

Người làm: Lục Vĩnh Linh
 Zalo: Vinhlinh Luc - số đt zalo: 092568123
 Email: lucvinhlinh@gmail.com

CD1: HÌNH HỌC.

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

A. Trắc nghiệm (nếu có)

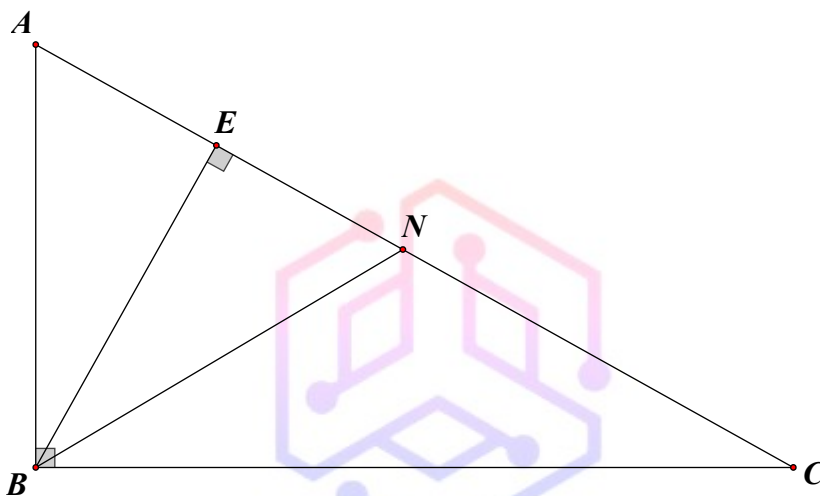
Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Tam giác ABC vuông tại B ($AB < AC$), đường cao BE . Biết $EC - EA = AB$. Khi đó $\sphericalangle ACB$ bằng

A. 40° B. 30° C. 25° D. 20°

Lời giải

A. 40° **B. 30°** C. 25° D. 20°



Trên cạnh EC lấy điểm N sao cho $EA = EN$

Suy ra $EC - EA = EC - EN = NC = AB$ (1)

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle NBE$ có

$\sphericalangle AEB = \sphericalangle NEB = 90^\circ$ (BE là đường cao)

$AE = EN$ (Cách dựng)

BE là cạnh chung

Do đó $\triangle ABE = \triangle NBE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BA = BN$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Suy ra $\triangle ABN$ cân tại $B \Rightarrow \sphericalangle BAN = \sphericalangle ANB$

Từ (1) và (2) suy ra $NB = NC$ nên $\triangle BNC$ cân tại $N \Rightarrow \sphericalangle NBC = \sphericalangle NCB$

$$\sphericalangle NBC + \sphericalangle ABN = 90^\circ$$

$$\sphericalangle NCB + \sphericalangle BAN = 90^\circ$$

Mà $\sphericalangle NBC = \sphericalangle NCB \Rightarrow \sphericalangle ABN = \sphericalangle BAN$

Ta có $\triangle ABN$ cân tại B có $\sphericalangle ABN = \sphericalangle BAN \Rightarrow \triangle ABN$ là tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{BAN} = 60^\circ$$

$$\widehat{NCB} + \widehat{BAN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NCB} = 90^\circ - \widehat{BAN} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Đáp án B

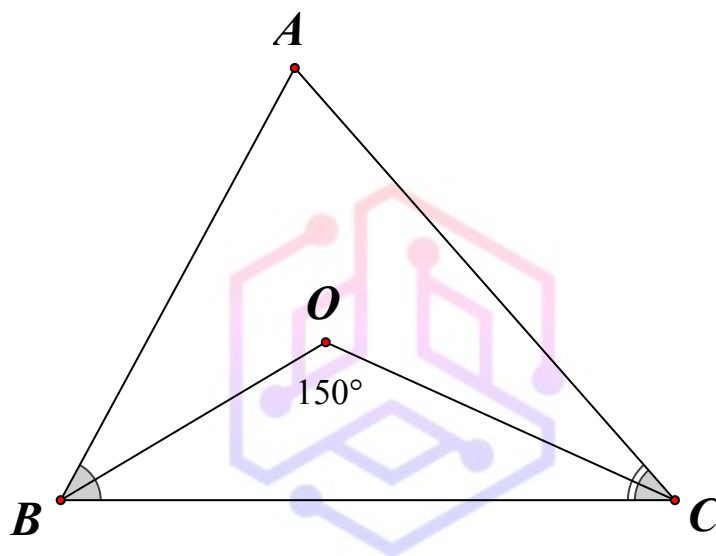
Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Tam giác ABC có tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại O . Biết $\widehat{BOC} = 150^\circ$. Vậy số đo góc A bằng

- A. 120° B. 100° C. 30° D. 60°

Lời giải

- A. 120° B. 100° C. 30° D. 60°



Xét tam giác ABC có: $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$ (áp dụng định lí tổng ba góc trong tam giác)

Xét tam giác BOC có: $\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ - \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

Vì OC là tia phân giác của $\widehat{C} \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OCA} = \frac{1}{2}\widehat{C}$

Vì OB là tia phân giác của $\widehat{B} \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OBA} = \frac{1}{2}\widehat{B}$

Nên $\frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$

Vậy: $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Đáp án A.

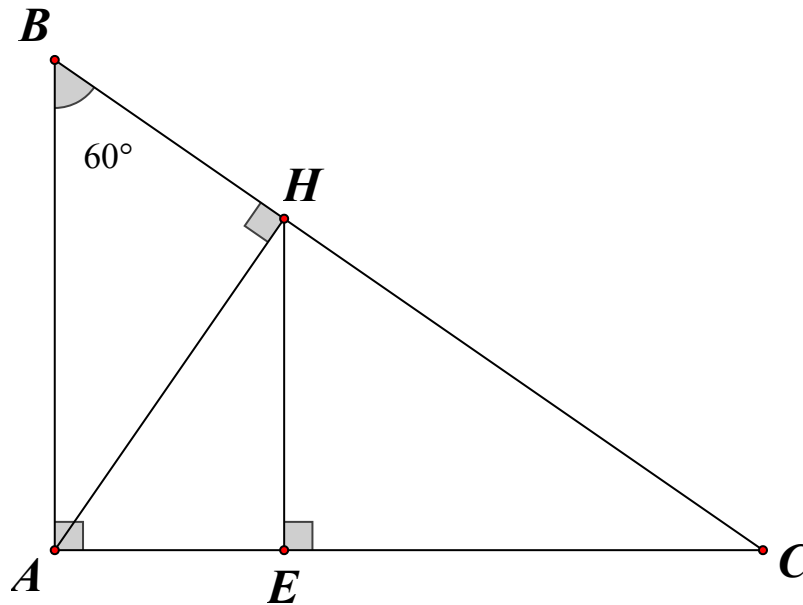
Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$. Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$, kẻ $HE \perp AC$. Số đo góc AHE bằng

- A. 75° B. 60° C. 45° D. 30°

Lời giải

- A. 75° B. 60° C. 45° D. 30°



Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 30^\circ$

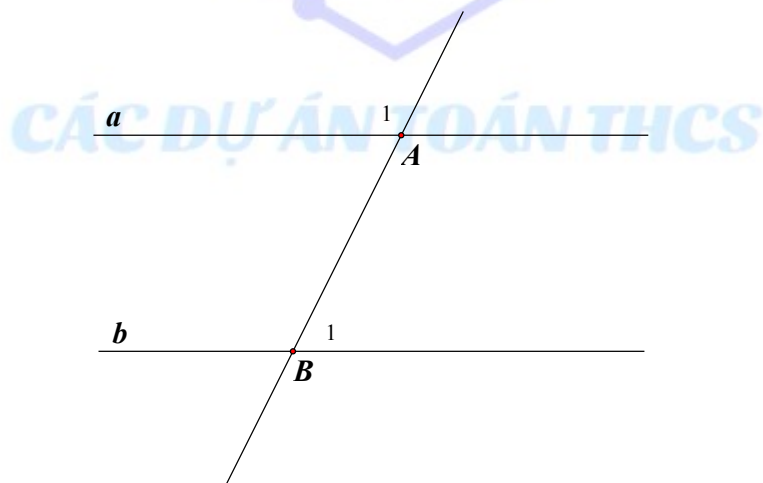
$\triangle HEC$ vuông tại E suy ra $\angle EHC + \angle HCE = 90^\circ \Rightarrow \angle EHC = 90^\circ - \angle HCE = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Lại có $\angle AHC = 90^\circ \Rightarrow \angle AHE + \angle EHC = 90^\circ \Rightarrow \angle AHE = 90^\circ - \angle EHC = 30^\circ$

Đáp án D

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho $a \parallel b$ và $\angle A_1 = 2\angle B_1$ (hình vẽ bên). Số đo $\angle B_1$ bằng



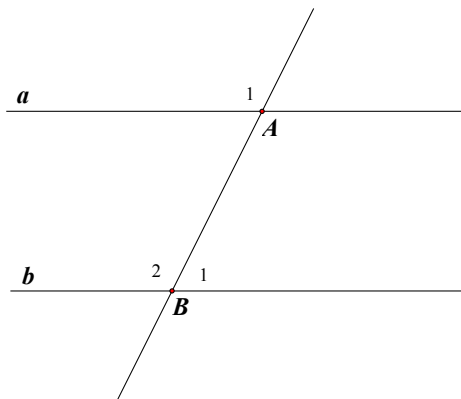
A. 30°

B. 60°

C. 90°

D. 45°

Lời giải



- A. 30° B. 60° C. 90° D. 45°

Vì $a \parallel b$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (đồng vị) và $\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1$

Mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ hay $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = 180^\circ$ mà $\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 + 2\widehat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 60^\circ$$

