_1 + d_3 \\ d_4 \rightarrow -5d_1 + d_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & 2 & 4-m \end{array} \right] \xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 - d_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & 2 & 4-m \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{d_3 \rightarrow -2d_2 + d_3 \\ d_4 \rightarrow -5d_2 + d_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 2 & 9-m \end{array} \right] \xrightarrow{d_4 \rightarrow -2d_3 + d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9-m \end{array} \right]\end{aligned}$$

- Nếu $m \neq 9$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 9$ thì hệ có dạng

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1^* & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rank } A = \text{rank } \overline{A} = 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số là x_4, x_5 , ta có

$$\begin{aligned}x_3 &= -\frac{1}{6}x_5 \\x_2 &= -x_3 + 1 = \frac{1}{6}x_5 + 1 \\x_1 &= -x_2 + x_3 + x_4 - x + 5 + 1 \\&= -\frac{1}{6}x_5 - 1 - \frac{1}{6}x_5 + x_4 - x_5 + 1 = -\frac{4}{3}x_5 + x_4\end{aligned}$$

Vậy, trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = a - 8b \\ x_2 = b + 1 \\ x_3 = -b \\ x_4 = a \\ x_5 = 6b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

29) Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Chú ý rằng $2 - m - m^2 = (2 + m)(1 - m)$. Ta có

- $m = 1$, hệ trở thành

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rank } A = \text{rank } \overline{A} = 1$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_1, x_2 . Nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- $m = -2$, hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \quad \text{hệ vô nghiệm}$$

- $m \neq 1, m \neq -2$, hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1 + m - m^2 - m^3}{(2 + m)(1 - m)} = \frac{m^2 + 2m + 1}{m + 2} \\ x_2 = x_3 - m = \frac{m^2 + 2m + 1}{m + 2} - m = \frac{1}{m + 2} \\ x_1 = m^2 - x_2 - mx_3 = \frac{m^3 + 2m^2 - 1 - m(m^2 + 2m + 1)}{m + 2} = \frac{-m - 1}{m + 2} \end{cases}$$

30) Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[d_3 \rightarrow -md_1 + d_3]{d_2 \rightarrow -d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m & 1-m \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m & 1-m \end{array} \right] \quad (*) \end{aligned}$$

Chú ý rằng $2 - m - m^2 = (1 - m)(2 + m)$. Ta có các khả năng sau

• $m = 1$ hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rank } A = \text{rank } \overline{A} = 1$, trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc ba tham số x_2, x_3, x_4 . Nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b - c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

• $m = -2$ hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3^* & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 3 \end{array} \right]$$

Ta có $\text{rank } A = \text{rank } \overline{A} = 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3 . Ta có

$$\begin{aligned} x_4 &= 1, \quad 3x_2 = 3x_3 \Rightarrow x_2 = x_3 \\ x_1 &= -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = x_3 \end{aligned}$$

Trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

• $m \neq 1, -2$. Khi đó, từ (*) ta thấy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_4 và m . Ta có

$$(2 - m - m^2)x_3 = (1 - m) - (1 - m)x_4 \Rightarrow x_3 = \frac{(1 - m) - (1 - m)x_4}{(2 - m - m^2)} = \frac{1 - x_4}{m + 2}$$

$$(m - 1)x_2 = (m - 1)x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$x_1 = 1 - x_2 - mx_3 - x_4 = \frac{(m + 2) - (1 - x_4) - m(1 - x_4) - (m + 2)x_4}{m + 2} = \frac{1 - x_4}{m + 2}$$

Vậy, trong trường hợp này hệ có nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-a}{m+2} \\ x_2 = \frac{1-a}{m+2} \\ x_3 = \frac{1-a}{m+2} \\ x_4 = a \end{cases}$$

31) Cho a_{ij} là các số nguyên, giải hệ

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (2a_{11} - 1)x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22} - 1)x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + (2a_{nn} - 1)x_n = 0 \end{cases}$$

Gọi ma trận các hệ số của hệ phương trình trên là A_n , ta có

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 2a_{11} - 1 & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} - 1 & \cdots & 2a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & 2a_{nn} - 1 \end{vmatrix}$$

Chú ý rằng a_{ij} là các số nguyên nên các phần bù đại số của $(A_n)_{ij}$ cũng là các số nguyên, do đó nếu khai triển định thức theo dòng cuối ta sẽ có

$$\begin{aligned} \det A_n &= 2k + (2a_{nn} - 1) \begin{vmatrix} 2a_{11} - 1 & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1,n-1} \\ 2a_{21} & 2a_{22} - 1 & \cdots & 2a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a_{n-1,1} & 2a_{n-1,2} & \cdots & 2a_{n-1,n-1} - 1 \end{vmatrix} \\ &= 2k + (2a_{nn} - 1) \det A_{n-1} \\ &= 2k + 2a_{nn} \det A_{n-1} - \det A_{n-1} \\ &= 2l - \det A_{n-1} \end{aligned}$$

Do đó, $\det A_n + \det A_{n-1} = 2l$ là số chẵn, Suy ra $\det A_n$ và $\det A_{n-1}$ có cùng tính chẵn lẻ với mọi n , mà $\det A_1 = 2a_{11} - 1$ là số lẻ nên $\det A_n$ là số lẻ và do đó $\det A_n \neq 0$ (vì 0 là số chẵn). Vì hệ phương trình có $\det A_n \neq 0$ nên hệ trên là hệ Cramer và có nghiệm duy nhất là $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

32) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \cdots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

Giải: Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Xét đa thức

$$f(X) = x_n X^{n-1} + x_{n-1} X^{n-2} + \cdots + x_2 X + x_1 - 1 = 0$$

Vì $x_1, x_2, \dots, x_n$ là nghiệm của hệ nên $X = 1, 2, \dots, n$ là các nghiệm của đa thức trên. Vì $f(X)$ có bậc $\leq n-1$ mà lại có n nghiệm phân biệt nên $f(X) \equiv 0$ ($f(X)$ là đa thức không), do đó ta có $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_2 = 0, x_1 = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

33) Chứng minh hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẻ, có nghiệm không tầm thường.

Giải: Gọi A là ma trận các hệ số, theo giả thiết $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ do đó $A = A^t$. Do tính chất định thức $\det A = \det A^t$ nên ta có

$$\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A^t = (-1)^n \det A = -\det A \quad (\text{do } n \text{ lẻ})$$

Bởi vậy suy ra $\det A = -\det A$ hay $\det A = 0$, tức là $\text{rank } A = r < n$. Theo Định lý Cronecker-Capelly hệ có vô số nghiệm (phụ thuộc $n-r$ tham số) do đó hệ có nghiệm khác $(0, 0, \dots, 0)$.

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 10. Không gian vectơ

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 18 tháng 3 năm 2005

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa không gian vectơ

Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập các số thực, V là tập tùy ý khác $\emptyset$. V gọi là không gian vectơ (trên $\mathbb{R}$) (mỗi phần tử của V gọi là một vectơ) nếu trong V có 2 phép toán:

- Phép cộng 2 vectơ, tức là với mỗi cặp vectơ $\alpha, \beta \in V$ xác định được một vectơ tổng $\alpha + \beta \in V$.
- Phép nhân vô hướng một số với một vectơ, tức là với mỗi $a \in \mathbb{R}$ và vectơ $\alpha \in V$ xác định được một vectơ tích $a\alpha \in V$.

Ngoài ra, phép cộng và phép nhân trên phải thỏa mãn 8 điều kiện sau:

1. Phép cộng kết hợp; với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in V$:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

2. Phép cộng giao hoán, với mọi $\alpha, \beta \in V$:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

3. Phép cộng có vectơ-không, tồn tại vectơ $O \in V$ (vectơ-không) có tính chất:

$$\alpha + O = O + \alpha = \alpha \text{ với mọi } \alpha \in V$$

4. Có vectơ đối, với mọi vectơ $\alpha \in V$, tồn tại vectơ $-\alpha \in V$ (vectơ đối của α) có tính chất:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = O$$

5. Phép nhân phân phối với phép cộng, với mọi $a \in \mathbb{R}$ và các vectơ $\alpha, \beta \in V$:

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$$

6. Phép nhân phân phối với phép cộng, với mọi số thực $a, b \in \mathbb{R}$, mọi vectơ $\alpha \in V$:

$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$$

7. Phép nhân kết hợp. Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, với mọi vectơ $\alpha \in V$:

$$(ab)\alpha = a(b\alpha)$$

8. $1.\alpha = \alpha$ với mọi vectơ $\alpha \in V$

Như vậy, để kiểm tra tập hợp V cùng với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng có phải là không gian vectơ hay không, ta phải kiểm tra xem chúng có thỏa mãn 8 điều kiện trên hay không. Bạn đọc có thể dễ dàng tự kiểm tra các ví dụ sau.

1.2 Các ví dụ về không gian vectơ

1. $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ với:
 - Phép cộng: $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \beta = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$:
 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$
 - Phép nhân vô hướng: với mọi $a \in \mathbb{R}, a.\alpha = a(a_1, \dots, a_n) = (aa_1, \dots, aa_n)$
 thì V là một không gian vectơ.
2. $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$ - tập các ma trận cấp $m \times n$ với hệ số thực - với phép cộng là phép cộng 2 ma trận, phép nhân vô hướng là phép nhân một số thực với một ma trận, là một không gian vectơ.
3. $\mathbb{R}[x]$ - tập các đa thức với hệ số thực - với phép cộng là phép cộng hai đa thức, phép nhân vô hướng là phép nhân một số với một đa thức, là không gian vectơ.
4. $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong $\mathbb{R}^+$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân vô hướng.
 - Phép cộng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \alpha \oplus \beta = \alpha\beta$
 - Phép nhân vô hướng: với mọi $a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ : a * \alpha = \alpha^a$
 Khi đó, $(\mathbb{R}^+, \oplus, *)$ là một không gian vectơ với vectơ-không là 1, vectơ đối của vectơ α là vectơ $\frac{1}{\alpha}$

1.3 Các tính chất cơ bản

1. Vectơ O và vectơ đối $(-\alpha)$ là duy nhất.
2. Phép cộng có luật giản ước: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in V$, nếu $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ thì $\beta = \gamma$
3. $0.\alpha = O$, với mọi $\alpha \in V$,
 $a.O = O$, với mọi $a \in \mathbb{R}$,
 $(-1).\alpha = -\alpha$ với mọi $\alpha \in V$
4. Nếu $a.\alpha = O$ thì $a = 0$ hoặc $\alpha = O$
5. Nếu $\alpha \neq O$ thì $a\alpha = b\alpha \Leftrightarrow a = b$
6. $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha)$ với mọi $a \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

2 Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

2.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V là không gian vectơ, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của V .

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gọi là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính (PTTT) nếu tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = O$$

tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = O$ có nghiệm khác $(0, \dots, 0)$

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gọi là hệ vectơ độc lập tuyến tính (ĐLTT) nếu nó không phụ thuộc tuyến tính, nói cách khác hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ĐLTT khi và chỉ khi: nếu $a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = O$ với $a_i \in \mathbb{R}$ thì $a_i = 0$ với mọi i , tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = O$ có nghiệm duy nhất là $(0, \dots, 0)$

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ $\alpha_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (1, 2, 3, 4)$. Hệ trên ĐLTT hay PTTT?

Giải. Xét hệ phương trình vectơ

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 &= O \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ma trận các hệ số của hệ trên là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Dễ thấy $\text{rank } A = 3$ nên hệ trên có nghiệm duy nhất $(0, 0, 0)$. Vậy hệ vectơ trên độc lập tuyến tính.

Nhận xét. Để xét hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ĐLTT hay PTTT trong $\mathbb{R}^n$, ta lập ma trận A với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ rồi tìm $\text{rank } A$. Nếu $\text{rank } A = m$ (số vectơ) thì hệ ĐLTT, nếu $\text{rank } A < m$ thì hệ PTTT.

- Vectơ $\beta \in V$ gọi là biểu thị tuyến tính (BTTT) được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nếu tồn tại các số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ (tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ có nghiệm)

2.2 Các tính chất cơ bản

- Hệ chức vectơ-không luôn PTTT.
- Hệ gồm 1 vectơ PTTT khi và chỉ khi vectơ đó bằng O, hệ gồm 2 vectơ PTTT khi và chỉ khi 2 vectơ đó tỷ lệ.
- Nếu một hệ ĐLTT thì mọi hệ con của nó cũng ĐLTT.
- Hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ PTTT khi và chỉ khi có một vectơ trong hệ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại của hệ.
- Nếu hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ĐLTT thì hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ ĐLTT khi và chỉ khi β không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

3 Hạng của một hệ vectơ

3.1 Hệ vectơ tương đương

Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ:

$$(\alpha) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

$$(\beta) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

Ta nói hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) nếu mỗi vectơ của hệ (α) đều biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) .

Ta nói hệ (α) tương đương với hệ (β) (ký hiệu $(\alpha) \sim (\beta)$) nếu hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) và ngược lại.

Từ định nghĩa, ta có ngay quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương.

3.2 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong không gian vectơ V cho hệ vectơ $(\alpha) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ của hệ (α) gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (α) nếu $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ độc lập tuyến tính và mọi vectơ α_i của hệ (α) đều biểu thị tuyến tính được qua hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$.

Từ định nghĩa, ta có ngay hệ con độc lập tuyến tính của một hệ vectơ tương đương với hệ vectơ đó.

3.3 Bổ đề cơ bản về sự độc lập tuyến tính

Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ

$$(\alpha) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

$$(\beta) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

Nếu hệ (α) độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) thì $m \leq n$, và ta có thể thay m vectơ của hệ (β) bằng các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ của hệ (α) để được hệ mới tương đương với hệ (β) .

Từ bổ đề cơ bản, ta có ngay hai hệ vectơ ĐLTT tương đương thì có số vectơ bằng nhau.

3.4 Hạng của hệ vectơ

Trong không gian vectơ V , cho hệ vectơ $(\alpha) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

Hệ (α) có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại khác nhau. Tuy nhiên tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (α) đều tương đương với nhau (vì chúng cùng tương đương với hệ (α)). Do đó, theo bổ đề cơ bản, tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có số vectơ bằng nhau. Số đó gọi là *hạng của hệ vectơ* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; ký hiệu $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$

Như vậy ta có

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = \text{Số vectơ của hệ con độc lập tuyến tính của hệ } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

3.5 Cách tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong $\mathbb{R}^n$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

.....

$$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

Để tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ta làm như sau:

- Lập ma trận A là ma trận dòng của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, đưa ma trận A về dạng bậc thang. Khi đó:

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = \text{rank } A$$

Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ bao gồm các vectơ ứng với các dòng khác không của ma trận bậc thang.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^5$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (3, 2, 0, 1, 4)$$

$$\alpha_2 = (4, 1, 0, 2, 3)$$

$$\alpha_3 = (3, 1, -1, 0, 1)$$

$$\alpha_4 = (1, 0, 1, 2, 2)$$

Tìm một hệ con độc lập tuyến tính và hạng của hệ vectơ trên.

Giải

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\text{rank } A = 3$$

$$\text{Do đó, } \text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$$

Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$.

Bài tập

1. Xét xem $\mathbb{R}^2$ có là không gian vectơ hay không? với phép cộng và phép nhân vô hướng sau:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$a(a_1, a_2) = (aa_1, 0)$$

2. Chứng minh rằng một không gian vectơ hoặc chỉ có một vectơ, hoặc có vô số vectơ.
3. Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính. Tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ sau:

(a) $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0), \alpha_2 = (1, 2, 1, 1), \alpha_3 = (3, 2, 3, 2), \alpha_4 = (1, 1, 2, 1)$

(b) $\alpha_1 = (1, 0, 0, -1), \alpha_2 = (2, 1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1, 1), \alpha_4 = (1, 2, 3, 4), \alpha_5 = (0, 1, 2, 3)$

4. Cho hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ĐLTT trong không gian vectơ V . Chứng minh:

(a) Hệ vectơ $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ cũng ĐLTT.

(b) Hệ vectơ

$$\gamma_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m$$

$$\gamma_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\gamma_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mm}\alpha_m$$

độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det A \neq 0$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

5. Hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Chứng minh rằng:

$$\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \leq \text{rank}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

6. Cho hai hệ vectơ cùng hạng. Hệ đầu biểu thị tuyến tính được qua hệ sau. Chứng minh hai hệ vectơ đã cho tương đương.

7. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (2, 3, -1, 0), u_3 = (-1, -1, 1, 1)$$

Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3 .

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 11. Cơ Sở, Số Chiều Của Không Gian Vectơ

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 27 tháng 3 năm 2005

1. Cơ sở

Cho V là không gian vectơ, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của V .

- ★ Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gọi là hệ sinh của V nếu mọi vectơ $\beta \in V$ đều biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
- ★ Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gọi là một cơ sở của không gian vectơ V nếu nó là hệ sinh của V và là hệ độc lập tuyến tính.
- ★ Từ định nghĩa, hai cơ sở bất kỳ của V đều tương đương và độc lập tuyến tính. Do đó, theo định lý cơ bản chúng có số vectơ bằng nhau. Số đó gọi là số chiều V , ký hiệu là $\dim V$. Vậy theo định nghĩa:

$$\dim V = \text{số vectơ của một cơ sở bất kỳ của } V$$

- ★ Không gian vectơ có cơ sở gồm hữu hạn vectơ gọi là không gian vectơ hữu hạn chiều. Không gian vectơ khác không, không có cơ sở gồm hữu hạn vectơ gọi là không gian vectơ vô hạn chiều. Đại số tuyến tính chủ yếu xét các không gian vectơ hữu hạn chiều.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Không gian $\mathbb{R}^n$, xét các vectơ:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra $e_1, e_2, \dots, e_n$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$, gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và ta có $\dim \mathbb{R}^n = n$

Ví dụ 2. Trong không gian vectơ các ma trận cấp $m \times n$ hệ số thực $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Ta xét hệ vectơ $\{E_{ij}\}$, trong đó:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{hàng } i, \\ \uparrow \\ \text{cột } j \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

là cơ sở của $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ và do đó ta có $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$

Ví dụ 3. $\mathbb{R}_n[x]$ là tập các đa thức với hệ số thực có bậc $\leq n$ với các phép toán thông thường là một không gian vectơ. Hệ vectơ $1, x, x^2, \dots, x^n$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_n[x]$ và ta có $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$

3. Tính chất cơ bản của không gian vectơ hữu hạn chiều

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều, $\dim V = n$. Khi đó:

- (a) Mọi hệ vectơ có nhiều hơn n vectơ đều phụ thuộc tuyến tính
- (b) Mọi hệ có n vectơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở của V
- (c) Mọi hệ có n vectơ là hệ sinh của V đều là cơ sở của V
- (d) Mọi hệ độc lập tuyến tính, có k vectơ đều có thể bổ sung thêm $n - k$ vectơ để được cơ sở của V

Chú ý rằng từ tính chất (b), (c) nếu biết $\dim V = n$ thì để chứng minh một hệ n vectơ là cơ sở của V ta chỉ cần chứng minh hệ đó là hệ độc lập tuyến tính hoặc hệ đó là hệ sinh.

