

Câu 1. (6,0 điểm)

1) Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tìm giá trị của x để $A < 0$

2) Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

- 1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$
- 2) Chứng minh rằng nếu $m \neq 5$ thì $m = a^4 + 4$ không là số nguyên tố

Câu 3. (3,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A , biết:

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2 \cdot (x-3)^2$$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

a) Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$

b) Chứng minh : $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

c) Chứng minh: H cách đều ba cạnh tam giác DEF

d) Trên các đoạn HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots (2n - 1)$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1)

a) Với $x \neq -1$; 1 thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x) \end{aligned}$$

b) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

2)

$$\begin{aligned} x^4 - 30x^2 + 31x - 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x+5)(x+6) &= 0 (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x-5)(x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-6 \end{cases}$$

Câu 2.

$$1. \quad x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x-5) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x-5} \quad (\text{vì } x=5 \text{ không là nghiệm của } (2))$$

$$\Leftrightarrow y = (x+1) + \frac{3}{x+5}$$

Vì x, y nguyên nên $x - 5$ là ước của 3 $\Leftrightarrow x - 5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay
 $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

x	2	6	4	8
y	0	8	0	8

Vậy nghiệm của phương trình $(x; y) = \{(2; 0); (4; 0); (6; 8); (8; 8)\}$

2)

$$\begin{aligned} m &= a^4 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a) \\ &= [(a^2 + 2a + 1) + 1] [(a^2 - 2a + 1) + 1] = [(a + 1)^2 + 1] [(a - 1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Vì $(a + 1)^2 \geq 1 \forall a, (a - 1)^2 \geq 0 \forall a$ nên giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ nhất là 1 khi $a = -1$

Giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ hai là 1 nếu $a = 1$

Còn các trường hợp khác là tích > 1

Vậy ngoài $\begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$ khi đó $m = 5$ thì có thể phân tích thành tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên m không thể là số nguyên tố.

Câu 3.

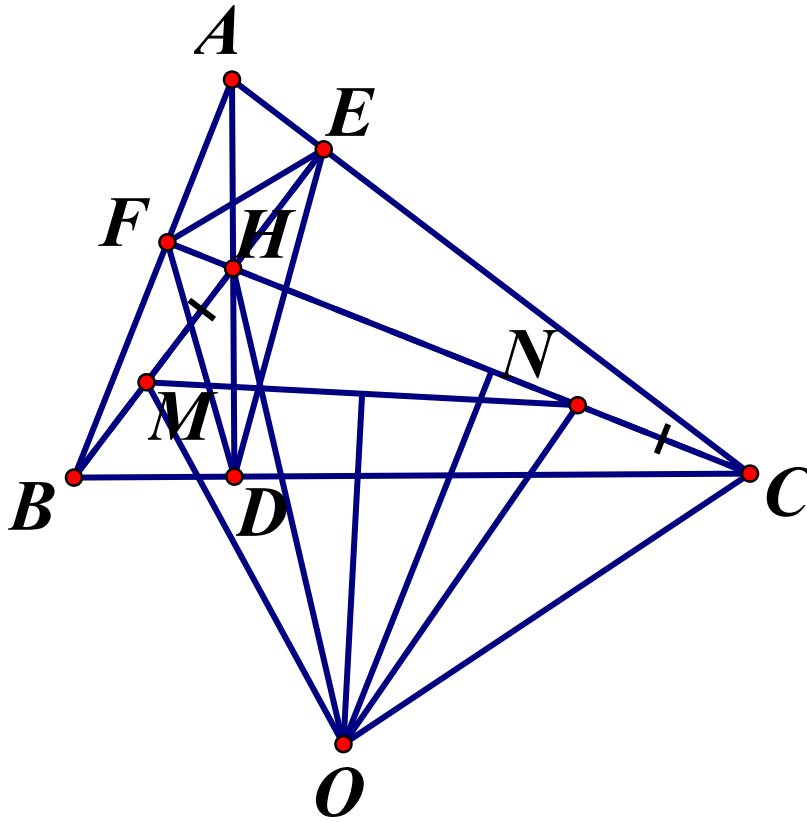
Đặt $a = x - 1, b = 3 - x$ ta có: $a + b = 2$

$$\begin{aligned} A &= a^4 + b^4 + 6(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \\ &= [(a + b)^2 - 2ab]^2 + 4a^2b^2 = (4 - 2ab)^2 + 4a^2b^2 \\ &= 8a^2b^2 - 16ab + 16 = 8(ab - 1)^2 + 8 \geq 8 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b = 2$ và $ab = 1 \Leftrightarrow a = b = 1 \Rightarrow x = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 8 tại $x = 2$

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh
$$\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$$

Tương tự ta có:
$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

Nên
$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$$

b) Trước hết chứng minh $\triangle BDH \sim \triangle BEC \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC$

Và $\triangle CDH \sim \triangle CFB \Rightarrow CH \cdot CF = CD \cdot CB$

$$\Rightarrow BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot (BD + CD) = BC^2 \text{ (đpcm)}$$

c) Chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \sphericalangle AEF = \sphericalangle ABC$

$$\text{Và } \triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CBA} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{CED}$$

Mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự : DA, FC là phân giác của các góc EDF và DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF (đpcm)

d) Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC , ta có

$$\triangle OMH = \triangle ONC (c.c.c) \Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{OCN} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có $\triangle OCH$ cân tại O nên $\widehat{OHC} = \widehat{OCH} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{OHC} = \widehat{OCH} \Rightarrow HO$ là phân giác của góc \widehat{BHC}

Vậy O là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của \widehat{BHC} nên O là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là O

Câu 5. $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

Đề $2n^3 + n^2 + 7n + 1; 2n - 1$ thì $5; 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1; 2n - 1$