Đáp án B

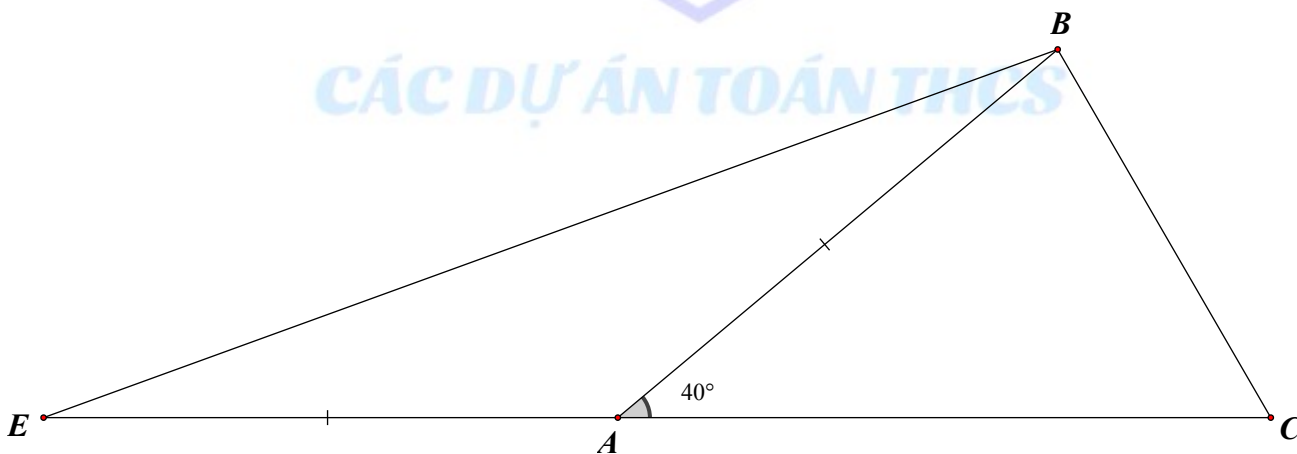
Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 – 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$ trên tia đối của AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Số đo $\widehat{E}BE$ là:

- A. 80° B. 100° C. 90° D. 120°

Lời giải

- A. 80° B. 100° C. 90° D. 120°



Xét tam giác ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong tam giác) và $\widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$ Suy ra

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 140^\circ \text{ nên } \widehat{B} = \frac{140^\circ + 20^\circ}{2} = 80^\circ; \widehat{C} = 60^\circ$$

Xét tam giác AEB cân tại A (do $AE = AB$ (gt) nên $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$ (tính chất của tam giác cân) (1)

Lại có: \widehat{BAC} là góc ngoài tam giác AEB $\widehat{BAC} = \widehat{AEB} + \widehat{ABE}$ (2)

$$\widehat{ABE} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 20^\circ$$

Từ (1) và (2) suy ra

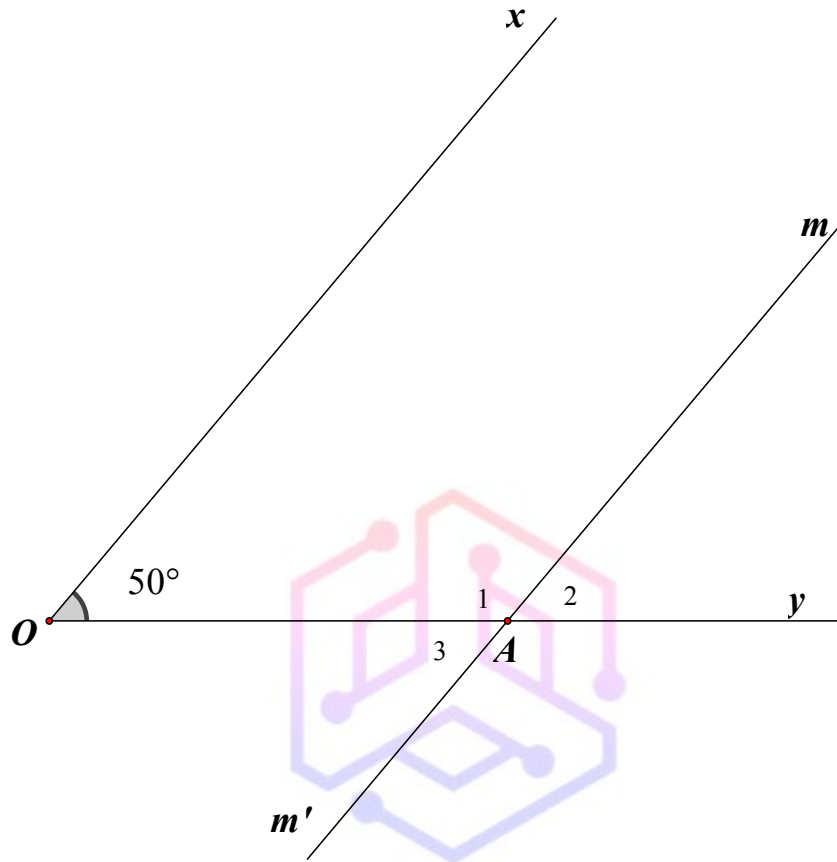
$$\text{Do đó } \widehat{E}BE = \widehat{E}BA + \widehat{ABE} = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 – 2022)

Cho $\angle xOy = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Để Am song song với Ox thì số đo của $\angle Am$ là

- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

Lời giải



Vì $Am // Ox$ nên $\angle A_2 = \angle xOy = 50^\circ$ (Hai góc đồng vị)

$$\Rightarrow \angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\Rightarrow \angle Am = 130^\circ$$

$$\Rightarrow \angle Am' = 50^\circ$$

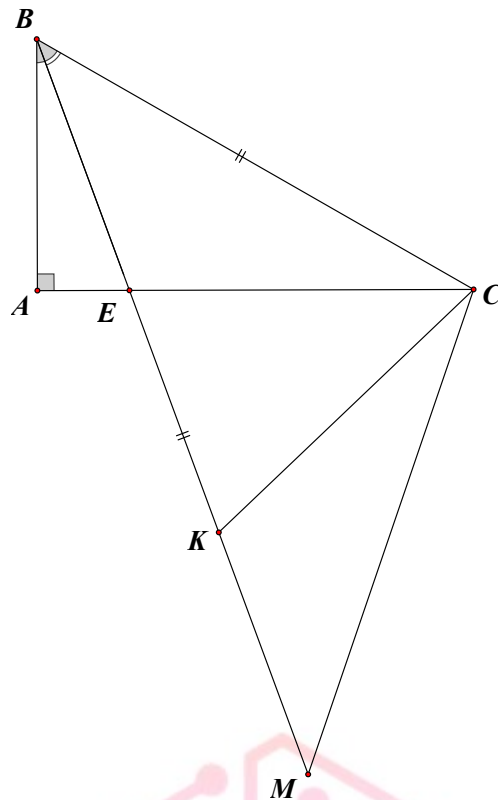
- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

B. Tự luận

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy điểm E sao cho $\angle EBC = 2\angle ABE$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh $\angle MBC$ và $\angle BMC$.

Lời giải



Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC$ (1) suy ra $\triangle BKC$ cân tại B

$$\Rightarrow \angle BKC = \angle BCK = \frac{180^\circ - \angle BKC}{2} = \frac{180^\circ - \angle BKC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle EBC = 90^\circ - \angle ABE = \angle AEB$$

Mà $\angle AEB = \angle CEK$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle BKC = \angle CEK$$

Do đó $\triangle CKE$ cân tại C

$$\Rightarrow CE = CK \text{ và } \angle CEK = \angle ECK$$

$$\Rightarrow \angle EEB = \angle EKM \text{ (cùng bù với hai góc bằng nhau).}$$

$$\text{Mà } BK = EM \Rightarrow BE = KM$$

Xét $\triangle CEB$ và $\triangle CKM$ có

$$CE = CK \text{ (}\triangle CKE \text{ cân tại } C\text{)}$$

$$\angle EEB = \angle EKM \text{ (cmt)}$$

$$BE = KM \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle CEB = \triangle CKM$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \angle MBC = \angle BMC \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2021 - 2022)

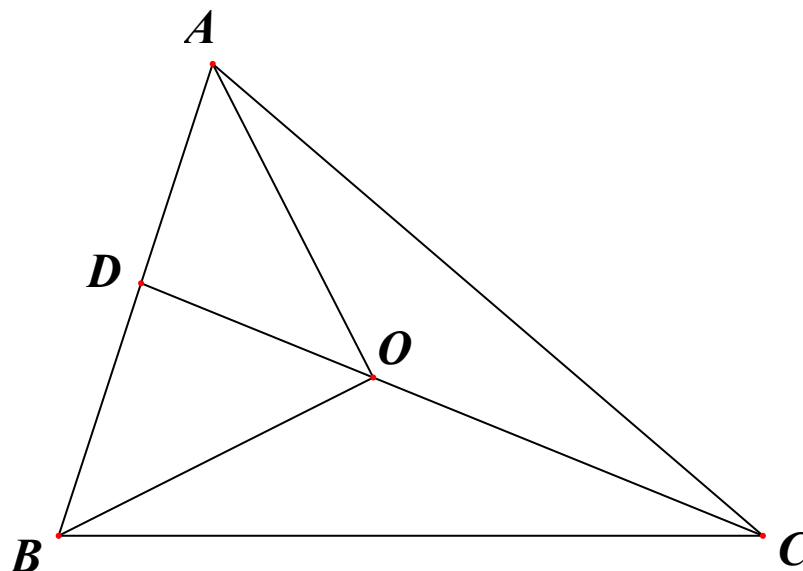
Cho tam giác ABC , O là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\angle BOC = \angle A + \angle ABO + \angle ACO$.

$$\angle ABO + \angle ACO = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

b) Biết $\angle ABO + \angle ACO = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ và tia BO là tia phân giác của $\angle ABC$. Chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của $\angle ACB$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

Gọi D là giao điểm của CO và cạnh AB

Xét $\triangle BOD$ có $\widehat{BOC} = \widehat{BBO} + \widehat{BDO}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$\triangle ADC$ có $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{ACO}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Hay $\widehat{BDO} = \widehat{A} + \widehat{ACO}$

Suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{BBO} + \widehat{BDO} = \widehat{BBO} + \widehat{A} + \widehat{ACO}$

Vậy $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

b) Biết $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ và tia BO là tia phân giác của \widehat{ABC} . Chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của \widehat{ACB} .