4. Tọa độ của vectơ trong cơ sở.

(a) Định nghĩa

Cho V là không gian vectơ n chiều ($\dim V = n$) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của V . Với $x \in V$, khi đó x viết được duy nhất dưới dạng:

$$x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gọi là tọa độ của x trong cơ sở (α) , ký hiệu:

$$x/(\alpha) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Hoặc:

$$[x]/(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(b) Ma trận đổi cơ sở, công thức đổi tọa độ

Trong không gian vectơ V cho 2 cơ sở:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (\alpha)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \quad (\beta)$$

Khi đó, các vectơ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ viết được duy nhất dưới dạng:

$$\begin{cases} \beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \beta_n &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

Ma trận các hệ số chuyển vị:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β)

Từ định nghĩa, ta có ngay $T_{\alpha\beta}$ là ma trận khả nghịch và $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{-1}$

(c) **Công thức đổi tọa độ**

Cho V là không gian vectơ, $x \in V$, và các cơ sở của V là:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (\alpha)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \quad (\beta)$$

Giả sử:

$$x/(\alpha) = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x/(\beta) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Khi đó ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

hay viết một cách ngắn gọn: $[x]/(\alpha) = T_{\alpha\beta}[x]/(\beta)$

Công thức trên cho phép tính tọa độ của vectơ x trong cơ sở (α) theo tọa độ của vectơ x trong cơ sở (β) .

5. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (-1, 2, 1), \quad \alpha_3 = (1, 3, 2) \quad (\alpha)$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1), \quad \beta_2 = (1, 1, 0), \quad \beta_3 = (0, 1, 1) \quad (\beta)$$

(a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β) .

(b) Viết công thức tính tọa độ của vectơ x trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β) .

Giải:

(a) Giả sử:

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \quad (1)$$

$$\beta_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 \quad (2)$$

$$\beta_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \quad (3)$$

Khi đó theo định nghĩa

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Để tìm a_i, b_i, c_i ta phải giải các phương trình vectơ (1), (2), (3).

$$\text{Phương trình (1) tương đương với hệ: } \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2) tương đương với hệ: } \begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 1 \\ b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (3) tương đương với hệ: } \begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases}$$

Để giải 3 hệ trên, ta dùng phương pháp Gauss. Ma trận các hệ số mở rộng:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hệ 1) } a_3 = -2, \quad a_2 = -1 - a_3 = 1, \quad a_1 = a_2 - a_3 + 1 = 4$$

$$\text{Hệ 2) } b_3 = 3, \quad b_2 = 1 - b_3 = -2, \quad b_1 = b_2 - b_3 + 1 = -4$$

$$\text{Hệ 3) } c_3 = -1, \quad c_2 = -c_3 = 1, \quad c_1 = c_2 - c_3 = 2$$

Vậy ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β) là:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Giả sử

$$x/(\alpha) = (x_1, x_2, x_3), \quad x/(\beta) = (y_1, y_2, y_3)$$

Công thức tính tọa độ của vectơ x trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β) là:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

hay

$$x_1 = 4y_1 - 4y_2 + 2y_3$$

$$x_2 = y_1 - 2y_2 + y_3$$

$$x_3 = -2y_1 + 3y_2 - y_3$$

Ví dụ 2.

Trong $\mathbb{R}_n[x]$ cho 2 cơ sở:

$$\begin{aligned} u_1 = 1, \quad u_2 = x, \quad u_3 = x^2, \quad \dots, \quad u_{n+1} = x^n & \quad (U) \\ v_1 = 1, \quad v_2 = x - a, \quad v_3 = (x - a)^2, \quad \dots, \quad v_{n+1} = (x - a)^n & \quad (V) \end{aligned}$$

trong đó a là hằng số.

- (a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ (U) sang (V)
- (b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ (V) sang (U)

Giải

- (a) Ta có:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (x - a)^k = C_k^0(-a)^k + C_k^1(-a)^{k-1}x + \dots + C_k^k x^k \\ &= C_k^0(-a)^k u_1 + C_k^1(-a)^{k-1} u_2 + \dots + C_k^k u_{k+1} + 0u_{k+2} + \dots + 0u_{n+1} \end{aligned}$$

lần lượt cho $k = 0, 1, \dots, n$ ta có:

$$T_{UV} = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0(-a) & \dots & C_n^0(-a)^k & \dots & C_n^0(-a)^n \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_k^1(-a)^{k-1} & \dots & C_n^1(-a)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_k^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}$$

- (b) Ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= x^k = [(x - a) + a]^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}x + \dots + C_k^k x^k \\ &= C_k^0 a^k v_1 + C_k^1 a^{k-1} v_2 + \dots + C_k^k v_{k+1} + 0v_{k+2} + \dots + 0v_{n+1} \end{aligned}$$

lần lượt cho $k = 0, 1, \dots, n$ ta có:

$$T_{UV} = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 a & \dots & C_n^0 a^k & \dots & C_n^0 a^n \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_k^1 a^{k-1} & \dots & C_n^1 a^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_k^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP

1. Trong $\mathbb{R}_3[x]$ cho các vectơ:

$$u_1 = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$u_2 = 2x^3 + x^2 - x + 1$$

$$u_3 = 3x^3 + 3x^2 - x + 2$$

Tìm điều kiện để vectơ $u = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3 .

2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vectơ:

$$u_1 = (1, 2, 1), \quad u_2 = (2, -2, 1), \quad u_3 = (3, 2, 2) \quad (U)$$

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0) \quad (V)$$

(a) Chứng minh rằng $(U), (V)$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$

(b) Tìm các ma trận đổi cơ sở từ (U) sang (V) và từ (V) sang (U)

3. Trong $\mathbb{R}^2$ cho các cơ sở $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

Biết:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

và cơ sở (γ) : $\gamma_1 = (1, 1), \quad \gamma_2 = (1, 0)$

Tìm cơ sở (α)

4. Cho $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong $\mathbb{R}^+$ ta định nghĩa 2 phép toán

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x \oplus y = xy$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+ \quad a \times x = x^a$$

Biết rằng $(\mathbb{R}^+, \oplus, \times)$ là không gian vectơ. Tìm cơ sở, số chiều của không gian đó

5. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ sao cho } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Biết rằng V cùng với phép cộng hai ma trận và phép nhân 1 số với 1 ma trận là một không gian vectơ. Tìm cơ sở và số chiều của V .

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 12. Không gian vectơ con

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

1 Định nghĩa và các ví dụ

1.1 Định nghĩa

Cho V là không gian vectơ. Tập con U (khác rỗng) của V gọi là không gian vectơ con của V nếu các phép toán cộng và phép toán nhân vô hướng của V thu hẹp trên U là các phép toán trong U , đồng thời U cùng với các phép toán đó làm thành một không gian vectơ.

Từ định nghĩa không gian vectơ con, ta dễ dàng có được kết quả dưới đây.

1.2 Tiêu chuẩn của không gian vectơ con

Tập con U (khác rỗng) của không gian vectơ V là không gian vectơ con của V khi và chỉ khi:

1. Với mọi $\alpha, \beta \in U$, ta có: $\alpha + \beta \in U$
2. Với mọi $\alpha \in U$, ta có $-\alpha \in U$

Như vậy, việc kiểm tra tập con U của V có là không gian vectơ con hay không khá đơn giản: ta chỉ việc kiểm tra xem U có các tính chất 1 và 2 hay không. Bạn đọc có thể vận dụng tiêu chuẩn trên để tự kiểm tra các ví dụ sau.

1.3 Các ví dụ

1.3.1 Ví dụ 1

Tập $\{0\}$ chỉ gồm vectơ-không là không gian vectơ con của V .

Tập V cũng là không gian vectơ con của V .

Các không gian con $\{0\}, V$ gọi là các không gian vectơ con tầm thường của V .

1.3.2 ví dụ 2

$A = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

$B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ không là không gian con của $\mathbb{R}^n$, có thể dễ dàng kiểm tra B không có tính chất 2.

1.3.3 Ví dụ 3

Tập $\mathbb{R}_n[x]$ gồm đa thức không và các đa thức hệ số thực có bậc $\leq n$ là không gian con của $\mathbb{R}[x]$.

Tập các đa thức hệ số thực bậc n không là không gian con của $\mathbb{R}[x]$ vì cả 2 điều kiện 1 và 2 đều không được thỏa mãn.

1.3.4 Ví dụ 4

Tập $T_n(\mathbb{R})$ các ma trận tam giác trên cấp n là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n .

1.4 Số chiều của không gian con

Liên quan đến số chiều của không gian vectơ con, ta có định lý sau:

Nếu U là không gian vectơ con của V thì $\dim U \leq \dim V$ và $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

Chứng minh

Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là cơ sở của U ; $\beta_1, \dots, \beta_n$ là cơ sở của V . Vì $U \subset V$ nên hệ vectơ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) . Do đó theo bổ đề cơ bản, ta có $m \leq n$, tức là $\dim U \leq \dim V$.

Nếu $\dim U = \dim V = n$ thì $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là hệ độc lập tuyến tính có đúng $n = \dim V$ vectơ nên $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của V . Do đó $U = V$.

2 Một số các không gian con

2.1 Không gian giao và không gian tổng

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta có thể dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

- Nếu A, B là các không gian vectơ con của V thì $A \cap B$ là không gian vectơ con của V .
Tổng quát, giao của một họ tùy ý các không gian vectơ con của V là không gian vectơ con của V .
- Cho A, B là các không gian vectơ con của V , ta định nghĩa:

$$A + B := \{x = \alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\} \subset V$$

$$(x \in A + B \Leftrightarrow x = \alpha + \beta \text{ với } \alpha \in A, \beta \in B)$$

Khi đó, $A + B$ là không gian vectơ con của V gọi là không gian tổng của các không gian con A và B .

Liên quan đến số chiều của không gian giao và không gian tổng ta có định lý sau.

Định lý. Nếu A, B là các không gian con của không gian vectơ V (hữu hạn chiều) thì:

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Chứng minh. Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ là cơ sở của $A \cap B$ ($\dim A \cap B = r$). Vì $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính của A nên ta có thể bổ sung thêm các vectơ để được hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ là cơ sở của A ($\dim A = r + s$).

Tương tự, ta có thể bổ sung thêm các vectơ để được hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ là cơ sở của B ($\dim B = r + t$).

Ta chứng minh hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ là cơ sở của $A + B$. Thật vậy:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ là hệ sinh vì: với mọi $x \in A + B$, ta có $x = y + z$ với $y \in A, z \in B$.

Vì $y \in A$ nên $y = a_1\alpha_1 + \dots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \dots + b_s\beta_s$

Vì $z \in B$ nên $z = a'_1\alpha_1 + \dots + a'_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \dots + c_t\gamma_t$

trong đó $a_i, a'_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$.

Khi đó, $x = (a_1 + a'_1)\alpha_1 + \dots + (a_r + a'_r)\alpha_r + b_1\beta_1 + \dots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + \dots + c_t\gamma_t$

Vậy hệ trên là hệ sinh của $A + B$.

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Giả sử $a_1\alpha_1 + \dots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \dots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + \dots + c_t\gamma_t = 0$ (1)

trong đó $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$.

Xét vectơ $x = a_1\alpha_1 + \dots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \dots + b_s\beta_s = -c_1\gamma_1 - \dots - c_t\gamma_t$ (2)

Vì $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ là cơ sở của A nên $x \in A$. Mặt khác, $\gamma_1, \dots, \gamma_t \in B$ nên $x \in B$.

Do đó $x \in A \cap B$. Bởi vậy, $x = a'_1\alpha_1 + \dots + a'_r\alpha_r$ (3) với $a'_i \in \mathbb{R}$.

Từ (2) và (3) ta có:

$$(a_1 - a'_1)\alpha_1 + \dots + (a_r - a'_r)\alpha_r + b_1\beta_1 + \dots + b_s\beta_s = 0$$

Vì $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ độc lập tuyến tính nên $b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$.

Thay vào (1) ta có:

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \dots + c_t\gamma_t = 0$$

Do đó, $a_1 = \dots = a_r = c_1 = \dots = c_t = 0$

Vậy hệ trên độc lập tuyến tính

Như vậy, ta đã chứng minh được hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ là cơ sở của $A + B$.
Do đó:

$$\begin{aligned} \dim(A + B) &= r + s + t \\ &= (r + s) + (r + t) - r \\ &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) \end{aligned}$$

2.2 Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

Cho V là không gian vectơ, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là hệ vectơ của V . Ta định nghĩa:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle := \{x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \mid a_i \in \mathbb{R}\} \subset V$$

$$(x \in V \Leftrightarrow \text{Tồn tại } a_i \in \mathbb{R} \text{ để } x = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n)$$

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta có ngay $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ là không gian vectơ con của V . Không gian con này gọi là không gian con của V sinh bởi hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (hay còn gọi là bao tuyến tính của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$).

Từ định nghĩa, ta có: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ chính là một hệ sinh của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.
Bởi vậy, mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ đều là hệ sinh, do đó là cơ sở của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

2.3 Không gian con các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Mỗi nghiệm của hệ (I) có thể xem là một vectơ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con có thể dễ dàng chứng minh tập nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (I) là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Không gian con này gọi là không gian con các nghiệm của hệ (I).

Nếu ta ký hiệu $r = \text{rank } A$ thì số chiều của không gian con các nghiệm của hệ (I): $\dim N = n - r$. Cơ sở của không gian nghiệm N của hệ (I) ta gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ (I). Để tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ (I) (cơ sở của không gian nghiệm N), ta làm như sau:

- Giải hệ phương trình (I), hệ có nghiệm tổng quát phụ thuộc $n - r$ tham số.
- Giả sử các tham số là $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}$.
Cho $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = 0, \dots, x_{i_{n-r}} = 0$, tức là $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}) = (1, 0, \dots, 0)$. Tính các x_i còn lại theo công thức nghiệm tổng quát, ta sẽ được một nghiệm của hệ (I) ký hiệu là α_1 .
- Tương tự với $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{n-r}}) = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}) = (0, 0, \dots, 1)$, ta sẽ thu được các nghiệm $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$.

Khi đó, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ là cơ sở của N (là hệ nghiệm cơ bản của hệ (I)).

Bạn đọc sẽ thấy rõ quá trình trên thông qua ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ. Tìm cơ sở của không gian nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Giải. Đầu tiên ta giải hệ đã cho.

Biến đổi ma trận các hệ số mở rộng:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\text{rank } \overline{A} = 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số là x_2, x_5 . Ta có:

$$x_4 = 2x_5$$

$$x_3 = x_4 + 2x_5 = 4x_5$$

$$x_1 = -2x_2 - 2x_4 - x_5 = -2x_2 - 5x_5$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_5 \\ x_3 = 4x_5 \\ x_4 = 2x_5 \\ x_2, x_5 \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Chọn $x_2 = 1, x_5 = 0$, ta sẽ có $x_1 = -2, x_3 = 0, x_4 = 0$, ta được vectơ $\alpha_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$.

Chọn $x_2 = 0, x_5 = 1$, ta sẽ có $x_1 = -5, x_3 = 4, x_4 = 2$, ta được vectơ $\alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$.

Vậy cơ sở của không gian nghiệm N của hệ trên là hệ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $N = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\dim N = 2$.

2.4 Một vài nhận xét

Cho A và B là các không gian vectơ con của V . Nếu $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$, $B = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ thì $A + B = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$.

Thật vậy, vì $A \subset A + B$, $B \subset A + B$ nên các vectơ $\alpha_i, \beta_j \in A + B$, và do đó ta có $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle \subset A + B$.

Ngược lại, nếu $x \in A + B$ thì $x = y + z$ trong đó $y \in A$, $z \in B$. Ta có $y \in A$ nên $y = a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m$, đồng thời $z \in B$ nên $z = b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n$, với $a_i, b_j \in \mathbb{R}$.

Bởi vậy, $x = y + z = a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m + b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n \in A + B$.

Từ nhận xét trên ta có chú ý sau:

Nếu $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$, $B = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ thì $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ là một hệ sinh của $A + B$ và do đó hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ là cơ sở của $A + B$.

* Nếu A là không gian vectơ con của không gian vectơ hữu hạn chiều V thì A luôn có thể viết dưới dạng $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$.

Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là một cơ sở (hoặc hệ sinh) bất kỳ của A thì ta có ngay $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$.

* Nếu A là không gian vectơ con của không gian R^n thì A có thể xem như không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có n ẩn nào đó.

Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là cơ sở của A thì $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$. Vectơ $x = (a_1, \dots, a_n) \in A$ khi và chỉ khi phương trình vectơ $x = x_1\alpha_1 + \dots + x_m\alpha_m$ ($x_i \in \mathbb{R}$) có nghiệm, khi và chỉ khi $x = (a_1, \dots, a_n)$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nào đó. Bạn đọc có thể thấy rõ điều này qua ví dụ sau.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $\alpha_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (2, 0, 1, 1)$ và cho không gian con $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

Tìm một điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A$.

Giải. Vectơ $x \in A$ khi và chỉ khi phương trình $(a_1, a_2, a_3, a_4) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ có nghiệm, nghĩa là hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ -1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right] \quad (*)$$

có nghiệm.

Biến đổi hệ (*):

$$(*) \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & -1 & -1 & -a_1 + a_4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + a_3 + a_4 \end{array} \right]$$

Hệ (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Do đó, điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A$ là: $\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$

Và do đó, A chính là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài tập

13. Cho A, B là các không gian vectơ con của không gian vectơ V . Chứng minh rằng $A \cup B$ là không gian vectơ con của V khi và chỉ khi $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.
14. Cho V là không gian vectơ và A là không gian vectơ con của V . Chứng minh rằng tồn tại không gian vectơ con B của V sao cho $A + B = V$, $A \cap B = \{0\}$.
15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ: $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, -1, 0, 1)$, $u_4 = (1, 2, -1, -2)$ và $E = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.
- (a) Tìm một cơ sở và số chiều của E .
 - (b) Tìm một điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$.
 - (c) Cho vectơ $v_1 = (1, a^3, a, 1)$, $v_2 = (1, b, b^3, 1)$, $v_3 = (ab + 1, ab, 0, 1)$. Tìm a, b để v_1, v_2, v_3 là cơ sở của E .
16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con:
- $$U = \langle (2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, -2, -1, -1) \rangle$$
- $$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \left| \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right. \right\}$$
- (a) Tìm cơ sở, số chiều của các không gian vectơ $U, V, U + V$.
 - (b) Tìm cơ sở, số chiều của không gian vectơ con $U \cap V$.
17. Cho U là không gian vectơ con của V . Biết rằng $\dim U = m < \dim V = n$. Chứng minh:
- (a) Có cơ sở của V không chứa vectơ nào của U .
 - (b) Có cơ sở của V chứa đúng k vectơ của U ($0 \leq k \leq m$).
18. Cho A, B là các ma trận cấp $m \times n$ ($A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$). Chứng minh:

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 13. Bài tập về không gian vectơ

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1. Xét xem $\mathbb{R}^2$ có là không gian vectơ hay không với phép cộng và phép nhân vô hướng sau:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ a_*(a_1, a_2) &= (aa_1, 0)\end{aligned}$$

Giải. Bạn đọc có thể kiểm tra trực tiếp rằng 7 điều kiện đầu của không gian vectơ đều thỏa mãn, riêng điều kiện thứ 8 không thỏa mãn vì với $\alpha = (1, 1)$, khi đó: $1_*\alpha = 1_*(1, 1) = (1, 0) \neq \alpha$.

Vậy $\mathbb{R}^2$ với các phép toán trên không là không gian vectơ vì không thỏa mãn điều kiện 8. $\square$

2. Chứng minh rằng một không gian vectơ hoặc chỉ có một vectơ, hoặc có vô số vectơ.

Giải. Giả sử V là không gian vectơ và V có nhiều hơn 1 vectơ, ta chứng minh V chứa vô số vectơ. Thật vậy, vì V có nhiều hơn một vectơ nên tồn tại vectơ $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$. Khi đó, V chứa các vectơ $a\alpha$ với $a \in \mathbb{R}$. Mặt khác:

$$\begin{aligned}\forall a, b \in \mathbb{R}, a\alpha = b\alpha &\Leftrightarrow (a - b)\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \quad (\text{vì } \alpha \neq 0) \\ &\Leftrightarrow a = b\end{aligned}$$

Bởi vậy có vô số các vectơ dạng $a\alpha$, $a \in \mathbb{R}$, do đó V chứa vô số vectơ. $\square$

3. Xét sự ĐLTT, PTTT. Tìm hạng và hệ con ĐLTT tối đại của các hệ vectơ sau:

a $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (3, 2, 3, 2)$, $\alpha_4 = (1, 1, 2, 1)$

b $\alpha_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_5 = (0, 1, 2, 3)$.

Giải. **a.** Lập ma trận A tương ứng và tìm hạng của ma trận A :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\text{rank}\mathbf{A} = 3$, ít hơn số véctơ, nên hệ trên là hệ PTTT. Vì 3 dòng khác không của ma trận ứng với các véctơ $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2$, nên hệ con ĐLTT tối đại của $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2$ và $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$.

b. Giải tương tự câu a., bạn đọc tự giải.

□

4. Cho hệ véctơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ĐLTT trong không gian véctơ V . Chứng minh

a. Hệ véctơ $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ cũng ĐLTT.

b. Hệ véctơ:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1m}\alpha_m \\ \gamma_2 &= a_{21}\alpha_1 + \dots + a_{2m}\alpha_m \\ &\vdots \\ \gamma_m &= a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mm}\alpha_m \end{aligned}$$

ĐLTT khi và chỉ khi $\det\mathbf{A} \neq 0$, trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Giải. a. Giả sử $b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \dots + b_m\beta_m = 0$ với $b_i \in \mathbf{R}$

$$\Leftrightarrow b_1\alpha_1 + b_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + b_m(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_1 + \dots + b_m)\alpha_1 + (b_2 + \dots + b_m)\alpha_2 + \dots + b_m\alpha_m = 0$$

Vì $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ĐLTT nên ta có:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} b_1 + b_2 + \dots + b_{m-1} + b_m & = & 0 \\ b_2 + \dots + b_{m-1} + b_m & = & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & b_{m-1} + b_m & = & 0 \\ & & & b_m & = & 0 \end{array} \right.$$

Suy ngược từ dưới lên, ta có: $b_m = b_{m-1} = \dots = b_1 = 0$.

Vậy $\beta_1, \dots, \beta_m$ ĐLTT.

b Giả sử $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_m\gamma_m = 0$ với $c_j \in \mathbf{R}$

$$\Leftrightarrow (a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{m1}c_m)\alpha_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{m2}c_m)\alpha_2 + \dots + (a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + \dots + a_{mm}c_m)\alpha_m = 0$$

DLTT khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính (*) có nghiệm duy nhất $(0, 0, \dots, 0)$ khi và chỉ khi ma trận các hệ số của hệ (*) không suy biến khi và chỉ khi $\det \mathbf{A} \neq 0$.

5. Hệ véctơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ véctơ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Chứng minh $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \leq \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

☐

6. Cho 2 hệ véctơ cùng hạng, hệ đầu biểu thị tuyến tính được qua hệ sau. Chứng minh 2 hệ véctơ tương đương.

Giải. Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (α), $\beta_1, \dots, \beta_n$ (β) thỏa mãn đề ra. Vì hai hệ vectơ cùng hạng nên ta có thể giả sử $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta) = k$, đồng thời $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ và $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}$ lần lượt là hệ con ĐLTT tối đại của các hệ vectơ (α) và (β). Vì hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) nên hệ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}$, lại do hệ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ ĐLTT nên theo Bổ đề cơ bản, ta có thể thay k vectơ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$, cho k vectơ $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}$ để được hệ vectơ mới $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ tương đương với hệ vectơ $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}$, tức là $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ tương đương với $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}$. Mặt khác, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ tương đương với hệ (α), $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}$ tương đương với hệ (β), do đó ta có hệ (α) tương đương với hệ (β). $\square$

7. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ véctơ

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (2, 3, -1, 0), u_3 = (-1, -1, 1, 1)$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hệ véctơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3 .

Giải. Vectơ u biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3 khi và chỉ khi phương trình $u = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 1 & 3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & 2 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -3 & 2 & -x_1 + x_4 \end{array} \right] \\ & \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 2 & -4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -3x_1 + 2x_2 + x_4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 2 & -4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Do đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Bởi vậy vectơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua u_1, u_2, u_3 khi và chỉ khi $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. $\square$

8. Trong $\mathbb{R}_3[x]$ cho các hệ véc tơ:

$$\begin{aligned}u_1 &= x^3 + 2x^2 + x + 1 \\u_2 &= 2x^3 + x^2 - x + 1 \\u_3 &= 3x^3 + 3x^2 - x + 2\end{aligned}$$

Tìm điều kiện để véc tơ $u = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3 .

Giải. Cách giải bài này tương tự như bài tập 7. Chi tiết cách giải xin dành cho bạn đọc. $\square$

9. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ véc tơ:

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, -2, 1), u_3 = (3, 2, 2) \quad (U)$$

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0) \quad (V)$$

a. Chứng minh $(U), (V)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b. Tìm các ma trận đổi cơ sở từ (U) sang (V) và từ (V) sang (U) .

Giải. a. Lập ma trận $\mathbf{U}$ mà các dòng của $\mathbf{U}$ là các véc tơ u_1, u_2, u_3

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ta có } \det \mathbf{U} = 2 \neq 0.$$

Do đó hệ véc tơ u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên u_1, u_2, u_3 là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tương tự v_1, v_2, v_3 là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Giải tương tự như ví dụ 1, bài 11, sau đây là chi tiết cách giải:

Để tìm ma trận $\mathbf{T}_{UV}$ ta giải 3 hệ sau:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{array} \right]\end{aligned}$$

$$\text{Hệ 1: } a_3 = -\frac{1}{2}, a_2 = -a_3 = \frac{1}{2}, a_1 = 1 - 2a_2 - 3a_3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Hệ 2: } b_3 = \frac{5}{2}, b_2 = 1 - a_3 = -\frac{3}{2}, b_1 = 1 - 2b_2 - 3b_3 = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Hệ 3: } c_3 = 2, c_2 = 1 - c_3 = -1, c_1 = 1 - 2c_2 - c_3 = -3$$

$$\text{Vậy } \mathbf{T}_{UV} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Việc tìm ma trận $\mathbf{T}_{VU}$ xin dành cho bạn đọc. $\square$

10. Trong $\mathbb{R}^2$ cho các cơ sở $(\alpha), (\beta), (\gamma)$. Biết $\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và cơ sở $(\gamma): \gamma_1 = (1, 1), \gamma_2 = (1, 0)$. Tìm cơ sở (α) .

Giải. Đầu tiên ta tìm cơ sở (β) :

Do $\mathbf{T}_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nên $\beta_1 = 3\gamma_1 + 2\gamma_2 = (5, 3)$, $\beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = (2, 1)$. Mặt khác ta có $\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nên $\mathbf{T}_{\beta\alpha} = \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ do đó:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\beta_1 + 2\beta_2 = (-1, -1) \\ \alpha_2 &= \beta_1 - \beta_2 = (3, 2)\end{aligned}$$

Vậy cơ sở $(\alpha) = \alpha_1 = (-1, -1)$, $\alpha_2 = (3, 2)$.

□

11. Cho $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong R^+ ta định nghĩa 2 phép toán

- (a) $\forall x, y \in R^+ : x \oplus y = xy$
- (b) $\forall a \in R, x \in R^+ : a * x = x^a$

Biết rằng, $(R^+, \oplus, *)$ là KGV. Tìm cơ sở, số chiều của KGV R^+ .

Giải. Với mọi vectơ $x \in R^+$ ta có:

$x \oplus 1 = x.1 = x$ do đó vectơ không trong KGV R^+ là 1.

Với mỗi vectơ $\alpha \in R^+, \alpha$ khác vectơ không (tức là $\alpha \neq 1$) ta chứng minh $\{\alpha\}$ là hệ sinh của R^+ . Thật vậy $\forall x \in R^+$ ta có: $x = \alpha^{\log_\alpha x} = (\log_\alpha x) * \alpha = a * \alpha$ trong đó $a = \log_\alpha x \in R$. Vậy x luôn biểu thị tuyến tính được qua hệ gồm 1 vectơ $\{\alpha\}$.

Mặt khác vì α khác vectơ không nên hệ $\{\alpha\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính. Vậy $\dim \mathbb{R}^+ = 1$ và cơ sở của R^+ là hệ gồm 1 vectơ $\{\alpha\}$ với α là số thực dương, khác 1. □

12. Cho $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

biết rằng V cùng với phép cộng 2 ma trận và phép nhân 1 số với ma trận là KGV. Tìm cơ sở, số chiều của V .

Giải. Xét 2 vectơ trong V :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Khi đó, với mọi vectơ $X = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in V$ ta luôn có $X = a.A_1 + b.A_2$. Vậy $\{A_1, A_2\}$ là 1 hệ sinh của V .

Mặt khác, với mọi $a, b \in R$ ta có

$$a.A_1 + b.A_2 = 0 \Leftrightarrow a.A_1 + b.A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0, b = 0$$

do hệ vectơ $\{A_1, A_2\}$ độc lập tuyến tính.

Vậy $\{A_1, A_2\}$ là cơ sở của V và $\dim V = 2$ □

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 14. Bài tập về không gian vectơ (tiếp theo)

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

13. Cho A, B là các KGVTV con của KGVTV V . Chứng minh rằng $A \cup B$ là KGVTV con của KGVTV V khi và chỉ khi $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

Giải. Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì $A \cup B = B$ hoặc $A \cup B = A$ nên $A \cup B$ là KGVTV con của V .

Ngược lại, giả sử $A \cup B$ là KGVTV con của V nhưng $A \not\subset B$ và $B \not\subset A$. Khi đó tồn tại $x \in A, x \notin B$ và $y \in B, y \notin A$. Ta chứng minh $x + y \notin A \cup B$. Thật vậy, nếu $z = x + y \in A \cup B$ thì $z \in A$, hoặc $z \in B$, do đó $y = z - x \in A$ hoặc $x = z - y \in B$. Điều này trái với cách chọn x, y . Vậy $x + y \notin A \cup B$. Như vậy, tồn tại $x, y \in A \cup B$ nhưng $x + y \notin A \cup B$, do đó $A \cup B$ không là KGVTV con của V (!). Mâu thuẫn chứng tỏ $A \subset B$ hoặc $B \subset A$. $\square$

14. Cho V là KGVTV, A là KGVTV con của V . Chứng minh tồn tại KGVTV con B của V sao cho $A + B = V$ và $A \cap B = \{0\}$

Giải. Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là một cơ sở trong A , khi đó $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong V , do đó ta có thể bổ sung thêm các vectơ, để được hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của V . Đặt $B = \langle \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \rangle$. Khi đó, vì $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ nên $A + B = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \rangle = V$. Mặt khác, nếu $x \in A \cap B$, thì tồn tại các số $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x = a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k \quad \text{và} \quad x = b_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + b_n\alpha_n$$

do đó $a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k - b_{k+1}\alpha_{k+1} - \dots - b_n\alpha_n = 0$, vì hệ vectơ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ DLTT nên $a_i = 0, b_j = 0$, do đó $x = 0$. Vậy, $A \cap B = \{0\}$. $\square$

15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ: $u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (0, -1, 0, 1), u_4 = (1, 2, -1, -2)$ và $E = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.

a. Tìm cơ sở, số chiều của E .

b. Tìm một điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$.

c Cho $v_1 = (1, a^3, a, 1), v_2 = (1, b, b^3, 1), v_3 = (ab + 1, ab, 0, 1)$. Tìm a, b để v_1, v_2, v_3 là cơ sở của E .

Giải. a. Để tìm cơ sở, số chiều của E , ta tìm hệ con ĐLTT tối đại của hệ sinh u_1, u_2, u_3, u_4 của E . Lập và biến đổi ma trận:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{aligned}$$

Ma trận bậc thang sau cùng bậc 3, và 3 dòng khác không ứng với các vectơ u_1, u_3, u_2 . Do đó, $\dim E = 3$ và cơ sở của E là hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ và $E = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

b. $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$ khi và chỉ khi phương trình vectơ $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ có nghiệm. Phương trình vectơ trên tương đương với hệ sau:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & a_4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & a_4 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 + a_4 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Như vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$.

Vậy $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E \Leftrightarrow a_1 + a_3 = a_2 + a_4$.

c. Vì $\dim E = 3$ nên $\{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở của E khi và chỉ khi $v_1, v_2, v_3 \in E$ và $\{v_1, v_2, v_3\}$ ĐLTT. Do câu b., $v_1 \in E \Leftrightarrow 1 + a = a^3 + 1 \Leftrightarrow a = 0, 1, -1$, $v_2 \in E \Leftrightarrow 1 + b^3 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0, 1, -1$. Xét các trường hợp có thể xảy ra:

- $a = 0$ hoặc $b = 0$, khi đó $v_1 = v_2$ hoặc $v_2 = v_3$, hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính nên không là cơ sở của E .
- $a = b$ thì $v_1 = v_2$ nên hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ không là cơ sở của E .
- Còn lại 2 khả năng là $a = 1, b = -1$ hoặc $a = -1, b = 1$, kiểm tra trực tiếp ta thấy hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ĐLTT, do đó là cơ sở của E .

□

16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các KGVT con

$$U = \langle (2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, -2, -1, -1) \rangle$$

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \left| \begin{array}{l} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

- a. Tìm cơ sở, số chiều của các KGVTV con U , V , $U + V$.
b. Tìm cơ sở, số chiều của KGVTV con $U \cap V$

Giải. a. • Dễ thấy cơ sở của U là các vectơ $\alpha_1 = (2, 0, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 1)$ và do đó $U = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

Không gian con V chính là không gian nghiệm của hệ $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, bởi vậy cơ sở của V là hệ nghiệm cơ bản của hệ trên. Hệ trên có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số x_3, x_4 . Nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$, do đó hệ nghiệm cơ bản là: $\beta_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\beta_2 = (1, -1, 0, 1)$. Vậy, cơ sở của V là β_1, β_2 và $\dim V = 2$, $V = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

- Vì $U = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $V = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ nên $U + V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle$, do đó hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ là cơ sở của $U + V$. Tính toán trực tiếp ta có kết quả $\dim(U + V) = 3$ và $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\}$ là một cơ sở của $U + V$.
- b. Để tìm cơ sở của $U \cap V$, ta cần tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$. Tương tự bài tập 15., $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ khi và chỉ khi phương trình vectơ $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ có nghiệm, phương trình này tương đương với hệ sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 1 & | & x_2 \\ 1 & 1 & | & x_3 \\ 1 & 1 & | & x_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x_4 \\ 0 & 1 & | & x_2 \\ 1 & 1 & | & x_3 \\ 2 & 1 & | & x_1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x_4 \\ 0 & 1 & | & x_2 \\ 0 & 0 & | & -x_4 + x_3 \\ 0 & -1 & | & x_1 - 2x_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x_4 \\ 0 & 1 & | & x_2 \\ 0 & 0 & | & x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & | & x_1 + x_2 - 2x_4 \end{bmatrix}$$

Vậy vectơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

$$\text{Do đó, } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \cap V \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Như vậy $U \cap V$ chính là không gian nghiệm của hệ (*) và do đó cơ sở của $U \cap V$ chính là hệ nghiệm cơ bản của hệ (*). Việc giải và tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ (*) xin dành cho bạn đọc. Kết quả hệ nghiệm cơ bản của (*) là vectơ $\gamma = (2, 0, 1, 1)$, do đó $\dim(U \cap V) = 1$. Cơ sở của $U \cap V$ là vectơ γ .

□

17. Cho U là không gian vectơ con của V . Biết $\dim U = m < \dim V = n$. Chứng minh

- a. Có cơ sở của V không chứa vectơ nào của U .
b. Có cơ sở của V chứa đúng k vectơ độc lập tuyến tính của U . ($0 \leq k \leq m$).