Nếu $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ thì $\widehat{BOC} = \widehat{A} + 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Xét $\triangle BOC$ ta có : $\widehat{OCB} = 180^\circ - (\widehat{BOC} + \widehat{OBC}) = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} \right)$

$\widehat{OCB} = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

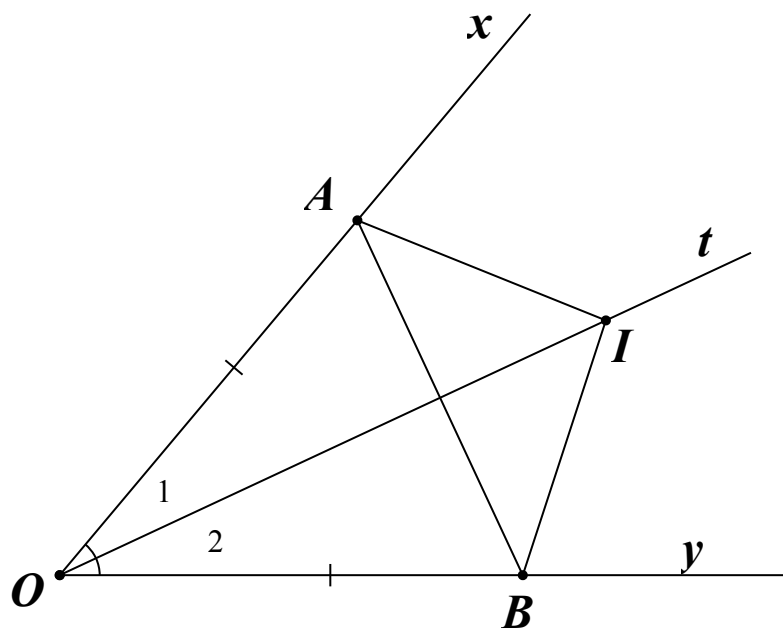
Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho góc nhọn xOy . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Lấy các điểm A, B, I lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Ot (A, B, I khác O) sao cho $OA = OB < OI$. Chứng minh: $IA = IB$ và $OI \perp AB$.

Lời giải



+) Xét ΔAOI và ΔBOI có:

$OA = OB$ (gt)

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (vì Ot là tia phân giác của góc xOy)

OI cạnh chung

Vậy $\Delta AOI = \Delta BOI$ (c-g-c)

$\Rightarrow IA = IB$ (hai cạnh tương ứng)

+) Ta có $OA = OB$ (gt)

$IA = IB$ (cmt)

Suy ra: O, I cách đều hai điểm A và B

Hay OI là đường trung trực AB hay $OI \perp AB$.

Dạng 3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Dạng 4. Bất đẳng thức tam giác

A. Trắc nghiệm

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 45^\circ$; $2\widehat{B} = 3\widehat{C}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

- A. $BC < AC < AB$ B. $AC < AB < BC$ C. $AC < BC < AB$ D. $BC < AB < AC$

Lời giải

- A. $BC < AC < AB$ B. $AC < AB < BC$ C. $AC < BC < AB$ D. $BC < AB < AC$

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 45^\circ$; $2\widehat{B} = 3\widehat{C}$.

Suy ra

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 135^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 270^\circ$$

$$\Rightarrow 3\widehat{C} + 2\widehat{C} = 270^\circ$$

$$\Rightarrow 5\widehat{C} = 270^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 54^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 81^\circ$$

Do đó $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C} \Rightarrow BC < AC < AB$

B. Tự luận

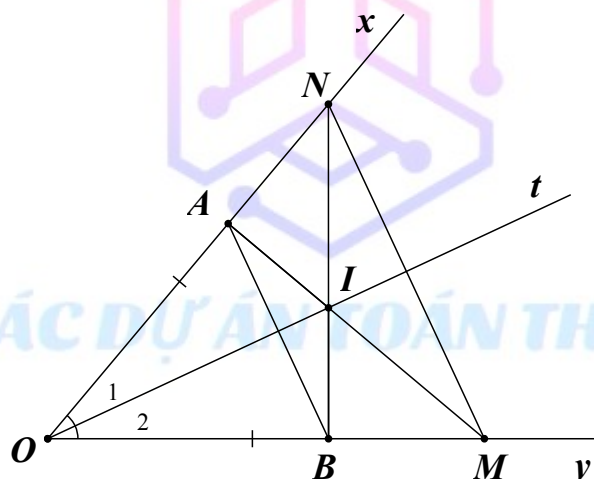
Câu 3. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho góc nhọn xOy . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Lấy các điểm A, B, I lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Ot (A, B, I khác O) sao cho $OA = OB < OI$.

a) Chứng minh: $IA = IB$ và $OI \perp AB$.

b) AI cắt tia Oy tại M , BI cắt tia Ox tại N . Chứng minh $AB + MN < 2AM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AOI$ và $\triangle BOI$ có:

$$OA = OB (gt)$$

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ (vì } Ot \text{ là tia phân giác của góc } xOy)$$

OI cạnh chung

Vậy $\triangle AOI = \triangle BOI$ (c-g-c)

$$\Rightarrow IA = IB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

+) Ta có $OA = OB$ (gt)

$$IA = IB \text{ (cmt)}$$

Suy ra: O, I cách đều hai điểm A và B

Hay OI là đường trung trực AB hay $OI \perp AB$.

b) $\triangle IAB$ có: $AI + BI > AB$ (Bất đẳng thức tam giác)

$\triangle IMN$ có: $IM + IN > MN$ (Bất đẳng thức tam giác)

Cộng về các bất đẳng thức trên ta được:

$$AI + IM + BI + IN > AB + MN$$

$$\Rightarrow AM + BN > AB + MN \quad (1)$$

Xét $\triangle AOM$ và $\triangle BON$ có

$$OA = OB \quad (\text{gt})$$

\hat{O} chung

$$\hat{O}AM = \hat{O}BN \quad (\text{vì } \hat{O}AI = \hat{O}BI \text{ do } \triangle AOI = \triangle BOI)$$

Do đó $\triangle AOM = \triangle BON$ (g-c-g)

Suy ra: $AM = BN$ (Hai cạnh tương ứng) (2)

Kết hợp (1) và (2) suy ra: $2AM > AB + MN$.

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn

Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

A. Trắc nghiệm

Câu 5.

Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 70^\circ$; $\hat{ACB} = 50^\circ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B . Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $HB < HC$

B. $HB > HC$

C. $HB = HC$

D. $\hat{BAC} = 70^\circ$

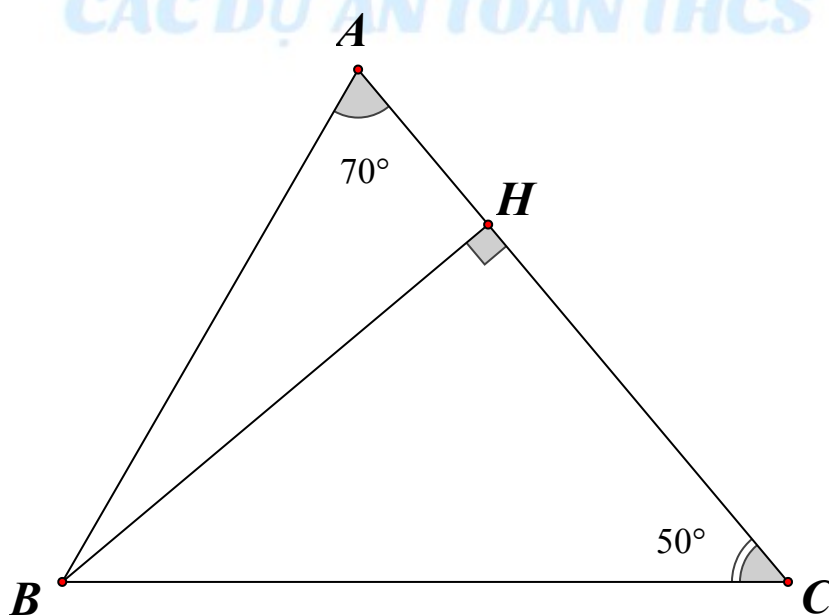
A. $HB < HC$

B. $HB > HC$

C. $HB = HC$

D. $\hat{BAC} = 70^\circ$

Lời giải



Ta có $\triangle BHC$ vuông tại H .

$$\text{Và } \hat{ACB} = 50^\circ \Rightarrow \hat{HCB} = 50^\circ \Rightarrow \hat{HBC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

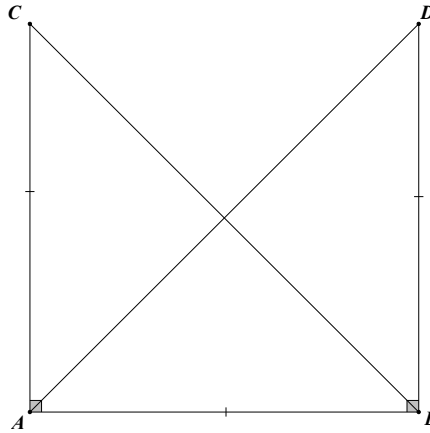
$$\Rightarrow \hat{HCB} > \hat{HBC} \Rightarrow HB > HC \quad (\text{Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác})$$