Giải. a. Đầu tiên ta chứng minh có cơ sở của V chứa đúng m vectơ của U . Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là cơ sở của U , $\beta_1, \dots, \beta_n$ là cơ sở của V . Vì $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ĐLTT và biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_1, \dots, \beta_n$ nên theo bổ đề cơ bản về hệ vectơ ĐLTT ta có thể thay m vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ cho m vectơ của hệ $\beta_1, \dots, \beta_n$ để được hệ mới là

hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ (*) tương đương với hệ (β) . Vì (β) là cơ sở của V nên hệ (*) cũng là cơ sở của V . Cơ sở (*) có đúng m vectơ thuộc U là $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Thật vậy, nếu có $\beta_k \in U$ ($k = m+1, \dots, n$) thì β_k biểu thị tuyến tính được qua $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, do đó hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ PTTT, trái với hệ (*) là cơ sở của V .

Tiếp tục ta chứng minh có cơ sở của V không chứa vectơ nào của U :

Vì hệ vectơ (*) ĐLTT nên bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta có hệ $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ cũng là hệ ĐLTT, do đó là cơ sở của V . Vì $\alpha_i \in U$, $\beta_n \notin U$ nên $\alpha_i + \beta_n \notin U$, do đó hệ vectơ trên chính là cơ sở của V không chứa vectơ nào của U .

- b. Giả sử $v_1, \dots, v_n$ là cơ sở của V không chứa vectơ nào của U và giả sử $u_1, \dots, u_k$ là hệ vectơ ĐLTT của U . Vì $u_1, \dots, u_k$ biểu thị tuyến tính được qua $v_1, \dots, v_n$ nên theo bổ đề cơ bản về hệ vectơ ĐLTT, ta có thể thay k vectơ $u_1, \dots, u_k$ cho k vectơ của hệ $v_1, \dots, v_n$ để được hệ mới $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ chính là cơ sở của V chứa đúng k vectơ của U .

□

18. Cho $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ là các ma trận cấp $m \times n$. ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$). Chứng minh

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank}\mathbf{A} + \text{rank}\mathbf{B}$$

Giải. Giả sử $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$.

Ta đặt $\alpha_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\alpha_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\alpha_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ là các vectơ dòng của $\mathbf{A}$, khi đó $\text{rank}\mathbf{A} = \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

Tương tự ta đặt: $\beta_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n})$, $\beta_2 = (b_{21}, \dots, b_{2n})$, $\dots$, $\beta_m = (b_{m1}, \dots, b_{mn})$ là các vectơ dòng của $\mathbf{B}$, khi đó $\text{rank}\mathbf{B} = \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$.

Các vectơ dòng của ma trận $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ chính là các vectơ $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m$ và $\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m\}$. Vậy ta cần chứng minh:

$$\text{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m\} \leq \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

Giả sử $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ là hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (do đó, $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = k$) và $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$ là hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\beta_1, \dots, \beta_m$ (do đó $\text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\} = l$). Khi đó vì α_i biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ và β_j biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$ nên $\alpha_i + \beta_j$ biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$ tức là hệ vectơ $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$. Do đó, theo bài tập 5, ta có:

$$\begin{aligned} \text{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m\} &\leq \text{rank}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}\} \\ &\leq k + l = \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\} \end{aligned}$$

Vậy $\text{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m\} \leq \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, tức là

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank}\mathbf{A} + \text{rank}\mathbf{B}$$

□

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 15. Ánh xạ tuyến tính

PGS TS My Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

1 Định nghĩa và ví dụ

1.1 Định nghĩa

Cho V và U là hai không gian vectơ, ánh xạ $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính nếu f thỏa mãn 2 tính chất sau:

(i) Với mọi $\alpha, \beta \in V : f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

(ii) Với mọi $a \in \mathbb{R}, \alpha \in V : f(a\alpha) = af(\alpha)$

Một ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow V$ gọi là một phép biến đổi tuyến tính của V .

Như vậy, để kiểm tra ánh xạ $f : V \rightarrow U$ có là ánh xạ tuyến tính không, ta cần phải kiểm tra f có các tính chất (i) và (ii) không. Bạn đọc có thể dễ dàng tự kiểm tra các ví dụ sau:

1.2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Ánh xạ không:

$$\begin{aligned} 0 &: V \longrightarrow U \\ \alpha &\longmapsto 0(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2. Ánh xạ đồng nhất:

$$\begin{aligned} i_d &: V \longrightarrow V \\ \alpha &\longmapsto i_d(\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 3. Ánh xạ đạo hàm:

$$\begin{aligned} \theta &: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ f(x) &\longmapsto \theta(f) = f'(x) \end{aligned}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 4. Phép chiếu

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) \end{aligned}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Dạng tổng quát của một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ được cho trong bài tập 1.

2 Các tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính

Cho U, V là các không gian vectơ, và $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

- a. $f(0_V) = 0_U, \quad f(-\alpha) = -f(\alpha)$
- b. Với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ ta có

$$f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = a_1f(\alpha_1) + a_2f(\alpha_2) + \dots + a_nf(\alpha_n)$$

- c. Ánh xạ tuyến tính biến hệ PTTT thành hệ PTTT. Tức là nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hệ PTTT trong V thì $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_n)$ là hệ PTTT trong U .

Thật vậy, nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hệ PTTT thì tồn tại $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng không sao cho $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = 0$. Do đó $f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = f(0)$ suy ra $a_1f(\alpha_1) + a_2f(\alpha_2) + \dots + a_nf(\alpha_n) = 0$ mà $a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng thời bằng không nên $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_n)$ PTTT.

- d. Ánh xạ tuyến tính không làm tăng hạng của một hệ vectơ, tức là với mọi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \geq \text{rank}\{f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)\}$.

Thật vậy, giả sử $f(\alpha_{i_1}), \dots, f(\alpha_{i_k})$ là một hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\{f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)\}$ (do đó $\text{rank}\{f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)\} = k$), theo tính chất c., hệ vectơ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ ĐLTT, do đó hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ có không ít hơn k vectơ, tức là $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \geq k = \text{rank}\{f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)\}$.

3 Định lý cơ bản về sự xác định của ánh xạ tuyến tính

Định lý 3.1. Cho V là không gian vectơ n chiều ($\dim V = n$), $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) là cơ sở tùy ý của V , U là không gian vectơ tùy ý và $\beta_1, \dots, \beta_n$ là hệ vectơ tùy ý của U . Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$ thỏa mãn $f(\alpha_i) = \beta_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh. Tính duy nhất. Giả sử có 2 ánh xạ tuyến tính $f, g : V \rightarrow U$ thỏa mãn điều kiện của định lý. Khi đó với mọi $x \in V \Rightarrow x = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n) \\ &= a_1f(\alpha_1) + \dots + a_nf(\alpha_n) \\ &= a_1g(\alpha_1) + \dots + a_ng(\alpha_n) \\ &= g(a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n) = g(x) \end{aligned}$$

Vậy $f = g$.

$f(x) = a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n$. Rõ ràng f là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lý.

Từ định lý này, ta thấy rằng một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định khi biết ảnh của một cơ sở, và để cho một ánh xạ tuyến tính, ta chỉ cần cho ảnh của một cơ sở là đủ.

4 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

4.1 Định nghĩa và ví dụ

Cho V và U là các không gian véc tơ, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) là cơ sở của V , $\beta_1, \dots, \beta_m$ (β) là cơ sở của U . Vì $f(\alpha_i) \in U$ nên $f(\alpha_i)$ biểu thị tuyến tính được qua cơ sở (β) nên ta có:

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha_1) & = & a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1m}\beta_m \\ f(\alpha_2) & = & a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \dots + a_{2m}\beta_m \\ \dots & \dots & \dots \\ f(\alpha_n) & = & a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \dots + a_{nm}\beta_m \end{array}$$

Ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận của f trong cặp cơ sở (α) , (β) và kí hiệu là $\mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)}$

Trường hợp đặc biệt, khi f là phép biến đổi tuyến tính của V , $f: V \rightarrow V$ và $(\beta) \equiv (\alpha)$ thì ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\alpha)$ được gọi là ma trận của f trong cơ sở (α) và kí hiệu là $\mathbf{A}_{f/(\alpha)}$

Ví dụ 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, -x_2)$$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ (ma trận $\mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)}$) với các cơ sở $(\alpha), (\beta)$ như sau:

$$\begin{aligned}(\alpha) &: \alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (1, 0), \\(\beta) &: \beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (-1, 2, 1), \beta_3 = (1, 3, 2)\end{aligned}$$

Giải. Giả sử

$$f(\alpha_1) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 \quad (1)$$

$$f(\alpha_2) = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 \quad (2)$$

Khi đó, theo định nghĩa, ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ là

$$\mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ta cần giải các phương trình vectơ (1), (2) để tìm a_1, a_2, a_3 và b_1, b_2, b_3 . Các phương trình (1), (2) tương đương với các hệ phương trình tuyến tính mà ma trận các hệ số mở rộng của chúng là ma trận sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 \end{array} \right]$$

Hệ 1): $a_3 = 6, a_2 = 1 - a_3 = -5, a_1 = 3 + a_2 - a_3 = -8$

Hệ 2): $b_3 = 3, b_2 = 1 - b_3 = -2, b_1 = 1 + b_2 - b_3 = -4$

$$\text{Vậy } \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Nhắc lại rằng cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ (ký hiệu (ϵ^n)) là cơ sở:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1) \quad (\epsilon^n)$$

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra ví dụ sau:

Ví dụ 2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ được cho bởi công thức (xem bài tập 1)

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

Khi đó, ma trận của f trong cặp cơ sở $(\epsilon^n), (\epsilon^m)$ là:

$$\mathbf{A}_{f/\epsilon^n, \epsilon^m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Chẳng hạn, ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ trong ví dụ 1 có ma trận trong cặp cơ sở $(\epsilon^2), (\epsilon^3)$ là

$$\mathbf{A}_{f/\epsilon^2, \epsilon^3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Cho U, V là các KGVTV, và $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α), $\beta_1, \dots, \beta_m$ (β) lần lượt là các cơ sở của V và U . Cho $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)}$ là ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$. Với mọi vectơ $x \in V$, giả sử:

$$x/(\alpha) = (x_1, x_2, \dots, x_n), f(x)/(\beta) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Khi đó, ta có công thức sau gọi là biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính f :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Nếu ta ký hiệu $[x]/_{(\alpha)}$ là tọa độ của vectơ x trong cơ sở (α) viết theo cột, thì công thức trên có thể viết lại ngắn gọn như sau:

$$[f(x)]/_{(\beta)} = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} \cdot [x]/_{(\alpha)}$$

Trường hợp đặc biệt, khi $f : V \rightarrow V$ là phép biến đổi tuyến tính, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) là cơ sở của V , ta có:

$$[f(x)]/_{(\alpha)} = \mathbf{A}_{f/(\alpha)} \cdot [x]/_{(\alpha)}$$

4.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cặp cơ sở khác nhau

Cho V, U là các KGVTV, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) và $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ (α') là các cơ sở của V , $\beta_1, \dots, \beta_m$ (β) và $\beta'_1, \dots, \beta'_m$ (β') là các cơ sở của U . Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$. Khi đó, ta có công thức dưới đây cho thấy sự liên hệ giữa ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ với ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha'), (\beta')$:

$$\mathbf{A}_{f/(\alpha'),(\beta')} = T_{\beta\beta'}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} \cdot T_{\alpha\alpha'}$$

trong đó, $T_{\alpha\alpha'}$ là ký hiệu ma trận đổi cơ sở từ cơ sở (α) sang cơ sở (α') .

Trường hợp đặc biệt, khi $f : V \rightarrow V$ là phép biến đổi tuyến tính và $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) và $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ (α') là hai cơ sở của V , ta có:

$$\mathbf{A}_{f/(\alpha')} = T_{\alpha\alpha'}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{f/(\alpha)} \cdot T_{\alpha\alpha'}$$

5 Hạt nhân và ảnh

5.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V, U là các không gian vectơ, $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính.

- Ký hiệu: $\text{Ker } f = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$
 Khi đó, dựa vào tiêu chuẩn KGVTV con, ta có thể chứng minh được $\text{Ker } f$ là KGVTV con của V , gọi là hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f .
- Ký hiệu $\text{Im } f = \{f(x) | x \in V\} \subset U$
 $\text{Im } f$ cũng là một KGVTV con của U , gọi là ảnh của ánh xạ tuyến tính f .

5.2 Nhận xét

- Để xác định hạt nhân của ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$, ta sử dụng biểu thức tọa độ của f (xem mục 2), cụ thể:
 Chọn cơ sở $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) và $\beta_1, \dots, \beta_m$ (β) của V và U . Khi đó, ta có:

$$[f(x)]/_{(\beta)} = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} \cdot [x]/_{(\alpha)}$$

do đó:

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker } f &\iff f(x) = 0 \\
 &\iff [f(x)]_{(\beta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\iff \mathbf{A} \cdot [x]_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Như vậy, $x \in \text{Ker } f$ khi và chỉ khi tọa độ của x trong cơ sở (α) ($[x]_{(\alpha)}$) là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(*)$ (với $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)}$).

Từ đó, để tìm cơ sở của hạt nhân $\text{Ker } f$, ta làm như sau: Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ nào đó, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)}$. Giải hệ phương trình $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$, tìm hệ

nghiệm của hệ $(*)$. Tập tất cả các vectơ thuộc V sao cho tọa độ của vectơ đó trong cơ sở (α) là nghiệm cơ bản của hệ $(*)$ sẽ làm thành một cơ sở của $\text{Ker } f$. Trường hợp đặc biệt, nếu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính và $\mathbf{A}$ là ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/(\epsilon^n),(\epsilon^m)}$) thì hạt nhân của f chính là không gian con các nghiệm của hệ phương

trình tuyến tính thuần nhất $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ và cơ sở của $\text{Ker } f$ chính là hệ nghiệm

cơ bản của hệ trên.

Bạn đọc sẽ thấy rõ cách tìm $\text{Ker } f$ qua phần bài tập.

- Để tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$ ta dựa vào nhận xét sau:
Nếu $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là hệ sinh của V thì $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ là hệ sinh của $\text{Im } f$. Thật vậy, với mọi $y \in \text{Im } f$, tồn tại $x \in V$ để $y = f(x)$. Vì $x \in V$ nên tồn tại $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ để $x = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$. Khi đó

$$y = f(x) = f(a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n) = a_1f(\alpha_1) + \dots + a_nf(\alpha_n)$$

Vậy, $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ là hệ sinh của $\text{Im } f$.

Như vậy, để tìm cơ sở của $\text{Im } f$, ta tìm cơ sở $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ của V , theo nhận xét trên, $\text{Im } f = \langle f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n) \rangle$, do đó hệ con ĐLTT tối đại của hệ $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ là cơ sở của $\text{Im } f$.

5.3 Mối liên hệ giữa số chiều của hạt nhân và ảnh

Định lý 5.1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$. Khi đó, ta có: $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V$

Chứng minh. Giả sử $\dim V = n$, $\dim \text{Ker } f = k$ ($k \leq n$) và giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là cơ sở của $\text{Ker } f$. Vì $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là hệ vectơ ĐLTT của V nên ta có thể bổ sung thêm $n - k$ vectơ để được hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của V . Ta chứng minh $f(\alpha_{k+1}), \dots, f(\alpha_n)$ là cơ sở của $\text{Im } f$.

Thật vậy, với mọi $y \in \text{Im} f$, tồn tại $x \in V$ để $f(x) = y$, vì $x \in V$ nên $x = a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k + a_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + a_n\alpha_n$. Do đó,

$$y = f(x) = a_1f(\alpha_1) + \dots + a_kf(\alpha_k) + a_{k+1}f(\alpha_{k+1}) + \dots + a_nf(\alpha_n) = a_{k+1}f(\alpha_{k+1}) + \dots + a_nf(\alpha_n)$$

vì $f(\alpha_1) = \dots = f(\alpha_k) = 0$. Điều này chứng tỏ $f(\alpha_{k+1}), \dots, f(\alpha_n)$ là hệ sinh của $\text{Im} f$.

Bây giờ, giả sử

$$\begin{aligned} & a_{k+1}f(\alpha_{k+1}) + \dots + a_nf(\alpha_n) = 0 \\ \Rightarrow & f(a_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + a_n\alpha_n) = 0 \\ \Rightarrow & a_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + a_n\alpha_n \in \text{Ker} f \\ \Rightarrow & a_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + a_n\alpha_n = a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k \end{aligned}$$

(vì $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là cơ sở của $\text{Ker} f$). Do đó $-a_1\alpha_1 - \dots - a_k\alpha_k + a_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + a_n\alpha_n = 0$ suy ra $a_i = 0$ với mọi i .

Vậy $f(\alpha_{k+1}), \dots, f(\alpha_n)$ là cơ sở ĐLTT do đó là cơ sở của $\text{Im} f$ nên $\dim \text{Im} f = n - k$. Ta có $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = k + (n - k) = n = \dim V$. $\square$

Số chiều của $\text{Im} f$ còn được gọi là hạng của ánh xạ tuyến tính f , ký hiệu là $\text{rank} f$. Số chiều của $\text{Ker} f$ còn được gọi là số khuyết của ánh xạ tuyến tính f , ký hiệu là $\text{def}(f)$. Như vậy, ta có: $\text{rank}(f) = \dim \text{Im} f$, $\text{def}(f) = \dim \text{Ker} f$ và $\text{rank}(f) + \text{def}(f) = \dim V$

6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

6.1 Các khái niệm cơ bản

Cho U, V là các KGVT, và $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

- f gọi là đơn cấu nếu f là đơn ánh.
- f gọi là toàn cấu nếu f là toàn ánh.
- f gọi là đẳng cấu nếu f là song ánh.

Từ định nghĩa, ta có ngay tích của các đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu lại là các đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu. Nếu $f : V \rightarrow U$ là một đẳng cấu thì f có ánh xạ ngược $f^{-1} : U \rightarrow V$ cũng là một đẳng cấu.

Hai không gian vectơ U, V gọi là đẳng cấu nếu tồn tại một đẳng cấu $f : V \rightarrow U$. Dễ thấy rằng quan hệ đẳng cấu là quan hệ tương đương.

6.2 Các định lý về đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Định lý 6.1. Hai không gian vectơ V, U đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi $\dim V = \dim U$

Định lý 6.2. Cho V, U là các không gian vectơ, $\dim V = \dim U$ và $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

- (i) f là đơn cấu
- (ii) f là toàn cấu
- (iii) f là đẳng cấu

Định lý 6.3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$. Khi đó:

- (i) f là đơn cấu khi và chỉ khi $\text{Ker } f = \{0\}$, khi và chỉ khi $\dim \text{Im } f = \dim V$
- (ii) f là toàn cấu khi và chỉ khi $\text{Im } f = U$, khi và chỉ khi $\dim \text{Im } f = \dim U$.

Nếu $f : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính thì $\dim \text{Im } f = \text{rank } f = \text{rank } \mathbf{A}$, trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ bất kỳ. Do đó, để kiểm tra xem f có là đơn cấu, toàn cấu hay không, ta tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ nào đó rồi tìm $\text{rank } \mathbf{A}$. Nếu $\text{rank } \mathbf{A} = \dim V$ thì f là đơn cấu, còn nếu $\text{rank } \mathbf{A} = \dim U$ thì f là toàn cấu.

6.3 Sự đẳng cấu của không gian các ánh xạ tuyến tính và không gian các ma trận

Ký hiệu $\text{Hom}(V, U)$ là tập các ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow U$. Trong $\text{Hom}(V, U)$ ta định nghĩa hai phép toán như sau:

- Phép cộng: $\forall f, g \in \text{Hom}(V, U), \quad f + g : V \longrightarrow U$

$$x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
- Phép nhân: $\forall a \in \mathbb{R}, f \in \text{Hom}(V, U), \quad (af) : V \longrightarrow U$

$$x \longmapsto (af)(x) = af(x)$$

khi đó $\text{Hom}(V, U)$ cùng với 2 phép toán trên làm thành một KGVTV, gọi là không gian các ánh xạ tuyến tính từ V đến U .

Điều thú vị là không gian $\text{Hom}(V, U)$ đẳng cấu với không gian các ma trận nhờ đẳng cấu trong định lý sau:

Định lý 6.4. Cho V, U là các KGVTV, $\dim V = n, \dim U = m$ và cho $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α), $\beta_1, \dots, \beta_m$ (β) lần lượt là các cơ sở của V và U . Khi đó, ánh xạ:

$$\begin{aligned} \theta : \text{Hom}(V, U) &\longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \theta(f) = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} \end{aligned}$$

là một đẳng cấu.

Nhờ đẳng cấu này, việc nghiên cứu các ánh xạ tuyến tính dẫn đến việc nghiên cứu các ma trận và ngược lại. Bạn đọc sẽ thấy rõ phần này qua phần bài tập.¹

¹Dánh máy: LÂM HỮU PHƯỚC, Ngày: 22/02/2006

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 16. Vectơ riêng - Giá trị riêng của ma trận và của phép biến đổi tuyến tính - Chéo hóa

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

1 Vectơ riêng - Giá trị riêng của ma trận

1.1 Các khái niệm cơ bản

Cho A là ma trận vuông cấp n , ($A \in M_n(\mathbb{R})$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó

- Đa thức bậc n của biến λ :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \end{aligned}$$

gọi là *đa thức đặc trưng của ma trận A* .

- Các nghiệm thực của đa thức đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ gọi là *giá trị riêng của ma trận A* .
- Nếu λ_0 là một giá trị riêng của A thì $\det(A - \lambda_0 I) = 0$. Do đó hệ phương trình thuần nhất:

$$(A - \lambda_0 I) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

có vô số nghiệm. Không gian nghiệm của hệ (1) gọi là không gian con riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_0 . Các vectơ khác không là nghiệm của hệ (1) gọi là các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_0 . Các vectơ tạo thành một cơ sở của không gian riêng (tức là các vectơ tạo thành hệ nghiệm cơ bản của hệ (1)) gọi là các vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng λ_0 .

1.2 Ví dụ

Tìm đa thức đặc trưng, vectơ riêng, giá trị riêng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải

- Ta có $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

Vậy đa thức đặc trưng của ma trận A là $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

- $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ (kép), $\lambda = 2$.

Vậy ma trận A có 2 giá trị riêng là $\lambda = -1, \lambda = 2$.

- Để tìm vectơ riêng của A , ta xét hai trường hợp:

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$.

Để tìm vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$, ta giải hệ:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_2, x_3 . Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = -a - b, x_2 = a, x_3 = b$. Do đó, không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là $V_{-1} = \{(-a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là tất cả các vectơ có dạng:

$(-a - b, a, b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ (vì vectơ riêng phải khác không).

Ta có $\dim V_{-1} = 2$ và A có 2 vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là $\alpha_1 = (-1, 1, 0), \alpha_2 = (-1, 0, 1)$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

Để tìm vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta giải hệ:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_3 . Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = a$, $x_2 = a$, $x_3 = a$. Do đó, không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $V_2 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là tất cả các vectơ có dạng:

(a, a, a) với $a \neq 0$.

Ta có $\dim V_2 = 1$ và A có 1 vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $\alpha_3 = (1, 1, 1)$.

Chú ý rằng, nếu xét cả hai trường hợp, A có tất cả 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

2 Chéo hóa ma trận

2.1 Ma trận đồng dạng

- Cho A, B là các ma trận vuông cấp n . Ta nói A đồng dạng với B , ký hiệu $A \sim B$, nếu tồn tại ma trận T vuông cấp n , không suy biến sao cho $B = T^{-1}AT$. Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương.
- Quan hệ đồng dạng bảo toàn khá nhiều các tính chất của ma trận, chẳng hạn nếu $A \sim B$ thì $\det A = \det B$, $\text{rank } A = \text{rank } B$, $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$, giá trị riêng của A và B là như nhau...

2.2 Chéo hóa ma trận

- **Định nghĩa.** Cho A là ma trận vuông cấp n .

Ta nói ma trận A chéo hóa được nếu A đồng dạng với một ma trận chéo. Như vậy ma trận A chéo hóa được nếu tồn tại ma trận T vuông cấp n không suy biến sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Chéo hóa ma trận A tức là tìm ma trận T vuông cấp n không suy biến sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

- **Ý nghĩa của việc chéo hóa ma trận**

Nếu ma trận A chéo hóa được thì việc nghiên cứu các tính chất (bảo toàn qua quan hệ đồng dạng) của ma trận A dẫn đến việc nghiên cứu các tính chất đó trên một ma trận chéo và như vậy vấn đề sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

Muốn biết ma trận A có chéo hóa được hay không, ta có định lý sau:

- **Định lý** (*Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông chéo hóa được*)

Ma trận A vuông cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi A có đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính, khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^k \dim V_{\lambda_i} = n$, trong đó $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng của A .

2.3 Cách chéo hóa một ma trận

Cho A là ma trận vuông cấp n . Để chéo hóa ma trận A , ta làm như sau:

Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng độc lập tuyến tính của A . Khi đó xảy ra một trong hai khả năng sau:

1. Nếu tổng số vectơ riêng độc lập tuyến tính của A bé hơn n (tức là $\sum_{i=1}^k \dim V_{\lambda_i} < n$, trong đó V_{λ_i} là không gian con riêng ứng với giá trị riêng λ_i) thì kết luận ma trận A không chéo hóa được, tức là không tồn tại ma trận T để $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

2. Nếu tổng số vectơ riêng độc lập tuyến tính của A bằng n (tức là $\sum_{i=1}^k \dim V_{\lambda_i} = n$ thì ma trận A chéo hóa được. Khi đó ma trận T cần tìm là ma trận mà các cột của nó chính là các vectơ riêng độc lập tuyến tính của A viết theo cột, và khi đó

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

là ma trận chéo, trong đó λ_i chính là giá trị riêng của A ứng với vectơ riêng là vectơ cột thứ i của ma trận T .

2.4 Ví dụ

Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải

Trước hết tìm vectơ riêng, giá trị riêng của A .

Theo ví dụ b), mục 1, ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ và A có ba vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ và $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

Do đó, ta kết luận:

- Ma trận A chéo hóa được.
- Ma trận cần tìm là:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

và

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3 Vectơ riêng, giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính

3.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V là không gian vectơ và $f : V \rightarrow V$ là phép biến đổi tuyến tính.

Nếu U là không gian vectơ con bất biến của V sao cho $f(U) \subset U$ thì U gọi là không gian con bất biến của V .

Giả sử U là không gian con bất biến 1 chiều và α là một vectơ khác không, thuộc U (do đó α là cơ sở của U), khi đó vì $f(U) \subset U$ nên $f(\alpha) \in U$ và $f(\alpha) = \lambda\alpha$. Từ đó ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ, $f : V \rightarrow V$ là phép biến đổi tuyến tính của V . Nếu ta có $f(\alpha) = \lambda\alpha$ trong đó $\alpha \in V$ là vectơ khác không và $\lambda \in \mathbb{R}$ thì α gọi là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ .

3.2 Cách tìm giá trị riêng, vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính

Các giá trị riêng, vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính có sự tương ứng chặt chẽ với các giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận của nó. Ta sẽ thấy rõ điều đó qua phần trình bày dưới đây.

Cho V là không gian vectơ n -chiều ($\dim V = n$) và cho $f : V \rightarrow V$ là phép biến đổi tuyến tính. Giả sử $(U) : u_1, \dots, u_n$ là cơ sở của V và $A = A_{f/(U)}$ là ma trận của f trong cơ sở (U) . Ta có biểu thức tọa độ của f như sau (xem bài 15):

$$[f(\alpha)]_{(U)} = A.[\alpha]_{(U)} \quad (*)$$

Nếu α là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ_0 thì $f(\alpha) = \lambda_0\alpha$. Thay vào vào (*) ta có:

$$\lambda_0.[\alpha]_{(U)} = A.[\alpha]_{(U)}$$

hay

$$[A - \lambda_0 I][\alpha]_{(U)} = 0 \quad (**)$$

Vì vectơ α khác không nên hệ phương trình (**) có nghiệm khác không $\Leftrightarrow \det[A - \lambda_0 I] = 0 \Leftrightarrow \lambda_0$ là giá trị riêng của A .

Như vậy, λ_0 là giá trị riêng của $f \Leftrightarrow \lambda_0$ là giá trị riêng của ma trận $A = A_{f/(U)}$ và $\alpha \in V$ là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng $\lambda_0 \Leftrightarrow [\alpha]_{(U)}$ là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ_0 .

Từ đó ta có quy tắc tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính $f : V \rightarrow V$ như sau:

1. Bước 1. Tìm ma trận của f trong một cơ sở $(U) : u_1, \dots, u_n$ nào đó của V , nghĩa là tìm $A = A_{f/(U)}$.
2. Bước 2. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A .
3. Bước 3. Kết luận
 - Các giá trị riêng của A cũng chính là giá trị riêng của f .
 - Nếu $(a_1, \dots, a_n)$ là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ_0 thì $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ_0 .

3.3 Vấn đề tìm cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở là ma trận chéo

Để nghiên cứu một phép biến đổi tuyến tính $f : V \rightarrow V$, ta có thể qui về việc nghiên cứu ma trận của f . Từ đó dẫn đến việc cần tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo (là ma trận khá đơn giản, dễ nghiên cứu). Sau đây là cách tìm cơ sở như vậy:

Đầu tiên ta tìm các vectơ riêng độc lập tuyến tính của f . Nếu f có ít hơn n vectơ riêng độc lập tuyến tính ($n = \dim V$) thì không có cơ sở nào của f để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo. Nếu f có n vectơ riêng độc lập tuyến tính là $(\alpha) : \alpha_1, \dots, \alpha_n$ thì n vectơ riêng độc lập tuyến tính đó làm thành cơ sở (α) của V và ma trận của f trong cơ sở (α) đó là ma trận chéo. Cụ thể:

$$A_{f/(U)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

trong đó λ_i là giá trị riêng ứng với vectơ riêng α_i (các λ_i có thể bằng nhau).

3.4 Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở:

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 0, 0)$$

và cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(u_1) = (4, 3, 2)$$

$$f(u_2) = (4, 3, 1)$$

$$f(u_3) = (1, 0, 0)$$

Tìm cơ sở để ma trận f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

Giải

Đầu tiên ta tìm vectơ riêng, giá trị riêng của f . Để tìm vectơ riêng, giá trị riêng của f , ta tìm ma trận của f trong một cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^3$. Trong bài toán cụ thể này, tìm ma trận của f trong cơ sở $(U) : u_1, u_2, u_3$ là dễ nhất. Vậy:

1. Bước 1. Tìm ma trận của f trong cơ sở (U)

Ta phải giải 3 hệ phương trình sau:

- Hệ 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = 3 - a_1 = 1,$$

$$a_3 = 4 - a_1 - a_2 = 1$$

- Hệ 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$b_1 = 1,$$

$$b_2 = 3 - b_1 = 2,$$

$$b_3 = 4 - b_1 - b_2 = 1$$

- Hệ 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = -c_1 = 0,$$

$$c_3 = 1 - c_1 - c_2 = 1$$

$$\text{Vậy } A_{f/(U)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Bước 2. Tìm giá trị riêng, vectơ riêng của A và của f

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 3$$

Vậy A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 3$.

Suy ra f có hai giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 3$.

- Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là nghiệm của hệ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_2, x_3 .

Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = -a, x_2 = a, x_3 = b$.

Vectơ riêng của A , ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, là $(-a, a, b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Trong trường hợp này, A có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$ và $\alpha_2 = (0, 0, 1)$.

Do đó, ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, vectơ riêng của f là các vectơ có dạng

$$-au_1 + au_2 + bu_3 = (b, 0, -a)$$

với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Trong trường hợp này, f có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là:

$$\beta_1 = -u_1 + u_2 + 0u_3 = (0, 0, -1)$$

$$\beta_2 = 0u_1 + 0u_2 + u_3 = (1, 0, 0)$$

- Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là nghiệm của hệ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số x_2 .

Ta có: $x_2 = a$, $x_3 = 0$, $x_1 = a$

Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = a$, $x_2 = a$, $x_3 = 0$.

Vectơ riêng của A , ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, là $(a, a, 0)$, $a \neq 0$.

Trong trường hợp này, A có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_3 = (1, 1, 0)$.

Do đó, ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, vectơ riêng của f là các vectơ có dạng

$$au_1 + au_2 + 0u_3 = (2a, 2a, a), \quad a \neq 0$$

Trong trường hợp này, f có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là:

$$\beta_3 = 1u_1 + 1u_2 + 0u_3 = (2, 2, 1)$$

3. Bước 3. Kết luận

f có ba vectơ riêng độc lập tuyến tính là các vectơ β_1, β_2 (ứng với $\lambda = 1$) và β_3 (ứng với $\lambda = 3$). Do đó, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ làm thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$ mà ma trận của f trong cơ sở $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ là ma trận chéo. Cụ thể:

$$A_{f/(\beta)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài tập

1. (a) Cho $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính $\Leftrightarrow$ tồn tại các số $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ để $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.
- (b) Cho $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính $\Leftrightarrow$ tồn tại các số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ để $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)$.
2. Tìm công thức của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (tìm $f(x_1, x_2, x_3)$) biết:

- (a) $f(1, 1, 2) = (1, 0, 0)$
 $f(2, 1, 1) = (0, 1, 1)$
 $f(2, 2, 3) = (0, -1, 0)$
- (b) $f(1, 2, 3) = (-1, 0, 1)$
 $f(-1, 1, 1) = (0, 1, 0)$
 $f(1, 3, 4) = (1, 0, 2)$

3. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1) \quad (U)$$

$$v_1 = (1, -1, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1), \quad v_3 = (1, 0, 1) \quad (V)$$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$.

- (a) Tìm công thức của f .
- (b) Tìm các ma trận sau: $A_{f/(U)}$, $A_{f/(U),(V)}$, $A_{f/(V)}$, $A_{f/(V),(U)}$, $A_{f/(\varepsilon^3)}$

4. Cho ánh xạ tuyến tính $\Theta : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) \mapsto p'(x)$.

Tìm ma trận của Θ trong cơ sở:

- (a) $1, x, x^2, \dots, x^n$
- (b) $1, (x-a), \frac{(x-a)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-a)^n}{n!}$

5. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4)$$

Tìm cơ sở, số chiều của $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$.

6. Tìm vectơ riêng, giá trị riêng chéo hóa các ma trận sau:

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở:

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (-1, 2, 1), \quad u_3 = (1, 3, 2)$$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(u_1) = (0, 5, 3)$$

$$f(u_2) = (2, 4, 3)$$

$$f(u_3) = (0, 3, 2)$$

Tìm một cơ sở để ma trận f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

8. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V \rightarrow V$ thỏa $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh:

$$\text{Im } \varphi + \text{Ker } \varphi = V$$

$$\text{Im } \varphi \cap \text{Ker } \varphi = \{0\}$$

9. Cho $f : V \rightarrow V$ là phép biến đổi tuyến tính, L là không gian vectơ con của V . Chứng minh:

$$(a) \dim L - \dim \text{Ker } f \leq \dim f(L) \leq \dim L$$

$$(b) \dim L \leq \dim f^{-1}(L) \leq \dim L + \dim \text{Ker } f$$

10. Cho $\varphi : V \rightarrow W$, $\psi : W \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh:

$$(a) \text{rank}(\psi\varphi) \leq \min\{\text{rank } \psi, \text{rank } \varphi\}$$

$$(b) \text{rank}(\psi\varphi) = \text{rank } \varphi - \dim(\text{Ker } \psi \cap \text{Im } \varphi)$$

$$(c) \text{rank}(\psi\varphi) \geq \text{rank } \varphi + \text{rank } \psi - \dim W$$

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 17. Giải bài tập về ánh xạ tuyến tính

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1. a. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ để $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- b. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ để

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \quad (*)$$

Giải. Ta chỉ giải câu b., câu a. là trường hợp đặc biệt của câu b. khi $m = 1$.

Kiểm tra trực tiếp, ta thấy ngay rằng nếu f có dạng như $(*)$ thì f là ánh xạ tuyến tính. Ngược lại, nếu f là ánh xạ tuyến tính, ta đặt:

$$f(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$$

với $i = 1, 2, \dots, n$, trong đó $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) \\ &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n) \\ &= f(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{aligned}$$

□

2. Tìm công thức của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ biết

a. $f(1, 1, 2) = (1, 0, 0)$, $f(2, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $f(2, 2, 3) = (0, -1, 0)$.

b. $f(1, 2, 3) = (-1, 0, 1)$, $f(-1, 1, 1) = (0, 1, 0)$, $f(1, 3, 4) = (1, 0, 2)$.