Đáp án B

B. Tự luận

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

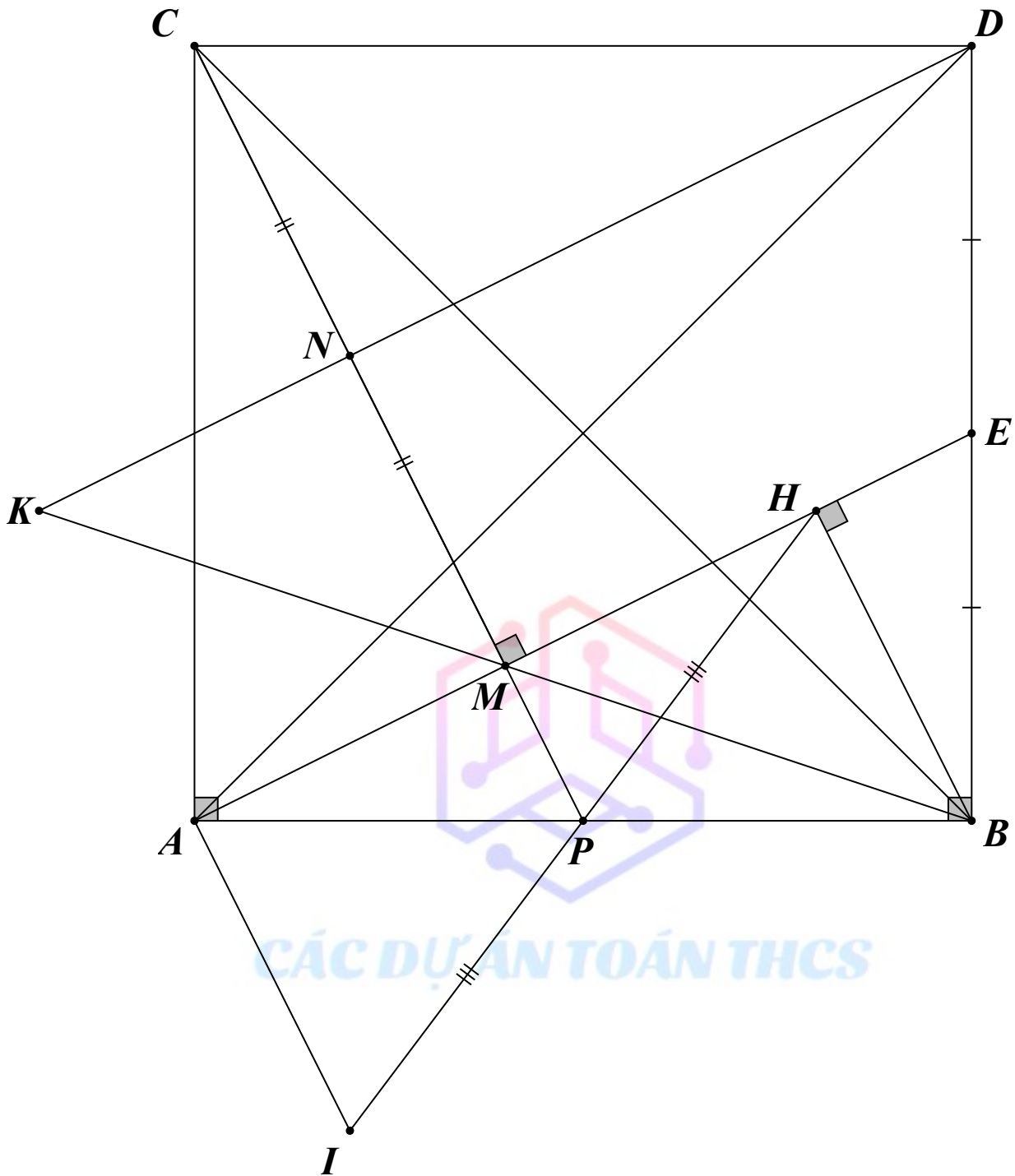
Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AB ta vẽ tam giác ABD vuông cân tại B như hình vẽ.



- 1) Gọi E là trung điểm của BD . Đường thẳng qua C vuông góc với AE tại M cắt AB tại P . Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.
- 2) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AE tại H .
 - a) Chứng minh: $MA = MH$.
 - b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.
- 3) Gọi N là trung điểm của CM , đường thẳng BM cắt đường thẳng DN tại K . Tính số đo góc BKD .

Lời giải

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS



1) Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.

Ta có:

$$\widehat{EAB} + \widehat{EAM} = 90^\circ$$

$$\widehat{ACP} + \widehat{EAM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{ACP} \text{ (cùng phụ với } \widehat{EAM} \text{)}$$

+ Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CAP$, có:

$$\widehat{ABE} = \widehat{CAP} (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{ACP} \text{ (cmt)}$$

Vậy: $\triangle ABE = \triangle CAP$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

2)

a) Chứng minh: $MA = MH$.

$$\text{Vì } \triangle ABE = \triangle CAP \text{ (cmt)} \Rightarrow AP = BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AP = BP$$

Trên tia đối của PH lấy điểm I sao cho $PI = PH$

Ta có $\triangle PAI = \triangle PBH$ (c.g.c) ($PI = PH$, $\sphericalangle API = \sphericalangle BPH$, $AP = BP$)

Nên $AI = HB$ (hai cạnh tương ứng)

và $\sphericalangle IAP = \sphericalangle HBP$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $AI \parallel HB$ (cùng vuông góc với AH)

Mà $\sphericalangle AHB = 90^\circ$ nên $\sphericalangle IAH = 90^\circ$ (quan hệ giữa tính song song và vuông góc)

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle HAB$ có

$$AI = HB$$

$$\sphericalangle AHB = \sphericalangle IAH = 90^\circ$$

AH là cạnh chung

Do đó $\triangle AHI = \triangle HAB$ (c.g.c)

$\Rightarrow HI = HB$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $PA = PB$ và $PI = PH$ do đó suy ra $PA = PB = PI = PH$

Xét $\triangle MAP$ và $\triangle MHP$ có

$$PA = PH \text{ (cmt)}$$

$$\sphericalangle AMP = \sphericalangle HMP \text{ (} \triangle PAI = \triangle PBH \text{)}$$

Do đó $\triangle MAP = \triangle MHP$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $MA = MH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.

Có $MA = MH$ (CM trên) (1)

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAM$, có:

$$\sphericalangle AHB = \sphericalangle CMA (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\sphericalangle HAB = \sphericalangle MCA \text{ (cùng phụ với } \sphericalangle CAM \text{)}$$

Vậy: $\triangle ABH = \triangle CAM$ (ch- gn)

$\Rightarrow HB = MA$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HB = HM$

$\Rightarrow \triangle HBM$ vuông cân tại H .

3) Tính số đo góc BKD .

+ $\triangle HBM$ vuông cân tại $H \Rightarrow \sphericalangle BME = 45^\circ$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAM$ có

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle AHB = 90^\circ$$

$$AB = CA$$

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle HAB \text{ (} \triangle ABE = \triangle CAP \text{)}$$

Do đó $\triangle ABH = \triangle CAM$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = CM$ (hai cạnh tương ứng)

+ Vì $MA = MH; NM = NC \Rightarrow MA = NC$

+ Xét $\triangle AMC$ và $\triangle CND$, có:

$$AC = CD \text{ (gt)}$$

$$MA = NC \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{EAM} = \widehat{BCN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ACM} \text{)}$$

Vậy: $\triangle AMC = \triangle CND$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{CND} = 90^\circ \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow CP \perp DK$$

+ Mặt khác: $CP \perp EA \Rightarrow DK \parallel EA$

$$\Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BME} = 45^\circ$$

Vậy $\widehat{BKD} = 45^\circ$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

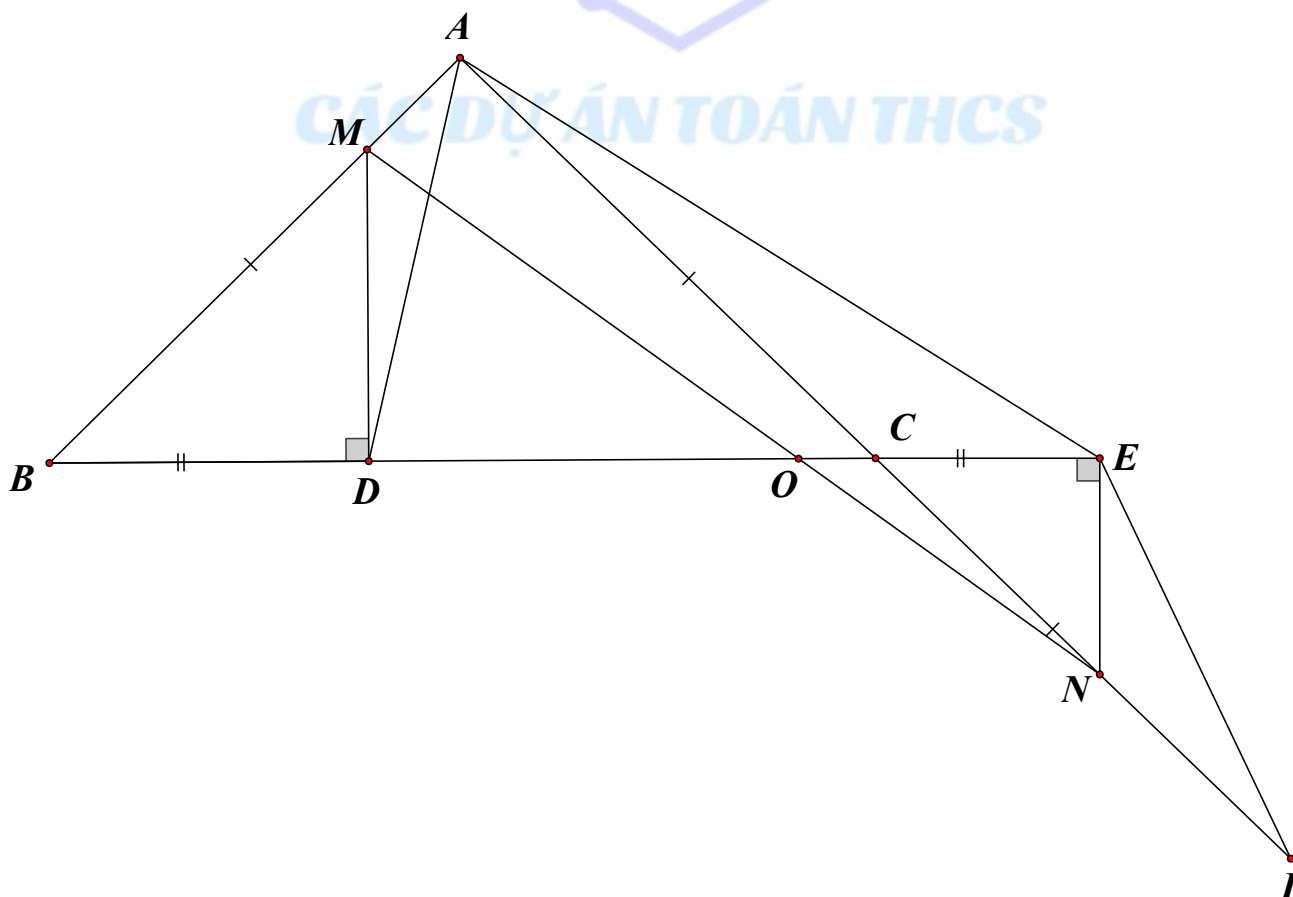
Cho tam giác ABC cân tại A (góc A là góc tù). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

a) Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle ICE$ và $AB + AC < AD + AE$.

b) Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB và AI theo thứ tự tại M và N . Chứng minh $BM = CN$.

c) Chứng minh rằng: Chu vi tam giác ABC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN .

Lời giải



a) Theo đầu bài ta có: $\triangle ABC$ cân tại A suy ra: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (hai góc đáy)

và $\widehat{ACB} = \widehat{ECN}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ECN}$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ICE$ có:

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ECN} \text{ (CM trên)}$$

$$AB = EI \text{ (Cùng bằng } AC \text{)}$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle ICE$ (c-g-c)

$$\Rightarrow AD = EI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle AEI$ có $AE + EI > AI \Rightarrow AE + AD > AC + CI \Rightarrow AE + AD > AC + AB$

b) Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CEI$ có $\widehat{BDM} = \widehat{ECN} = 90^\circ$; $BD = CE$ (gt); $\widehat{MBD} = \widehat{NCE} \Rightarrow \triangle BDM = \triangle CEN$ (g-c-g)

$$\Rightarrow BM = CN \text{ (cặp cạnh tương ứng)}.$$

c) Theo câu b ta có $AM = IN$

$$\text{Vì } BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + AN.$$

$$\text{Lại có } BD = CE \text{ (gt)} \Rightarrow BC = DE.$$

Gọi giao điểm của MN và BC là O ta có:

$$MO > OD; NO > OE \Rightarrow MO + NO > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC$$

$$\Rightarrow AB + AC + BC < AM + AN + MN \text{ hay chu vi tam giác } ABC \text{ nhỏ hơn chu vi tam giác } AMN.$$

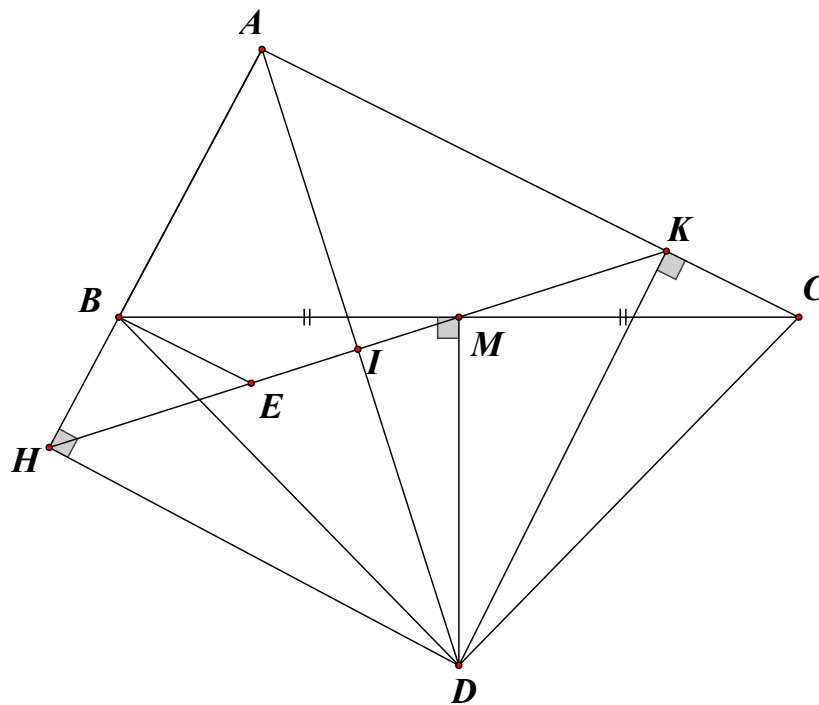
Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương năm học 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, M là trung điểm của BC . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt tia phân giác của góc \widehat{BAC} tại D . Vẽ DH và DK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC tại H và K .

a) Chứng minh $BD = CD$ và $BH = CK$.

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a)

+ Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CMD$ có:

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

$\widehat{BMD} = \widehat{CMD} = 90^\circ$ ($MD \perp BC$)

MD là Cạnh chung

Do đó $\triangle BMD = \triangle CMD$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

+ Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AKD$ có:

$\widehat{HAD} = \widehat{KAD}$ (AD là tia phân giác \widehat{BAC})

$\widehat{AHD} = \widehat{AKD} = 90^\circ$ ($HD \perp AB; DK \perp AC$)

AD : Cạnh chung

Do đó $\triangle AHD = \triangle AKD$ (ch - gn)

$\Rightarrow HD = KD$ (hai cạnh tương ứng)

+ Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKD$ có:

$BD = CD$ (chứng minh trên)

$\widehat{BHD} = \widehat{CKD} = 90^\circ$ ($HD \perp AB; DK \perp AC$)

$HD = KD$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle BHD = \triangle CKD$ (ch- cvg)

$\Rightarrow HB = CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $BE \parallel AC$ cắt HK tại $E \Rightarrow H, K, E$ thẳng hàng (4)

Vì $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MCK}$ (hai góc so le trong)

Vì $\triangle AHD = \triangle AKD$ (Chứng minh trên)

$\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại A (định nghĩa tam giác cân)

Mặt khác $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{AKH}$ (hai góc đồng vị)

$$\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{AKH} = \widehat{AHK}$$

$\Rightarrow \Delta BEH$ cân tại B

$$\Rightarrow BE = BH$$

Mà $HB = CK$ (theo câu a)

$$\Rightarrow BE = CK$$

Nối E với M ; nối K với M

+ Xét ΔBME và ΔCMK có:

$$BE = CK \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{MBE} = \widehat{MCK} \text{ (cmt)}$$

$$BM = CM \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

Do đó $\Delta BME = \Delta CMK$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMK} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BME} + \widehat{EMC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CMK} + \widehat{EMC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KME} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow E, M, K \text{ thẳng hàng (5)}$$

Từ (4) và (5) suy ra H, M, K thẳng hàng.

Câu 9. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành, tỉnh Quảng Ngãi năm học 2021 - 2022)

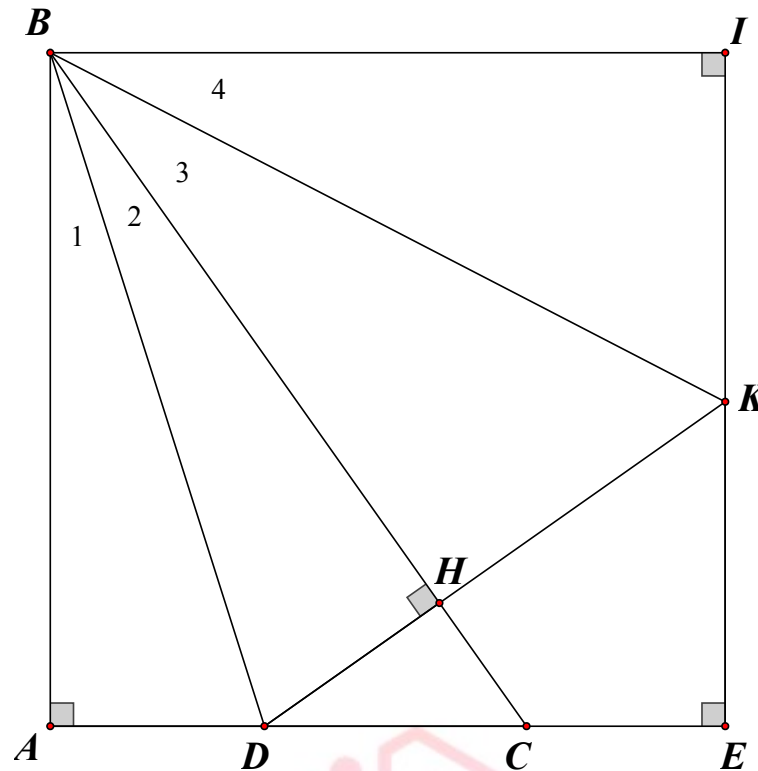
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác góc B cắt AC ở D . Kẻ DH vuông góc với BC tại H . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH ở K . Chứng minh rằng:

a) $BA = BH$.

b) $\widehat{DBK} = 45^\circ$.

c) Cho $AB = 4 \text{ cm}$, tính chu vi tam giác DEK .