Giải. a. Giả sử

$$(x_1, x_2, x_3) = a_1(1, 1, 2) + a_2(2, 1, 1) + a_3(2, 2, 3) \quad (1)$$

Khi đó

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1f(1, 1, 2) + a_2f(2, 1, 1) + a_3f(2, 2, 3) = (a_1, a_2 - a_3, a_2) \quad (2)$$

Do đó, để tính $f(x_1, x_2, x_3)$, ta cần tính a_1, a_2, a_3 qua x_1, x_2, x_3 . Do công thức (1), a_1, a_2, a_3 là nghiệm của hệ:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 2 & 1 & 3 & x_3 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & -1 & -2x_1 + x_3 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_1 - 3x_2 + x_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Vậy:

$$a_3 = -x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$a_2 = x_1 - x_2$$

$$a_1 = x_1 - 2a_2 - 2a_3 = x_1 - 2(x_1 - x_2) - 2(-x_1 + 3x_2 - x_3) = x_1 - 4x_2 + 2x_3$$

Thay vào (2), công thức của ánh xạ f là:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_1 - 4x_2 + x_3, x_1 - x_2)$$

b. Giải tương tự câu a., chi tiết xin dành cho bạn đọc.

□

3. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở:

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1) \quad (u)$$

$$v_1 = (1, -1, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1), \quad v_3 = (1, 0, 1) \quad (v)$$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(u_i) = v_i$.

a. Tìm công thức của f .

b. Tìm các ma trận

$$\mathbf{A}_{f/(u)} , \quad \mathbf{A}_{f/(u),(v)} , \quad \mathbf{A}_{f/(v)} , \quad \mathbf{A}_{f/(v),(u)} , \quad \mathbf{A}_{f/(\varepsilon^3)}$$

Giải. a. Giả sử

$$(x_1, x_2, x_3) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \quad (1)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) \\ &= a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + a_3 f(u_3) \\ &= a_1 (1, -1, 0) + a_2 (0, 1, -1) + a_3 (1, 0, 1) \\ &= (a_1 + a_3, -a_1 + a_2, -a_2 + a_3) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + a_3, -a_1 + a_2, -a_2 + a_3) \quad (2)$$

Ta cần tính a_1, a_2, a_3 theo x_1, x_2, x_3 , do (1), a_1, a_2, a_3 là nghiệm của hệ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x_2 + x_3 \end{array} \right]$$

do đó: $a_3 = -x_2 + x_3$, $a_2 = x_2$, $a_1 = x_1 - a_3 = x_1 + x_2 - x_3$. Thay vào (2) công thức của f là:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1 + x_3, -2x_2 + x_3)$$

b. • Ma trận $\mathbf{A}_{f/(u)}$

Ta có:

$$f(u_1) = v_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \quad (1)$$

$$f(u_2) = v_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \quad (2)$$

$$f(u_3) = v_3 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \quad (3)$$

Khi đó

$$\mathbf{A}_{f/(u)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

các a_i , b_i , c_i lần lượt là nghiệm của các phương trình vectơ (1), (2), (3). Mỗi phương trình (1), (2), (3) tương đương với một hệ phương trình tuyến tính có cùng ma trận các hệ số (chỉ khác nhau cột tự do), do đó, ta có thể giải cùng lúc 3 hệ đó như sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

- Hệ 1: $a_3 = 1$, $a_2 = -1$, $a_1 = 1 - a_3 = 0$
- Hệ 2: $b_3 = -2$, $b_2 = 1$, $b_1 = -b_3 = 2$
- Hệ 3: $c_3 = 1$, $c_2 = 0$, $c_1 = 1 - c_3 = 0$

Vậy ma trận

$$\mathbf{A}_{f/(u)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ma trận $\mathbf{A}_{f/(u),(v)}$

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) = v_1 &= 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(u_2) = v_2 &= 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \\ f(u_3) = v_3 &= 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{aligned}$$

Vậy ma trận

$$\mathbf{A}_{f/(u),(v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ma trận $\mathbf{A}_{f/(v)}$

Áp dụng câu a., ta sẽ tính được $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, sau đó làm như các phần trước. Cụ thể:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1, -1, 2) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \\ f(v_2) &= (0, -1, -3) = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \\ f(v_3) &= (1, 0, 1) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \end{aligned}$$

a_i , b_i , c_i là nghiệm của 3 hệ sau:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ & & \longrightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

- Hệ 1: $a_3 = 1$, $a_2 = -a_3 = -1$, $a_1 = 1 - a_3 = 0$
- Hệ 2: $b_3 = -2$, $b_2 = -1 - b_3 = 1$, $b_1 = -b_3 = 2$
- Hệ 3: $c_3 = 1$, $c_2 = 1 - c_3 = 0$, $c_1 = 1 - c_3 = 0$

Vậy

$$\mathbf{A}_{f/(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- theo câu a., công thức của f là

do đó ta có ngay:

1

$$\begin{array}{ccc} \theta & : & \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ & & p(x) \longmapsto p'(x) \end{array}$$

a. $u_0 = 1, u_1 = x, u_2 = x^2, \dots, u_n = x^n$

Giải. a. Ta có

Vậy

1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 - x_3 + x_4)$$

4

Giải. • $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Do đó, $\text{Ker } f$ chính là không gian con các nghiệm của hệ (1) và hệ nghiệm cơ bản của hệ (1) chính là một cơ sở của $\text{Ker } f$. Để giải hệ (1), ta biến đổi ma trận hệ số mở rộng:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số là x_4 . Ta có

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2}(2x_3 - x_4) = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_1 &= x_2 - x_3 = x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = -a \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2a \end{cases}$$

hệ nghiệm cơ bản $\alpha_1 = (-1, -1, 0, 2)$, do đó, $\dim \text{Ker } f = 1$, cơ sở của $\text{Ker } f$ là $\alpha_1 = (-1, -1, 0, 2)$.

- Để tìm cơ sở của $\text{Im } f$, ta tìm ảnh của cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 2, 0), \quad f(e_2) = (-1, 0, 2), \\ f(e_3) &= (1, 0, -1), \quad f(e_4) = (0, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\text{Im } f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \rangle$$

Hệ con ĐLTT tối đại của $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ là một cơ sở của $\text{Im } f$. Ta có

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{aligned}$$

Vậy cơ sở của $\text{Im } f$ là $f(e_1), f(e_4), f(e_3)$ và $\dim f = 3$.

□

6. Tìm vectơ riêng, giá trị riêng, chéo hóa các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Giải. b) Tìm đa thức đặc trưng:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda)^2 + 2 + 2 - (2-\lambda) - 4(5-\lambda) - (2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda \end{aligned}$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = 6.$$

Vậy A có 3 giá trị riêng là $\lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = 6$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3 . Ta có: $x_3 = a, x_2 = a, x_1 = 0$.

Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(0, a, a), a \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ có dạng $(0, a, a), a \neq 0$, $\dim V_0 = 1$.

Cơ sở của V_0 là $\alpha_1 = (0, 1, 1)$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3 .

Ta có: $x_3 = b$, $x_2 = -b$, $x_1 = 2x_2 + x_3 = -b$.

Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(-b, -b, b)$, $b \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là các vectơ có dạng $(-b, -b, b)$, $b \neq 0$, $\dim V_3 = 1$.

Cơ sở của V_3 là $\alpha_2 = (-1, -1, 1)$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 6$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3 .

Ta có: $x_3 = c$, $x_2 = -c$, $x_1 = -x_2 + x_3 = 2c$.

Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(2c, -c, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 6$ là các vectơ có dạng $(2c, -c, c)$, $c \neq 0$, $\dim V_6 = 1$.

Cơ sở của V_0 là $\alpha_3 = (2, -1, 1)$.

Chéo hóa. Tổng hợp 3 trường hợp trên ta thấy ma trận A có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính. Do đó A chéo hóa được. Ma trận T cần tìm là:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

và

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

là ma trận chéo.

d) Tìm đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)^2$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1.$$

Vậy ma trận A có 2 giá trị riêng là $\lambda = 0, \lambda = 1$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số là x_2, x_3 .

Ta có: $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = 0$, $x_1 = 0$.

Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(0, a, b, 0)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ có dạng $(0, a, b, 0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $\dim V_0 = 2$.

Cơ sở của V_0 là $\alpha_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 0)$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số là x_4 .

Ta có: $x_4 = c$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$.

Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(0, 0, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là các vectơ có dạng $(0, 0, 0, c)$, $c \neq 0$, $\dim V_1 = 1$.

Cơ sở của V_1 là $\alpha_3 = (0, 0, 0, 1)$.

Chéo hóa. Tổng hợp 3 trường hợp trên ta thấy ma trận A chỉ có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính trong khi A là ma trận cấp 4 nên A không chéo hóa được. $\square$

7. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở:

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (-1, 2, 1), \quad u_3 = (1, 3, 2)$$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(u_1) = (0, 5, 3)$$

$$f(u_2) = (2, 4, 3)$$

$$f(u_3) = (0, 3, 2)$$

Tìm một cơ sở để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

Giải. Đầu tiên ta tìm ma trận của f trong cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^3$. Vì đề đã cho $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ nên dễ nhất là tìm ma trận của f trong cơ sở (u) . Bạn đọc có thể dễ dàng tìm được:

$$A_{f/(u)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bước tiếp theo, ta tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = A_{f/(u)}$. Từ đó sẽ tìm được giá trị riêng và vectơ riêng của f .

Các giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ta đã tìm trong phần lý thuyết.

Kết quả tóm tắt như sau:

- A có hai giá trị riêng là $\lambda = -1$ và $\lambda = 2$.
- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là các vectơ $(-a - b, a, b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Trường hợp này A có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$.
- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là các vectơ $(c, c, 0)$, $c \neq 0$. Trường hợp này A có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_3 = (1, 1, 1)$.

Từ đó suy ra:

- f có hai giá trị riêng là $\lambda = -1$ và $\lambda = 2$.
- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là các vectơ dạng $(-a - b)u_1 + au_2 + bu_3 = (-2a, a + 2b, b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Trường hợp này f có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là:

$$\beta_1 = -1.u_1 + 1.u_2 + 0.u_3 = (-2, 1, 0)$$

$$\beta_2 = -1.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 = (0, 2, 1)$$

- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là các vectơ dạng $c.u_1 + c.u_2 + c.u_3 = (c, 6c, 4c)$, $c \neq 0$.

Trường hợp này f có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là:

$$\beta_3 = 1.u_1 + 1.1.u_2 + 1.u_3 = (1, 6, 4)$$

Kết luận. Vì f là phép biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$) và f có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nên $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (β) chính là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ cần tìm và ta có:

$$A_{f/(\beta)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

8. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V \rightarrow V$ thỏa mãn $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh:

(a) $\text{Im } \varphi + \text{Ker } \varphi = V$

(b) $\text{Im } \varphi \cap \text{Ker } \varphi = \{0\}$

Giải. a) Tất nhiên $\text{Im } \varphi + \text{Ker } \varphi \subset V$, ta cần chứng minh: $V \subset \text{Im } \varphi + \text{Ker } \varphi$.

Với mọi $\alpha \in V$, ta có: $\alpha = \varphi(\alpha) + (\alpha - \varphi(\alpha))$

Tất nhiên $\varphi(\alpha) \in \text{Im } \varphi$, và $\varphi(\alpha - \varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) - \varphi^2(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha) = 0$. Do đó, $\alpha - \varphi(\alpha) \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \alpha \in \text{Im } \varphi + \text{Ker } \varphi$, và $\text{Im } \varphi + \text{Ker } \varphi = V$.

b) Giả sử $\beta \in \text{Im } \varphi \cap \text{Ker } \varphi$. Khi đó tồn tại $\alpha \in V$ để $\varphi(\alpha) = \beta$. Theo giả thiết $\varphi^2 = \varphi$ nên ta có: $\beta = \varphi(\alpha) = \varphi^2(\alpha) = \varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\beta) = 0$ (vì $\beta \in \text{Ker } \varphi$).

Vậy $\beta \in \text{Im } \varphi \cap \text{Ker } \varphi$ thì $\beta = 0$. Do đó, $\text{Im } \varphi \cap \text{Ker } \varphi = \{0\}$. □

9. Cho $f : V \rightarrow V$ là ánh xạ tuyến tính, L là không gian vectơ con của V . Chứng minh:

(a) $\dim L - \dim \text{Ker } f \leq \dim f(L) \leq \dim L$.

(b) $\dim L \leq \dim f^{-1}(L) \leq \dim L + \dim \text{Ker } f$.

Giải. Để giải bài tập 9 và bài tập 10, ta cần nhớ kết quả sau (đã chứng minh trong phần lý thuyết):

Nếu $\varphi : V \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính thì ta có:

$$\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim V$$

a) Xét ánh xạ $\bar{f} : L \rightarrow V$, $\bar{f} = f|_L$, tức là $\bar{f}(\alpha) = f(\alpha)$ với mọi $\alpha \in L$.

Ta có $\text{Im } \bar{f} = \bar{f}(L) = f(L)$, $\text{Ker } \bar{f} = L \cap \text{Ker } f$.

Áp dụng kết quả trên với $\varphi = \bar{f}$, ta có:

$$\dim \text{Im } \bar{f} + \dim \text{Ker } \bar{f} = \dim L$$

Do đó, $\dim f(L) = \dim \text{Im } \bar{f} \leq \dim L$

và $\dim f(L) = \dim L - \dim \text{Ker } \bar{f} \geq \dim L - \dim \text{Ker } f$

b) Đặt $L' = f^{-1}(L)$. Khi đó $f(L') = L$.

Áp dụng a) với không gian vectơ con L' , ta có:

$$\dim L' - \dim \text{Ker } f \leq \dim f(L') \leq \dim L'$$

tức là

$$\dim f^{-1}(L) - \dim \text{Ker } f \leq \dim L \leq \dim f^{-1}(L)$$

Do đó:

$$\dim L \leq \dim f^{-1}(L) \leq \dim L + \dim \text{Ker } f$$

□

10. Cho $\varphi : V \rightarrow W$, $\psi : W \rightarrow U$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh:

- (a) $\text{rank}(\psi\varphi) \leq \min\{\text{rank } \psi, \text{rank } \varphi\}$
- (b) $\text{rank}(\psi\varphi) = \text{rank } \varphi - \dim(\text{Ker } \psi \cap \text{Im } \varphi)$
- (c) $\text{rank}(\psi\varphi) \geq \text{rank } \varphi + \text{rank } \psi - \dim W$

Giải. a) Áp dụng câu a) bài 9 cho ánh xạ tuyến tính $\psi : W \rightarrow U$ với $L = \text{Im } \varphi = \varphi(V) \subset W$, ta có:

$$\dim \varphi(V) \geq \dim \psi(\varphi(V)) = \dim(\psi\varphi)(V) = \dim \text{Im}(\psi\varphi)$$

Vậy ta có: $\text{rank}(\psi\varphi) \leq \text{rank } \varphi$ (1)

Mặt khác, ta có: $\varphi(V) \subset W$ nên $\psi(\varphi(V)) \subset \psi(W)$, do đó $\dim \psi\varphi(V) \leq \dim \psi(W)$, tức là: $\text{rank } \psi\varphi \leq \text{rank } \psi$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều cần chứng minh.

b) Xét ánh xạ $\bar{\psi} : \text{Im } \varphi \rightarrow U$, $\bar{\psi} = \psi|_{\text{Im } \varphi}$, tức là $\bar{\psi}(\alpha) = \psi(\alpha)$ với mọi $\alpha \in \text{Im } \varphi$.

Khi đó, $\text{Ker } \bar{\psi} = \text{Ker } \psi \cap \text{Im } \varphi$ và $\text{Im } \bar{\psi} = \bar{\psi}(\text{Im } \varphi) = \psi(\text{Im } \varphi) = (\psi\varphi)(V) = \text{Im } \psi\varphi$, tức là: $\dim \text{Im}(\psi\varphi) + \dim(\text{Ker } \psi \cap \text{Im } \varphi) = \dim \text{Im } \varphi$.

Do vậy, $\text{rank}(\psi\varphi) = \text{rank } \varphi - \dim(\text{Ker } \psi \cap \text{Im } \varphi)$.

c) Ta có: $\dim \text{Ker } \psi + \dim \text{Im } \psi = \dim W$ nên $\dim \text{Ker } \psi = \dim W - \text{rank } \psi$.

Bởi vậy, theo câu b)

$$\text{rank}(\psi\varphi) = \text{rank } \varphi - \dim(\text{Ker } \psi \cap \text{Im } \varphi)$$

$$\geq \text{rank } \varphi - \dim \text{Ker } \psi = \text{rank } \varphi - (\dim W - \text{rank } \psi) = \text{rank } \varphi + \text{rank } \psi - \dim W.$$

□

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 18. Không gian vectơ Euclide

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Tích vô hướng và không gian vectơ Euclide

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trên V là một ánh xạ

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$$

thỏa các điều kiện sau: với mọi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in V, \beta \in V$ với mọi $a \in \mathbb{R}$,

i) $\langle \alpha_1 + \alpha_2, \beta \rangle = \langle \alpha_1, \beta \rangle + \langle \alpha_2, \beta \rangle$

ii) $\langle a\alpha, \beta \rangle = a\langle \alpha, \beta \rangle$

iii) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$

iv) $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$

$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$.

Chú ý rằng, do tính chất i), ii). Khi cố định vectơ $\beta \in V$, tích vô hướng là một ánh xạ tuyến tính đối với biến thứ nhất. Do tính chất đối xứng (giao hoán) iii), ta dễ dàng suy ra khi cố định $\alpha \in V$, thì tích vô hướng là một ánh xạ tuyến tính đối với biến thứ 2, tức là: $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2 \in V, a \in \mathbb{R}$ ta có:

i') $\langle \alpha, \beta_1 + \beta_2 \rangle = \langle \alpha, \beta_1 \rangle + \langle \alpha, \beta_2 \rangle$

ii') $\langle \alpha, a\beta \rangle = a\langle \alpha, \beta \rangle$

Định nghĩa

Không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, trong đó có thêm một tích vô hướng được gọi là không gian vectơ Euclide.

Chú ý

Từ tính chất tuyến tính của tích vô hướng theo từng biến (tính chất i, ii, i', ii'), ta dễ dàng có các công thức sau:

- $\langle 0, \alpha \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$ với mọi $\alpha \in V$.

- Giả sử $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i, \beta = \sum_{j=1}^n b_j \beta_j$ thì:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \right\rangle = a_i b_j \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle \alpha_i, \beta_j \rangle$$

1.2 Các ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^n, \forall \alpha = (x_1, \dots, x_n), \beta = (y_1, \dots, y_n) \in V$, ta định nghĩa:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Đây là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$ và $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian vectơ Euclide.

2. Cho $V = C[a, b]$ là không gian vectơ các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Với mọi $f(x), g(x)$ thuộc $C[a, b]$ ta định nghĩa:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Đây là một tích vô hướng trên $C[a, b]$ và $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian vectơ Euclide.