Lời giải



a). Xét $\triangle ABD$ vuông tại A và $\triangle HBD$ vuông tại H có:

BD chung

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (Do BD là tia phân giác của góc B)

Do đó $\triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với EK , cắt EK tại I

$AE = BI$ ($BA \parallel IE$) Ta có: $AB = BH$ (cmt); $AE = AB$ (gt)

$\Rightarrow BH = BI$

Xét $\triangle HBK$ vuông tại H và $\triangle IBK$ vuông tại I có:

$BH = BI$ (cmt)

BK chung

Do đó $\triangle HBK = \triangle IBK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \hat{B}_3 = \hat{B}_4$ (hai cạnh tương ứng)

mà $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (cmt)

Lại có $BI \parallel AE$ (Vì cùng vuông góc với IE)

mà $AB \perp AE$ suy ra $AB \perp BI$

$$\hat{B}_3 = \hat{B}_2 + \hat{B}_4 = \frac{1}{2} \hat{A}BI = 90^\circ$$

Do đó:

c) Từ $\triangle ABD = \triangle HBD$ (cmt)

suy ra: $AD = DH$ (hai cạnh tương ứng)

Từ $\triangle HBK = \triangle IBK$ (cmt)

suy ra: $HK = KI$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó: $KD = DH + HK = AD + KI$

Chu vi tam giác là :

$$C_{DEK} = DE + EK + KD = DE + KE + AD + KI = AE + IE$$

$$= 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (cm)}$$

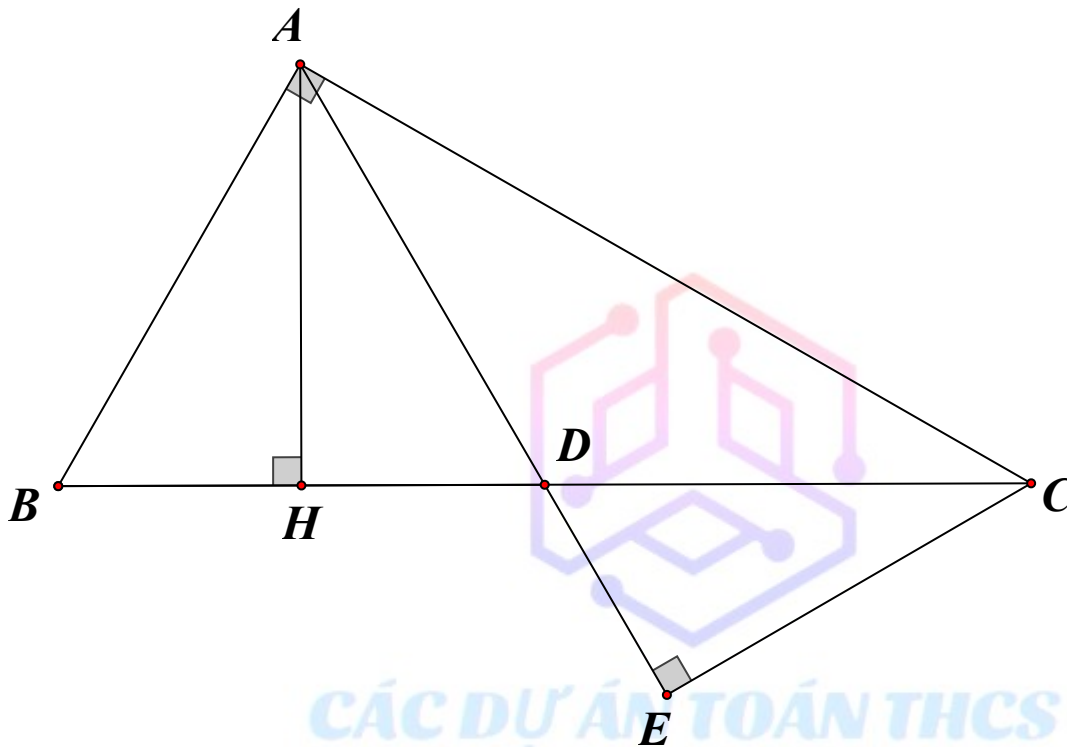
Câu 10. (HSG 7 huyện Mỹ Đức, Thành phố Hà Nội năm học 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\hat{C} = \frac{1}{2}\hat{B}$. Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Trên tia CH lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD tại E .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng: $AD = CD; DE = DH; HE \parallel AC$.

Lời giải



a) Ta có tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

$$\text{Mà } \hat{C} = \frac{1}{2}\hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ; \hat{B} = 60^\circ$$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHD$ có:

$$HD = HB$$

$$\sphericalangle AHB = \sphericalangle AHD = 90^\circ$$

AH là cạnh chung

Do đó $\triangle ABH = \triangle ADH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = AD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } A$$

Có $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều

b) Ta có $\triangle ABD$ đều nên suy ra $\hat{BAD} = 60^\circ; AB = AD = BD$.

$$\text{Mặt khác } \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Tam giác ADC có $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = 30^\circ$

$$\Rightarrow \triangle ADC \text{ cân tại } D \Rightarrow AD = DC$$

Xét $\triangle ADH$ và $\triangle CED$ có

$$AD = DC$$

$$\widehat{ADH} = \widehat{CDE}$$

Vậy $\triangle ADH = \triangle CED$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra $DH = DE$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{BCA} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{HDE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{HDE} = 120^\circ$

Mà $\triangle HDE$ cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BEH} = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BCA} = 30^\circ \text{ mà hai góc này ở vị trí so le trong} \Rightarrow HE \parallel AC$$

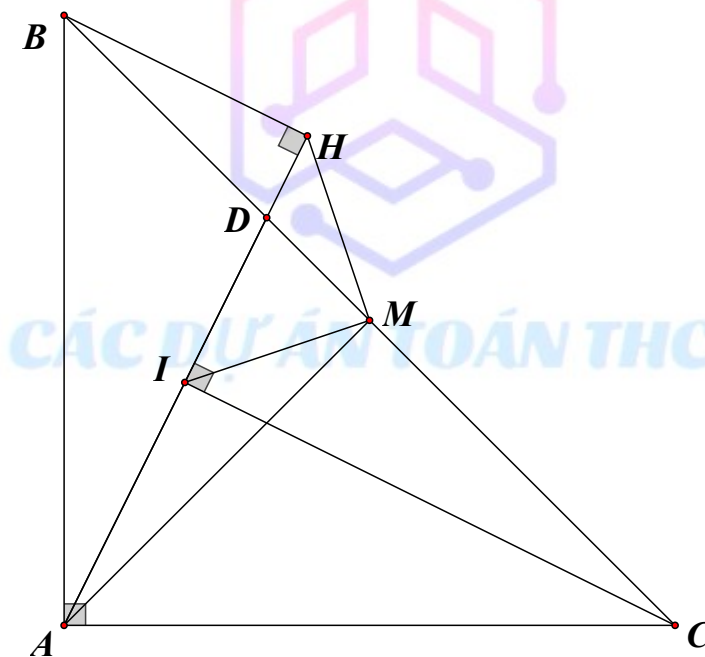
Câu 11. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Thành phố Hà Nội năm học 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BM . Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của điểm B và điểm C xuống đường thẳng AD .

a) Chứng minh rằng $BH = AI$.

b) Tia IM có là phân giác của góc HIC không? Vì sao?

Lời giải



a) Chứng minh rằng $BH = AI$.

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB = AC$; $\widehat{ABC} = 90^\circ$

Mà $\triangle ABH$ vuông tại H

Do đó $\widehat{ABH} = \widehat{CAI}$ (cùng phụ \widehat{BAH})

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle BHA$ có:

$$+ \widehat{BHA} = \widehat{CIA} = 90^\circ$$

$$+ AB = AC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$+ \widehat{ABH} = \widehat{CAI} \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle AIC = \triangle BHA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Tia IM có là phân giác của góc HIC không? Vì sao?

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A và M là trung điểm BC suy ra AM là đường trung trực của BC

Do đó $AM \perp BC \Rightarrow \triangle AMD$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{HAM} + \widehat{ADM} = 90^\circ$

Ta có $\triangle BHD$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{HBD} + \widehat{BDH} = 90^\circ$

Mà $\widehat{BDH} = \widehat{ADM}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{HAM} = \widehat{HBD}$

Mặt khác $CI \perp AD$ và $BH \perp AD$ nên $BH \parallel CI \Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{CIH}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{HBD} = \widehat{CIH}$

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BIC} + \widehat{ICA} = \widehat{BAM} + \widehat{BAD} = \widehat{BAM}$

$\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M ($\widehat{CBA} = \widehat{BAM}$) $\Rightarrow MA = MB$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle AIM$

Có: $BH = HI$

$\widehat{HBD} = \widehat{HAM}$

$MB = MA$

Do đó $\triangle BHM = \triangle AIM$ (c.g.c)

$\Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BMH} = \widehat{AMI}$

mà: $\widehat{AMI} + \widehat{BMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{HIM} = 45^\circ$

mà: $\widehat{HIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác \widehat{HIC}

Câu 12. (HSG 7 huyện Ứng Hòa, Thành phố Hà Nội năm học 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác đều là $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$. Gọi I là giao điểm của CD và BE , K là giao điểm của AB và DC .

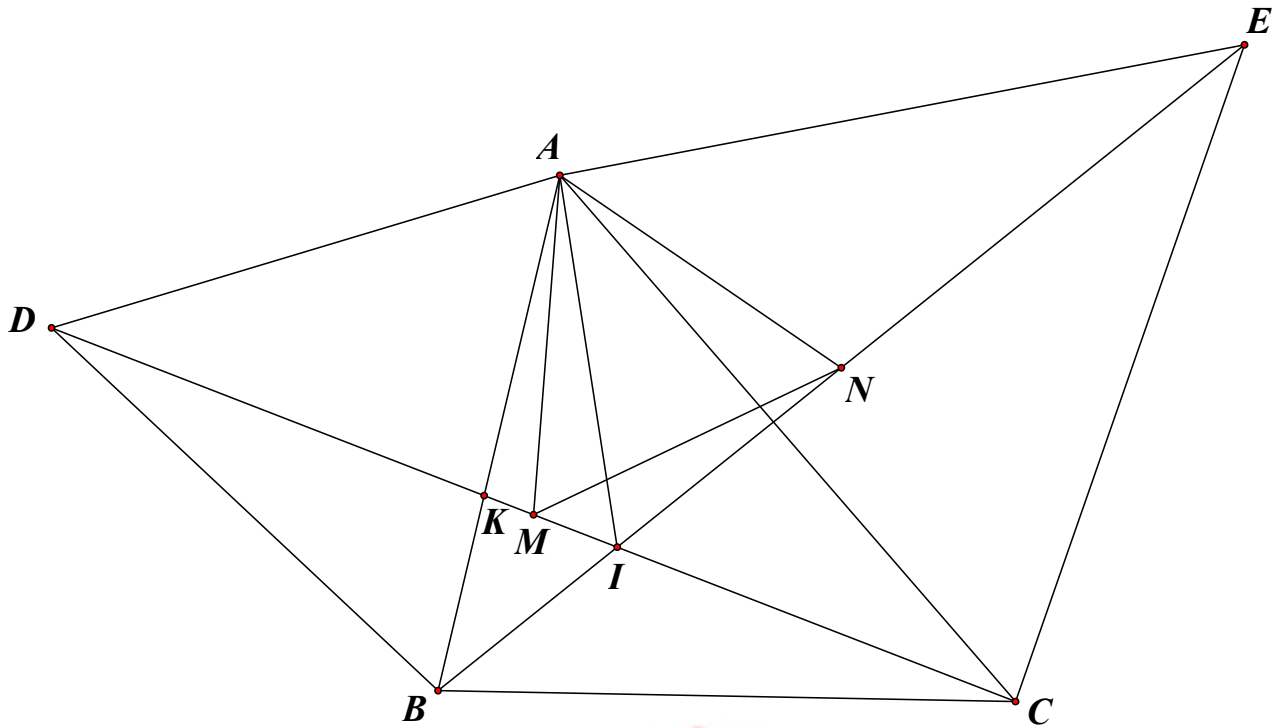
a) Chứng minh: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

b) Chứng minh: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và BE . Chứng minh $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh IA là tia phân giác \widehat{DIE} .

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

Ta có:

$$\triangle ABD \text{ đều (GT)} \Rightarrow AD = AB$$

$$\triangle ACE \text{ đều (GT)} \Rightarrow AC = AE$$

Lại có:

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 60^\circ + \widehat{BAC} \text{ (GT)}$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 60^\circ \text{ (GT)}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$$

+) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có:

$$AD = AB \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \text{ (cmt)}$$

Do đó: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

b) Chứng minh: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

+) Ta có: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c/m 1) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABE}$ (hai góc tương ứng)

+) Xét $\triangle ADK$ có:

$$\widehat{KAD} = 60^\circ \text{ (GT)} \Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{AKD} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{AKD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{BKI} = 120^\circ \text{ (vì } \widehat{AKD} = \widehat{BKI} \text{ là 2 góc đối đỉnh)}$$

+) Xét $\triangle BKI$ có: $\widehat{ABE} + \widehat{BKI} = 120^\circ$ (c/m trên) $\Rightarrow \widehat{BIK} = 60^\circ$ hay $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Chứng minh $\triangle AMN$ đều.

+) Ta có: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c/m

$\Rightarrow DC = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Mà M, N lần lượt là trung điểm CD và $BE \Rightarrow DM = BN$.

+) Xét $\triangle ADM$ và $\triangle BDN$ có:

$AD = AB$ (GT)

$\angle ADM = \angle BDN$ (c/m 2)

$DM = BN$ (theo c/m trên)

Do đó $\triangle ADM = \triangle BDN$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = BN$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AMN$ cân.

+) Ta có: $\triangle ADM = \triangle BDN$ (theo c/m trên)

$\Rightarrow \angle DAM = \angle DBN$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \angle DAB + \angle MAB = \angle DAB + \angle DBN \Rightarrow \angle MAB = \angle DBN$

$\Rightarrow \angle MAN = 60^\circ$

+) Ta có: $\triangle AMN$ cân và $\angle MAN = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh IA là tia phân giác $\angle DIE$.

Trên tia ID lấy điểm F sao cho $IF = IB$.

Ta có: $\angle BIF = 60^\circ$ (theo c/m 2: $\angle DIB = 60^\circ$)

$\Rightarrow \triangle BIF$ đều $\Rightarrow \angle FBI = 60^\circ$.

+) Có: $\angle DBA = \angle FBI = 60^\circ \Rightarrow \angle DBF + \angle FBA = \angle FBA + \angle ABI \Rightarrow \angle DBF = \angle ABI$

+) Xét $\triangle BFD$ và $\triangle BIA$ có:

$BA = BD$ (GT)

$\angle DBF = \angle ABI$ (c/m trên)

$BF = BI$ ($\triangle BIF$ đều)

Vậy $\triangle BFD = \triangle BIA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle AIB = \angle DFB = 180^\circ - \angle BFI = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ($\triangle BIF$ đều)

+) $\angle BID = 60^\circ$ ($\triangle BIF$ đều) $\Rightarrow \angle DIE = 180^\circ - \angle BID = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$+) \widehat{DIA} = \widehat{AIB} - \widehat{BID} = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\widehat{AIE} = \widehat{DIE} - \widehat{DIA} = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DIA} = \widehat{AIE} = 60^\circ$$

$\Rightarrow IA$ là tia phân giác của \widehat{DIE}

Câu 13. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Thành phố Hà Nội năm học 2021 - 2022)

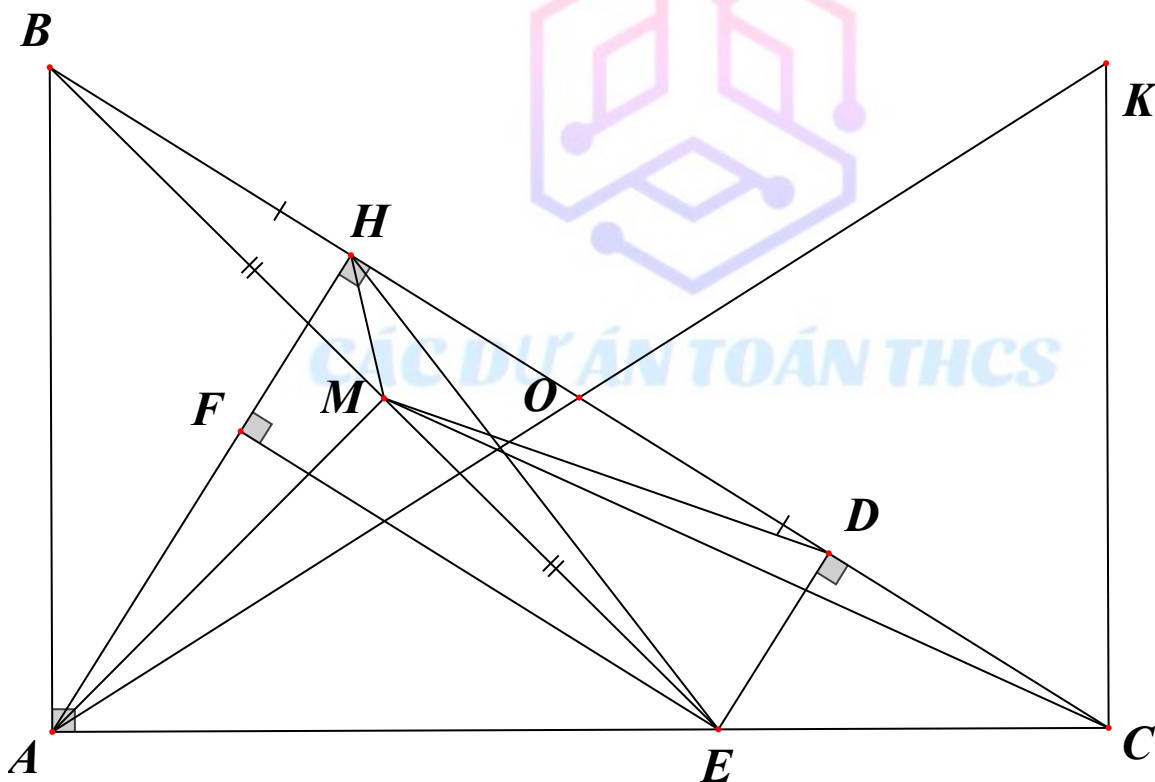
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC . Trên tia đối của tia OA lấy điểm K sao cho $OA = OK$.

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CKA$

b) Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Qua điểm D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E . Gọi F là hình chiếu của điểm E trên AH . Chứng minh $AF = HB$.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Tính số đo \widehat{EHM} .

Lời giải



a) Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OKC$ có
 $OB = OC$ (O là trung điểm BC)

$$\widehat{AOB} = \widehat{OKC}$$

$$OA = OK \text{ (GT)}$$

Do đó $\triangle OAB = \triangle OKC$ (c.g.c)

suy ra $AB = CK$ và $\widehat{ABO} = \widehat{KCO}$ nên $\widehat{ACK} = \widehat{KOC} + \widehat{KCA} = \widehat{KCA} = 90^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CKA$ có AC chung, $\widehat{BAC} = \widehat{KCA} = 90^\circ$ và $AB = CK$ (cmt)

Suy ra $\triangle ABC = \triangle CKA$ (c.g.c).

b) Ta có $EF \parallel HD$ cùng vuông góc với AH nên $\widehat{AEF} = \widehat{ACH} = \widehat{BAH}$ (cặp góc đồng vị).