1.3 Độ dài và góc

1. **Định nghĩa.** Cho E là không gian vectơ Euclide. Với mỗi vectơ $\alpha \in E$, độ dài của vectơ α , ký hiệu là $\|\alpha\|$, là số thực không âm, xác định như sau:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

2. **Các ví dụ**

(a) $E = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

(b) $E = C[a, b], f(x) \in C[a, b]$ thì $\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$

3. **Một vài tính chất cơ bản**

Trong không gian vectơ Euclide E , ta có:

- $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ và $a \in \mathbb{R}, \|a\alpha\| = |a| \cdot \|\alpha\|$
- Bất đẳng thức Bunhiacópki

$$\forall \alpha, \beta \in E, |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ α, β phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh

- Nếu $\beta = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu $\beta \neq 0$ thì tam thức bậc hai:
 $f(t) = \langle \beta, \beta \rangle t^2 - 2\langle \alpha, \beta \rangle t + \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha - t\beta, \alpha - t\beta \rangle \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.
 Do đó, $\Delta'_f \leq 0 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle \leq 0 \Leftrightarrow |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

- Bất đẳng thức tam giác

$$\forall \alpha, \beta \in E, \|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &\leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\| + \|\beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 \end{aligned}$$

Do đó, $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

Do chứng minh trên, ta có:

$$\|\alpha\| = \|(\alpha + \beta) + (-\beta)\| \leq \|\alpha + \beta\| + \|-\beta\| = \|\alpha + \beta\| + \|\beta\|$$

Do đó, $\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\|$

4. Góc giữa hai vectơ

- Cho E là không gian vectơ Euclide. Ta gọi góc giữa hai vectơ khác không $\alpha, \beta \in E$ là số thực $\varphi \in [0, \pi]$ xác định bởi:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$$

Cần chú ý rằng do bất đẳng thức Bunhiacốpski, $\left| \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \right| \leq 1$ nên góc giữa hai vectơ khác không $\alpha, \beta \in E$ xác định và duy nhất.

- Hai vectơ $\alpha, \beta \in E$ gọi là trực giao, ký hiệu $\alpha \perp \beta$ nếu $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.
Nếu $\alpha, \beta \neq 0$ thì $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ góc giữa chúng là $\varphi = \frac{\pi}{2}$

- Công thức Pitago

$$\forall \alpha, \beta \in E, \alpha \perp \beta \Leftrightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

Thật vậy, $\forall \alpha, \beta \in E$, ta có:

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

Do đó, $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$

2 Hệ trực giao, hệ trực chuẩn, cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn

2.1 Các khái niệm cơ bản

Ta nhắc lại rằng hai vectơ α, β của không gian vectơ Euclide E gọi là trực giao, ký hiệu $\alpha \perp \beta$ nếu $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E$ gọi là hệ trực giao nếu chúng đôi một trực giao, nghĩa là $\alpha_i \perp \alpha_j \quad \forall i \neq j$.

Một cơ sở của E mà là hệ trực giao, gọi là cơ sở trực giao của E .

- Vectơ $\alpha \in E$ gọi là trực giao với tập con $A \subset E$ nếu α trực giao với mọi vectơ của A . Khi đó ta ký hiệu $\alpha \perp A$.
- Hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E$ gọi là hệ trực chuẩn nếu chúng là hệ trực giao và mỗi vectơ α_i là vectơ đơn vị (nghĩa là độ dài của α_i , $\|\alpha_i\| = 1$).

Như vậy, hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E$ là hệ trực chuẩn khi và chỉ khi

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Một cơ sở của E mà là hệ trực chuẩn, gọi là cơ sở trực chuẩn của E .

- Nếu $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là một hệ trực giao, không chứa vectơ không của E thì hệ:

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \quad u_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \quad \dots, \quad u_m = \frac{\alpha_m}{\|\alpha_m\|}$$

là một hệ trực chuẩn của E .

Phép biến đổi trên ta gọi là phép trực chuẩn hóa một hệ vectơ trực giao.

Nếu $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là cơ sở trực giao của E thì trực chuẩn hóa cơ sở đó, ta sẽ được một cơ sở trực chuẩn của E .

Chú ý rằng, một hệ vectơ trực giao không chứa vectơ không thì độc lập tuyến tính. Chứng minh điều này khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc.

2.2 Trực giao hóa một hệ vectơ độc lập tuyến tính (phương pháp Gram-Schmidt)

- **Trực giao hóa**

Trong không gian Euclide E cho hệ vectơ độc lập tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Khi đó, hệ vectơ:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 \\ &\vdots \\ \beta_m &= \alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle \alpha_m, \beta_i \rangle}{\langle \beta_i, \beta_i \rangle} \beta_i \end{aligned}$$

là hệ vectơ trực giao, độc lập tuyến tính trong E , và $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle = \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$

Phép chuyển từ hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sang hệ vectơ trực giao $\beta_1, \dots, \beta_m$ như trên gọi là phép trực giao hóa hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

- **Chú ý**

- Nếu $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là cơ sở của không gian vectơ con U của không gian vectơ Euclide E , ($U = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$), trực giao hóa hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ta được hệ vectơ trực giao $\beta_1, \dots, \beta_m$ và $U = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle = \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$.
Do đó, $\beta_1, \dots, \beta_m$ chính là cơ sở trực giao của U .
- Từ chú ý trên, một không gian Euclide E luôn có cơ sở trực chuẩn.
Thật vậy, để tìm cơ sở trực chuẩn của E , đầu tiên ta tìm một cơ sở $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bất kỳ của E , sau đó trực giao hóa cơ sở trên ta được cơ sở trực giao $\beta_1, \dots, \beta_m$ của E . Cuối cùng, trực chuẩn hóa cơ sở trực giao $\beta_1, \dots, \beta_m$, ta sẽ được cơ sở trực chuẩn $u_1, \dots, u_m$ của E .

Cũng lưu ý bạn đọc rằng, trong quá trình trực giao hóa hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, để đơn giản cho quá trình tính toán, ta có thể thay vectơ β_i bởi một vectơ tỷ lệ với β_i . Sau đây là một ví dụ:

• Ví dụ

Trong không gian vectơ Euclide $\mathbb{R}^4$, cho không gian vectơ con U sinh bởi các vectơ:

$$\alpha_1 = (0, 1, 0, 1)$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 1, 0)$$

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\alpha_4 = (1, 2, 1, 2)$$

$$(U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle)$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của U .

Giải

Để tìm cơ sở trực chuẩn của U , đầu tiên ta tìm một cơ sở của U . Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là một cơ sở của U . Từ đó ta có $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là một cơ sở của U .

Tiếp theo, trực giao hóa hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ để được một cơ sở trực giao của U .

Ta có:

$$\beta_1 = \alpha_1 = (0, 1, 0, 1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 0, 1) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

Để phép tính tiếp theo đơn giản hơn, ta có thể chọn $\beta_2 = (0, 1, 2, -1)$.

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 = (1, 1, 1, 1) - \frac{2}{2}(0, 1, 0, 1) - \frac{2}{6}(0, 1, 2, -1) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Để đơn giản, ta có thể chọn $\beta_3 = (3, -1, 1, 1)$.

Vậy cơ sở trực giao của U là:

$$\beta_1 = (0, 1, 0, 1)$$

$$\beta_2 = (0, 1, 2, -1)$$

$$\beta_3 = (3, -1, 1, 1)$$

Trực chuẩn hóa cơ sở trực giao $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, ta được cơ sở trực chuẩn của U là:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
e_2 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \\
e_3 &= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

3 Hình chiếu trực giao và đường trực giao

3.1 Định lý - Định nghĩa

Cho E là không gian vectơ Euclide, và U là không gian vectơ con của E . Khi đó mỗi vectơ $\alpha \in E$ đều viết được duy nhất dưới dạng:

$$\alpha = \alpha' + \beta$$

trong đó $\alpha' \in U$ và $\beta \perp U$.

Vectơ α' gọi là hình chiếu trực giao của vectơ α lên U , còn $\beta = \alpha - \alpha'$ là đường trực giao hạ từ α xuống U .

Chứng minh

Giả sử $e_1, \dots, e_k$ là một cơ sở trực chuẩn của U . Vì $\alpha' \in U$ nên α' có dạng:

$$\alpha' = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$$

Ta cần tìm $x_1, \dots, x_k$ để $\beta = \alpha - \alpha' \perp U$.

$$\begin{aligned}
\beta = \alpha - \alpha' \perp U &\Leftrightarrow \alpha - \alpha' \perp e_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \\
&\Leftrightarrow \langle \alpha - \alpha', e_j \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \alpha, e_j \rangle - \langle \alpha', e_j \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \alpha, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^k x_i e_i, e_j \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \alpha, e_j \rangle - x_j = 0 \\
&\Leftrightarrow x_j = \langle \alpha, e_j \rangle
\end{aligned}$$

Vậy vectơ α' xác định duy nhất bởi

$$\alpha' = \sum_{j=1}^k \langle \alpha, e_j \rangle \cdot e_j$$

trong đó $e_1, \dots, e_k$ là một cơ sở trực chuẩn của U , còn vectơ β xác định bởi $\beta = \alpha - \alpha'$.

3.2 Cách tìm hình chiếu trực giao

Cho không gian vectơ Euclide E , và U là không gian vectơ con của E . Cho vectơ $\alpha \in E$. Để tìm hình chiếu trực giao của vectơ α lên U , ta có thể tìm bằng hai cách sau:

1. Cách 1. Tìm một cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, \dots, e_k$ của U . Khi đó hình chiếu trực giao α' của vectơ α xác định bởi công thức:

$$\alpha' = \langle \alpha, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle \alpha, e_2 \rangle \cdot e_2 + \dots + \langle \alpha, e_k \rangle \cdot e_k$$

2. Giả sử $u_1, \dots, u_k$ là cơ sở bất kỳ của U . Vì $\alpha' \in U$ nên $\alpha' = x_1 u_1 + \dots + x_k u_k$. Ta cần tìm $x_1, \dots, x_k$ để vectơ $\alpha - \alpha' \perp U$.

$$\alpha - \alpha' \perp U$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \alpha' \perp u_j \text{ với } j = 1, 2, \dots, k$$

$$\Leftrightarrow \langle \alpha', u_j \rangle = \langle \alpha, u_j \rangle$$

$$\Leftrightarrow x_1 \langle u_1, u_j \rangle + x_2 \langle u_2, u_j \rangle + \dots + x_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle \alpha, u_j \rangle$$

Lần lượt cho $j = 1, 2, \dots, k$, ta có $x_1, \dots, x_k$ là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \langle u_1, u_1 \rangle x_1 + \langle u_2, u_1 \rangle x_2 + \dots + \langle u_k, u_1 \rangle x_k = \langle \alpha, u_1 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle x_1 + \langle u_2, u_2 \rangle x_2 + \dots + \langle u_k, u_2 \rangle x_k = \langle \alpha, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_1, u_k \rangle x_1 + \langle u_2, u_k \rangle x_2 + \dots + \langle u_k, u_k \rangle x_k = \langle \alpha, u_k \rangle \end{cases} \quad (*)$$

Như vậy, để tìm hình chiếu α' của α lên U , ta cần tìm một cơ sở $u_1, \dots, u_k$ của U , sau đó lập hệ phương trình (*). Giải hệ (*) ta sẽ có nghiệm duy nhất $(x_1, \dots, x_k)$. Khi đó: $\alpha' = x_1 u_1 + \dots + x_k u_k$.

Ví dụ

Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ cho không gian vectơ con U sinh bởi các vectơ:

$$\alpha_1 = (0, 1, 0, 1)$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 1, 0)$$

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\alpha_4 = (1, 2, 1, 2)$$

$$(U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle)$$

Tìm hình chiếu trực giao của vectơ $x = (1, 1, 0, 0)$ lên U .

Giải

Cách 1:

Đầu tiên ta tìm một cơ sở trực chuẩn của U . Ở ví dụ trước ta đã tìm được một cơ sở trực chuẩn của U là:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ e_2 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \\ e_3 &= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Do đó, hình chiếu trực giao của x là:

$$\begin{aligned} x' &= \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_3 \rangle e_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_3 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Cách 2:

Đầu tiên tìm một cơ sở của U . Dễ thấy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là một cơ sở của U . Sau đó lập hệ phương trình dạng (*).

Ta có:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= 2 \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle &= 1 \\ \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle &= 2 \\ \langle x, \alpha_1 \rangle &= 1 \\ \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle &= 2 \\ \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle &= 2 \\ \langle x, \alpha_2 \rangle &= 1 \\ \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle &= 4 \\ \langle x, \alpha_3 \rangle &= 2 \end{aligned}$$

Do đó, hệ phương trình (*) trong trường hợp này có dạng:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Đây là hệ Cramer, giải hệ này ta có $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}$. Do đó, hình chiếu trực giao của vectơ x là:

$$x' = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

3.3 Định nghĩa

Cho U là không gian vectơ con của không gian Euclide E và α là vectơ thuộc E . Khi đó góc giữa hai vectơ α và hình chiếu trực giao α' cũng được gọi là góc giữa vectơ α và không gian con U .

Độ dài của đường thẳng trực giao $\beta = \alpha - \alpha'$ từ α đến U gọi là khoảng cách từ vectơ α đến U .

4 Phép biến đổi trực giao và phép biến đổi đối xứng

4.1 Hai không gian Euclide đẳng cấu

Cho hai không gian vectơ Euclide E_1 với tích vô hướng $\langle, \rangle_1$ và E_2 với tích vô hướng $\langle, \rangle_2$. Ta nói E_1 đẳng cấu với E_2 , ký hiệu $E_1 \cong E_2$ nếu tồn tại đẳng cấu giữa hai không gian vectơ $f: E_1 \rightarrow E_2$ thỏa:

$$\forall \alpha, \beta \in E_1, \quad \langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle_2$$

Quan hệ đẳng cấu là một quan hệ tương đương và ta có kết quả sau:

Định lý. Hai không gian Euclide đẳng cấu khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều.

Chứng minh

Nếu $E_1 \cong E_2$ thì theo định nghĩa E_1, E_2 là các không gian vectơ đẳng cấu nên $\dim E_1 = \dim E_2$.

Ngược lại, giả sử $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ và $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α), $\beta_1, \dots, \beta_n$ (β) lần lượt là cơ sở trực chuẩn của E_1 và E_2 . Khi đó tồn tại ánh xạ tuyến tính $f : E_1 \rightarrow E_2$, $f(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vì f biến cơ sở thành cơ sở nên f là đẳng cấu không gian vectơ. Ta chứng minh $\langle x, y \rangle_1 = \langle f(x), f(y) \rangle_2$.

Thật vậy, $\forall x, y \in E_1$, ta có:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$$
$$y = \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_1 &= \left\langle \sum x_i \alpha_i, \sum y_j \alpha_j \right\rangle_1 \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle_1 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle_2 &= \left\langle f\left(\sum x_i \alpha_i\right), f\left(\sum y_j \alpha_j\right) \right\rangle_2 \\ &= \left\langle \sum x_i f(\alpha_i), \sum y_j f(\alpha_j) \right\rangle_2 \\ &= \left\langle \sum x_i \beta_i, \sum y_j \beta_j \right\rangle_2 \\ &= \sum x_i y_j \langle \beta_i, \beta_j \rangle_2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Vậy $\langle x, y \rangle_1 = \langle f(x), f(y) \rangle_2$ và $E_1 \cong E_2$.

4.2 Phép biến đổi trực giao

4.2.1 Ma trận trực giao

Ma trận vuông A gọi là ma trận trực giao nếu $A^{-1} = A^t$ (A^t : ma trận chuyển vị của A).

4.2.2 Định nghĩa

Cho E là không gian vectơ Euclide. Một phép biến đổi tuyến tính f của E gọi là phép biến đổi trực giao của E nếu f bảo toàn tích vô hướng, tức là:

$$\forall \alpha, \beta \in E, \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle$$

Dễ thấy, phép biến đổi trực giao là một song ánh vì:

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \langle f(\alpha), f(\alpha) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Tính chất cơ bản nhất của phép biến đổi trực giao được cho trong định lý sau.

4.2.3 Định lý

Cho f là phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ Euclide E . Khi đó các khẳng định sau tương đương:

1. f là phép biến đổi trực giao.
2. f biến cơ sở trực chuẩn của E thành cơ sở trực chuẩn của E .
3. Ma trận của f trong một cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

Chứng minh

1) $\Rightarrow$ 2) Giả sử $e_1, \dots, e_n$ là cơ sở trực chuẩn của E . Khi đó:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Vì f là phép biến đổi trực giao, nên:

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Do đó, $f(e_1), \dots, f(e_n)$ là cơ sở trực chuẩn.

2) $\Rightarrow$ 3) Ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn $e_1, \dots, e_n$ theo định nghĩa chính là ma trận đổi cơ sở từ $e_1, \dots, e_n$ sang cơ sở trực chuẩn $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Vì ma trận đổi cơ sở giữa hai cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao (xem bài tập 10) nên ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

3) $\Rightarrow$ 1) Giả sử $e_1, \dots, e_n$ (e) là cơ sở trực chuẩn của E và $A = A_{f/(e)}$ là ma trận trực giao ($A^t = A^{-1}$).

Với $\alpha, \beta \in E$, $\alpha = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $\beta = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= [\alpha]_{/(e)}^t [\beta]_{/(e)} \\ &= [\alpha]_{/(e)}^t I [\beta]_{/(e)} \\ &= [\alpha]_{/(e)}^t A^{-1} A [\beta]_{/(e)} \\ &= [\alpha]_{/(e)}^t A^t A [\beta]_{/(e)} \\ &= (A [\alpha]_{/(e)})^t (A [\beta]_{/(e)}) \\ &= [f(\alpha)]_{/(e)}^t \cdot [f(\beta)]_{/(e)} \\ &= \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle \end{aligned}$$

4.3 Phép biến đổi đối xứng

4.3.1 Định nghĩa

Cho E là không gian vectơ Euclide. Phép biến đổi tuyến tính f của E gọi là phép biến đổi đối xứng nếu $\forall \alpha, \beta \in E : \langle f(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, f(\beta) \rangle$.

4.3.2 Định lý

Một phép biến đổi tuyến tính của E là phép biến đổi đối xứng khi và chỉ khi ma trận của f trong một cơ sở trực chuẩn là ma trận đối xứng.

Chứng minh

Giả sử $f : E \rightarrow E$ là phép biến đổi tuyến tính, ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn $e_1, \dots, e_n$ là $A = [a_{ij}]$. Khi đó:

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$$

Với mọi i, j ta có:

$$\begin{aligned}\langle f(e_i), e_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} \langle e_k, e_j \rangle = a_{ji} \\ \langle e_i, f(e_j) \rangle &= \left\langle e_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_i, e_k \rangle = a_{ij}\end{aligned}$$

- Nếu f là phép biến đổi đối xứng, thì $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$. Do đó, $a_{ji} = a_{ij}$. Vậy ma trận A là ma trận đối xứng.
- Nếu ma trận A đối xứng, tức là $a_{ji} = a_{ij}$ thì $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle \quad \forall i, j$.

Nếu $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\beta = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ của E thì:

$$\begin{aligned}\langle f(\alpha), \beta \rangle &= \left\langle \sum x_i f(e_i), \sum y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle f(e_i), e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, f(e_j) \rangle \\ &= \left\langle \sum x_i e_i, \sum y_j f(e_j) \right\rangle \\ &= \langle \alpha, f(\beta) \rangle\end{aligned}$$

Vậy f là phép biến đổi đối xứng.

ĐẠI SỐ CƠ BẢN

(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)

Bài 19. Bài tập về không gian véctơ Euclide

PGS TS Mỹ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1. Tìm một cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của không gian véctơ con L của $\mathbb{R}^4$ trong các trường hợp sau:

- a. $L = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ với $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (0, -1, 0, 1)$
b. $L = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ với $\alpha_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\alpha_3 = (3, 2, 8, -7)$.
c. $L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \left| \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right. \right\}$

Giải. a. Dễ thấy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ĐLTT nên $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là cơ sở của L . Để tìm cơ sở trực giao của L ta chỉ cần trực giao hóa hệ véctơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ta có:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (1, 1, 1, 1) - \frac{2}{2}(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 1, 1) \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 \\ &= (0, -1, 0, 1) - \frac{-1}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_3 = (1, -1, -1, 1)$. Vậy, cơ sở trực giao của L là:

$$\beta_1 = (1, 1, 0, 0), \beta_2 = (0, 0, 1, 1), \beta_3 = (1, -1, -1, 1)$$

Trực chuẩn hóa cơ sở trực giao trên, ta được cơ sở trực chuẩn của L là:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), e_2 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- b. Giải tương tự câu a., chi tiết dành cho bạn đọc.
c. Đầu tiên, ta tìm một cơ sở của L . L là không gian nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

do đó cơ sở của L là hệ nghiệm cơ bản của hệ (1). Hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số x_3, x_4 . Ta có:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_3 + x_4 \\ x_1 &= x_2 - x_4 = x_3\end{aligned}$$

do đó, hệ nghiệm cơ bản của hệ (1) là:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0); \alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$$

Do đó, cơ sở của L là α_1, α_2 . Trực giao hóa hệ vectơ α_1, α_2 , ta sẽ được cơ sở trực giao của L . Ta có:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (0, 1, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_2 = (-1, 2, -1, 3)$ và cơ sở trực giao của L là:

$$\beta_1 = (1, 1, 1, 0), \beta_2 = (-1, 2, -1, 3)$$

Trực chuẩn hóa cơ sở trực giao β_1, β_2 ta được cơ sở trực chuẩn của L là:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)$$

□

2. Chứng minh các hệ vectơ sau là hệ trực giao trong $\mathbb{R}^4$. Hãy bổ sung chúng để được một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$

a. $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 0, -1, 0)$

b. $\alpha_1 = (0, 0, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 1, -1)$

Giải. a. Vì $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ nên $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Để bổ sung được một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$, đầu tiên ta phải bổ sung thêm 2 vectơ α_3, α_4 của $\mathbb{R}^4$ để được một cơ sở của $\mathbb{R}^4$, sau đó ta trực giao hóa cơ sở đó, ta sẽ được cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$, chứa các vectơ α_1, α_2 . Có nhiều cách chọn các vectơ α_3, α_4 để $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ (chọn để định thức cấp 4 tương ứng là khác 0). Ví dụ ta có thể chọn $\alpha_3 = (0, 0, 1, 0), \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$. Khi đó định thức cấp 4 tương ứng của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bằng 1, nên hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ĐLTT nên là cơ sở của $\mathbb{R}^4$. Trực giao hóa hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 \\ &= \alpha_2 - 0 \cdot \beta_1 = \alpha_2 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 \\ &= (0, 0, 1, 0) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{-1}{2}(1, 0, -1, 0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_3 = (1, -1, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \alpha_4 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_3 \rangle}{\langle \beta_3, \beta_3 \rangle} \beta_3 \\ &= (0, 0, 0, 1) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{0}{2}(1, 0, -1, 0) - \frac{-1}{4}(1, -1, 1, -1) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_4 = (0, -1, 0, 1)$

Vậy ta có thể bổ sung thêm 2 véctơ

$$\beta_3 = (1, -1, 1, -1), \beta_4 = (0, -1, 0, 1)$$

để được $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_4$ là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$.

b. Giải tương tự câu **a.**, chỉ tiết xin dành cho bạn đọc. □

3. Hãy tìm hình chiếu trực giao và khoảng cách của véctơ x lên không gian con L của $\mathbb{R}^4$ với:

a. $x = (1, -1, 1, 0)$, $L = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, trong đó

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 1, 1), \alpha_3 = (0, -1, 0, 1)$$

b. $x = (1, 0, 1, 2)$, $L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$

Giải. a. Cách 1. Đầu tiên ta tìm cơ sở trực chuẩn của L . Theo bài 1, cơ sở trực chuẩn của L là

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), e_2 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), e_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Do đó, hình chiếu trực giao x' của x lên L là

$$\begin{aligned} x' &= \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_3 \rangle e_3 \\ &= 0 \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \\ &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

Khoảng cách từ véctơ x đến L là độ dài của véctơ $x - x' = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \right)$ do đó, $d(x, L) = \|x - x'\| = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$.

Cách 2. Để thấy một cơ sở của L là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= 2, \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 2, \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = -1 \\ \langle x, \alpha_1 \rangle &= 0, \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 4, \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle = 0, \\ \langle x, \alpha_2 \rangle &= 1, \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 2, \langle x, \alpha_3 \rangle = 1 \end{aligned}$$

Do đó, hình chiếu x' của x có dạng

$$x' = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3$$

trong đó x_1, x_2, x_3 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 1 \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ, ta có nghiệm $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{2}$, do đó

$$x' = 0\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

và $d(x, L) = \|x - x'\| = \frac{9}{4}$.

b. Cách 1. Tìm một cơ sở trực chuẩn của L , theo bài 1c., đó là cơ sở:

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), \quad e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$$

Do đó, hình chiếu trực giao x' của x lên L là:

$$\begin{aligned} x' &= \langle x, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle x, e_2 \rangle \cdot e_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{4}{\sqrt{15}}e_2 \\ &= (\frac{6}{15}, \frac{18}{15}, \frac{6}{15}, \frac{12}{15}) = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}) \end{aligned}$$

và khoảng cách từ x đến L là:

$$d(x, L) = \|x - x'\| = \left\| (\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}) \right\| = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$$

Cách 2. Đầu tiên ta tìm một cơ sở của L . Một cơ sở của L là hệ nghiệm cơ bản của hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

theo bài 1c., cơ sở đó là

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$$

Ta có

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 3, \quad \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 1, \quad \langle x, \alpha_1 \rangle = 2, \quad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2, \quad \langle x, \alpha_2 \rangle = 2$$

Hình chiếu trực giao x' của x lên L là vectơ $x' = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$, trong đó, x_1, x_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

do đó, $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{4}{5}$.

Vậy

$$x' = \frac{2}{5}\alpha_1 + \frac{4}{5}\alpha_2 = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$$

và $d(x, L) = \|x - x'\| = \frac{18}{5}$.

□

4. Cho L là không gian vectơ con của không gian Euclide E và $x_o \in E$. Ta gọi tập

$$P := L + x_o = \{x + x_o | x \in L\}$$

là một đa tập tuyến tính của E . Khoảng cách từ một vectơ $\alpha \in E$ đến đa tập P , ký hiệu $d(\alpha, P)$ xác định bởi:

$$d(\alpha, P) = \min\{\|\alpha - u\| : u \in P\}$$

Chứng minh rằng khoảng cách $d(\alpha, P)$ bằng độ dài đường trực giao hạ từ vectơ $\alpha - x_o$ đến L (tức là $d(\alpha, P) = d(\alpha - x_o, L)$).

Giải. Giả sử hình chiếu trực giao của $\alpha - x_o$ lên L là β , tức là $\alpha - x_o = \beta + \gamma$, trong đó, $\beta \in L$, $\gamma \perp L$. Khi đó

$$d(\alpha - x_o, L) = \|\gamma\|$$

với mọi vectơ $u = x_o + y \in P$ (tức là $y \in L$), ta có

$$\begin{aligned} \|\alpha - u\| &= \sqrt{\langle \alpha - u, \alpha - u \rangle} = \sqrt{\langle \alpha - x_o - y, \alpha - x_o - y \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \beta - y + \gamma, \beta - y + \gamma \rangle} = \sqrt{\|\beta - y\|^2 + \|\gamma\|^2} \geq \|\gamma\| \\ &(\langle \beta - y, \gamma \rangle = 0 \text{ vì } \gamma \perp \beta - y \in L) \end{aligned}$$

do đó $\min \|\alpha - u\| = \|\gamma\|$, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{aligned} \|\beta - y\|^2 = 0 &\iff \beta = y = u - x_o \\ &\iff u = x_o + \beta \end{aligned}$$

Vậy

$$d(\alpha, P) = \min\{\|\alpha - u\|\} = d(\alpha - x_o, L)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = x_o + \beta$, trong đó β là hình chiếu trực giao của $\alpha - x_o$ lên L . $\square$

5. Tìm khoảng cách từ vectơ $\alpha = (2, 1, 4, 4)$ đến đa tạp P xác định bởi hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \quad (1)$$

Giải. Đầu tiên ta phải viết đa tạp P dưới dạng

$$(P) = L + x_o = \{x + x_o \mid x \in L\}$$

trong đó, L là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$. Vì tập nghiệm của hệ phương trình (1) chính bằng tập nghiệm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng của hệ (1) cộng với nghiệm riêng của hệ (1), do đó, L chính là không gian con các nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng hệ (1)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (L)$$

còn x_o là nghiệm riêng bất kỳ của hệ (1). Ta có $x_o = (1, 2, 3, 4)$ là nghiệm của hệ (1)

Theo bài tập 4. $d(\alpha, P) = d(\alpha - x_o, L)$. Vậy ta cần tìm khoảng cách từ vectơ $\alpha - x_o = (1, -1, 1, 0)$ đến không gian con L các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

theo bài 3., $d(\alpha - x_o, L) = \frac{9}{4}$

Vậy, $d(\alpha, P) = \frac{9}{4}$ $\square$

6. Cho L là KGVTV con của không gian Euclide E . Ký hiệu:

$$L^\perp = \{x \in E \mid x \perp L\}$$

Chứng minh

a. $L^\perp$ là KGVTV con của E . $L^\perp$ gọi là phần bù trực giao của L .

- b. $(L^\perp)^\perp = L$
- c. $L + L^\perp = E, L^\perp \cap L = \{0\}$
- d. $\dim L^\perp + \dim L = \dim E$

Giải. a. Kiểm tra trực tiếp dựa vào tiêu chuẩn không gian véctơ con.

- b. Giả sử $\alpha \in L$, khi đó $\forall \beta \in L^\perp$, ta có $\beta \perp L$, do đó $\beta \perp \alpha$. Vậy $\alpha \perp L^\perp$ nên $\alpha \in (L^\perp)^\perp$.
Ngược lại, giả sử $\alpha \in (L^\perp)^\perp$, khi đó $\alpha \perp L^\perp$. Hình chiếu trực giao của α lên L là α' , ta có

$$\alpha = \alpha' + \beta, \quad \beta \perp L, \quad \alpha' \in L$$

vì $\beta \in L^\perp$ nên $\beta \perp \alpha, \beta \perp \alpha'$, do đó

$$0 = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha' + \beta, \beta \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$$

từ đó $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ nên $\beta = 0$ và $\alpha = \alpha' \in L$.

- c. Với mỗi $\alpha \in L$, gọi α' là hình chiếu của α lên L , ta có:

$$\alpha = \alpha' + \beta, \quad \alpha' \in L, \quad \beta \perp L$$

tức là $\beta \in L^\perp$ nên $\alpha \in L + L^\perp$. Vậy $L + L^\perp = E$.

Nếu $\alpha \in L^\perp \cap L$ thì $\alpha \in L^\perp$ nên $\alpha \perp L$, do đó $\alpha \perp \alpha$ tức là $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$. Vậy, $\alpha = 0$ nghĩa là $L^\perp \cap L = \{0\}$.

- d. $\dim L^\perp + \dim L = \dim(L^\perp + L) - \dim(L^\perp \cap L) = \dim E - \dim\{0\} = \dim E$

□

7. Tìm cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của không gian con $L^\perp$ của $\mathbb{R}^4$, biết L là các không gian con dưới đây:

- a. $L = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ với $\alpha_1 = (1, 0, -1, 2), \alpha_2 = (-1, 1, 0, -1)$
- b. L là không gian con các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải. Để tìm cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của $L^\perp$, ta tìm một cơ sở của $L^\perp$. Sau đó, sẽ trực giao hóa, trực chuẩn hóa như trong bài tập 1.

- a. Véctơ

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^\perp &\iff x \perp L \\ &\iff x \perp \alpha_1 \text{ và } x \perp \alpha_2 \\ &\iff \begin{cases} \langle x, \alpha_1 \rangle = 0 \\ \langle x, \alpha_2 \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Vậy, $L^\perp$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính trên, do đó hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính (2) chính là một cơ sở của $L^\perp$. Việc tìm cơ sở trực giao, trực chuẩn của $L^\perp$ bây giờ được tiến hành giống như trong bài tập 1c. Các tính toán chi tiết xin dành cho bạn đọc.

b. Vectơ

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L &\iff (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ là nghiệm của hệ (1)} \\ &\iff \begin{cases} \langle x, \beta_1 \rangle = 0 \\ \langle x, \beta_2 \rangle = 0 \\ \langle x, \beta_3 \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

trong đó $\beta_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\beta_2 = (2, 1, -1, 1)$, $\beta_3 = (1, 2, -2, 2)$

$$\begin{aligned} &\iff x \perp \beta_1, x \perp \beta_2, x \perp \beta_3 \\ &\iff x \perp \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle \end{aligned}$$

Như vậy $x \in L \iff x \perp U = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle, \iff x \in U^\perp$ tức là $L = U^\perp$, do đó $L^\perp = U$. Vậy, $L^\perp = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$. Từ đó, một hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ là cơ sở của $L^\perp$. Dễ thấy β_1, β_2 là cơ sở của $L^\perp$. Việc trực giao hóa, trực chuẩn hóa hệ vectơ β_1, β_2 để được cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của $L^\perp$ khá đơn giản (tiến hành như bài tập 1a). Chi tiết xin được dành cho bạn đọc.

□

8. Cho L_1, L_2 là các không gian con của KGVTEuclide E với $\dim L_1 < \dim L_2$. Chứng minh tồn tại vectơ $\alpha \neq 0$, $\alpha \in L_2$ và α trực giao với L_1

Giải. Ta có

$$\dim L_1 + \dim L_1^\perp = \dim L_2 + \dim L_2^\perp = \dim E \text{ (Bài tập 6)}$$

Do $\dim L_1 < \dim L_2$ nên $\dim L_1^\perp > \dim L_2^\perp$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \dim(L_2 \cap L_1^\perp) &= \dim L_2 + \dim L_1^\perp - \dim(L_2 + L_1^\perp) \\ &> \dim L_2 + \dim L_2^\perp - \dim(L_2 + L_1^\perp) \\ &= \dim E - \dim(L_2 + L_1^\perp) \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $\dim(L_2 \cap L_1^\perp) > 0$ do đó $L_2 \cap L_1^\perp \neq \{0\}$, nên tồn tại vectơ $\alpha \in L_2 \cap L_1^\perp$, $\alpha \neq 0$. Rõ ràng $\alpha \in L_2$ và $\alpha \perp L_1$ □

9. Chứng minh rằng mọi hệ vectơ trực giao không chứa vectơ không đều độc lập tuyến tính.

Giải. Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là hệ trực giao, không chứa vectơ không ($\alpha_i \neq 0$) của không gian vectơ Euclide và giả sử $\sum_{j=1}^m a_j \alpha_j = 0$. Khi đó, với mọi i , ta có:

$$0 = \langle \alpha_i, 0 \rangle = \langle \alpha_i, \sum_{j=1}^m a_j \alpha_j \rangle = \sum_{j=1}^m a_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = a_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$$

do đó $a_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 0$ với mọi i , vì $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \neq 0$ nên $a_i = 0$, $\forall i$. Vậy, hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là hệ ĐLTT. □

10. Chứng minh rằng: Trong không gian Euclide, ma trận đối cơ sở giữa 2 cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

Giải. Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α) và $\beta_1, \dots, \beta_n$ (β) là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide E và giả sử:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} \beta_i \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n$$

Gọi $\mathbf{T}$ là ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β) thì:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\langle \alpha_k, \beta_l \rangle = \langle \alpha_k, \sum_{i=1}^n a_{il} \alpha_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_{il} \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle = a_{kl}$$

Mặt khác

$$\langle \alpha_k, \beta_l \rangle = \langle \sum_{i=1}^n b_{ik} \beta_i, \beta_l \rangle = \sum_{i=1}^n b_{ik} \langle \beta_i, \beta_l \rangle = b_{lk}$$

Vậy $b_{lk} = a_{kl}$ với mọi k, l , tức là $\mathbf{T}^t = \mathbf{T}^{-1}$, do đó, $\mathbf{T}$ là ma trận trực giao. $\square$

11. Cho E là KGVTV Euclide. Chứng minh rằng phép biến đổi tuyến tính của E , $f : E \rightarrow E$ là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi f là bảo toàn độ dài của một vectơ ($\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$) với mọi $\alpha \in E$

Giải. Nếu f là phép biến đổi trực giao thì

$$\forall \alpha \in E, \langle f(\alpha), f(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

do đó $\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$. Để chứng minh chiều ngược lại, ta có nhận xét: $\forall \alpha, \beta \in E$,

$$\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle$$

do đó

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2) \quad (*)$$

Bây giờ giả sử f bảo toàn độ dài của vectơ, khi đó, do công thức (*), ta có

$$\begin{aligned} \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(\alpha) + f(\beta)\|^2 - \|f(\alpha)\|^2 - \|f(\beta)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2) = \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

Vậy, f là phép biến đổi trực giao. $\square$