Xét $\triangle HEF$ và $\triangle EHD$ có

$$\widehat{FHE} = \widehat{HED} \text{ (so le trong)}$$

HE là cạnh chung

$$\widehat{HEF} = \widehat{EHD} \text{ (so le trong)}$$

Do đó $\triangle HEF = \triangle EHD$ (g.c.g) nên $EF = HD$ mà $HD = AH$ nên $AH = EF$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle EAF$ có $\widehat{AHB} = \widehat{EFA} = 90^\circ$, $AH = EF$ (cmt) và $\widehat{BAH} = \widehat{AEF}$ (cmt)

suy ra $\triangle ABH = \triangle EAF$ (g.c.g) suy ra $BH = AF$ (hai cạnh tương ứng)

$$AM = DM = \frac{1}{2} BE$$

c) Vì các tam giác ABE và BDE vuông tại A và D nên

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle DHM$ có

HM là cạnh chung

$$AM = DM \text{ (cmt)}$$

$$AH = DH \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle AHM = \triangle DHM$ (c.c.c) nên $\widehat{AHM} = \widehat{DHM} = \frac{1}{2} \widehat{AHD} = 45^\circ$

$$\widehat{EHM} = 45^\circ$$

Vậy

Câu 14. (HSG 7 huyện Cao Lộc, tỉnh Lạng Sơn 2021 - 2022)

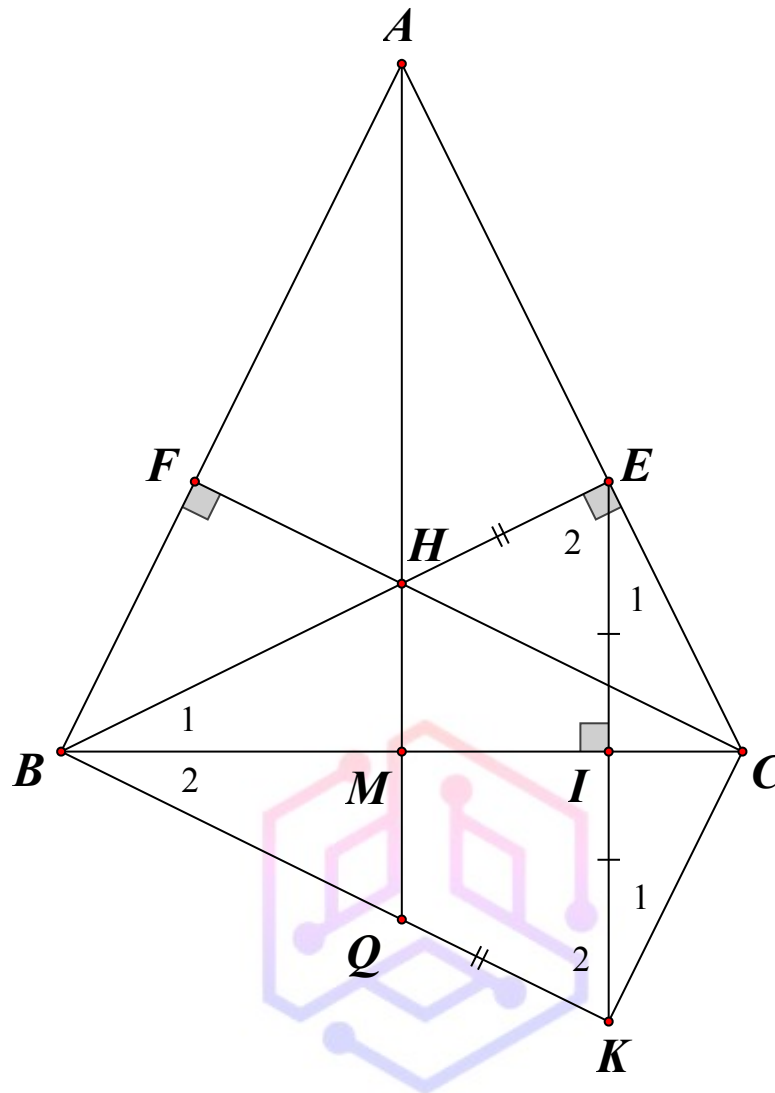
Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ đường cao BE ($E \in AC$). Qua E kẻ đoạn thẳng EK vuông góc với BC tại I sao cho I là trung điểm của EK .

a) Chứng minh BK vuông góc với KC .

b) Chứng minh $\widehat{KEE} = \widehat{EBC}$.

c) Kẻ đường cao CF ($F \in AB$) cắt BE tại H . Trên BK lấy điểm Q sao cho $QK = HE$. Chứng minh ba điểm A, H, Q thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\triangle CEK$ có IC là đường cao đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle CEK$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{E}_1$

Tương tự $\triangle BEK$ có BI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle BEK$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{K}_2 = \widehat{E}_2$
 mà $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 90^\circ$ hay $CK \perp BK$

b) Có $\widehat{B}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$ ($\triangle BIE$ vuông tại I (gt))

$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$

mà $\widehat{E}_1 = \widehat{K}_1$ (theo cmt)

$\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{B}_1$ hay $\widehat{EKE} = \widehat{EBC}$

c) Gọi HQ cắt BC tại M

$\triangle BEK$ cân tại B (ý

$\Rightarrow BE = BK; \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

$\Rightarrow BH + HE = BQ + QK$

mà $HE = QK$ (gt)

$\Rightarrow BH = BQ$

$\Rightarrow \triangle BQH$ cân tại B

$\Rightarrow BM$ là phân giác, đường cao của $\triangle BQH$

$$\Rightarrow BM \perp HQ \text{ hay } HQ \perp BC \quad (1)$$

Lại có H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC \quad (2)$

(1) (2) $\Rightarrow A, H, Q$ thẳng hàng.
từ và

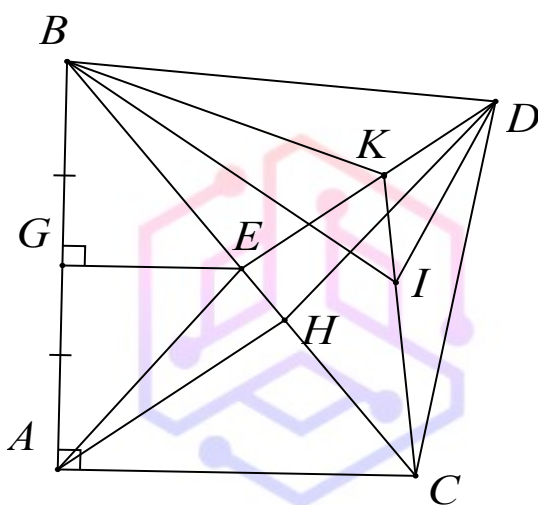
Câu 15. (HSG 7 TP Vũng Tàu 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại $A (AB > AC)$, AH là đường cao. D là điểm nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A và tam giác DBC cân tại D . Đường thẳng vuông góc tại trung điểm của đoạn thẳng AB cắt BC tại E .

a) Chứng minh DE song song với AH .

b) Trường hợp $\angle BDC = 80^\circ$, lấy điểm I nằm trong tam giác DBC sao cho $\angle IBC = 10^\circ, \angle ICB = 30^\circ$. Tính $\angle BID$.

Lời giải



a) Gọi G là trung điểm AB ; $GE \perp AB$ tại $G \Rightarrow GE$ là trung trực của AB

Suy ra $AE = BE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại $E \Rightarrow \angle EAB = \angle EBA \quad (1)$

Mà $\angle EAB + \angle EAC = \angle EBA + \angle ECA = 90^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra ΔEAC cân tại E

$\Rightarrow AE = CE$; mà $AE = BE$ nên $CE = BE$ hay E là trung điểm BC

Tam giác DBC cân tại D , có DE là đường trung tuyến nên DE cũng là đường cao $\Rightarrow DE \perp BC$, mà $AH \perp BC$

Suy ra $DE \parallel AH$

b) Phân giác góc DBI cắt CI tại K

ΔDBC cân tại D có $\angle DBC = \angle DCB = 50^\circ$

$\angle DBI = \angle DBC - \angle IBC = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$

$$BK \text{ phân giác } \angle DBI \Rightarrow \angle KBI = \angle KBD = \frac{1}{2} \angle DBI = 20^\circ$$

$$\angle KBC = \angle KCB = 30^\circ, \text{ suy ra } \triangle KBC \text{ cân tại } K$$

$\Rightarrow KB = KC$, mà $DB = DC$ nên E, K, D thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của BC

$$\text{Mà } \angle KDB = \angle KDC = \frac{1}{2} \angle BDC = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

$$\triangle BIC \text{ có } \angle KIB = \angle KCB + \angle IBC = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$$

Xét $\triangle BKD$ và $\triangle BKC$ có $\angle KBD = \angle KBC$; BK chung; $\angle BKI = \angle BKC$

$\Rightarrow \triangle BKD = \triangle BKC \Rightarrow BD = BK$ nên tam giác DBI cân tại B

$$\angle DIB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

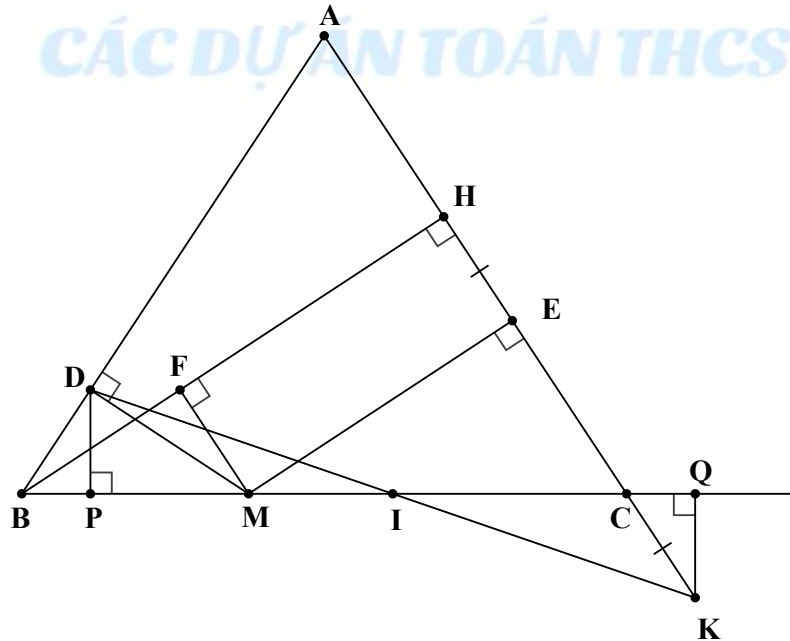
Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = CH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

Ta có $\angle BMD + \angle ABC = 90^\circ$; $\angle MBF + \angle ACB = 90^\circ$. Mà $\angle ABC = \angle ACB$ nên $\angle BMD = \angle MBF$

Xét hai tam giác vuông $\triangle DBM$ và $\triangle FMB$, có:

BM là cạnh huyền chung

$$\widehat{BMD} = \widehat{MBF} \text{ (chứng minh trên)}$$

Vậy $\triangle DBM = \triangle FMB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.
Theo câu

$$\text{ta có: } \triangle DBM = \triangle FMB \Rightarrow MD = BF \text{ (2 cạnh tương ứng)} \quad (1)$$

Xét hai tam giác vuông $\triangle MFH$ và $\triangle HEM$, có:

MH là cạnh huyền chung

$$\widehat{FHM} = \widehat{EMH} \text{ (so le trong vì } FH \parallel EM \text{)}$$

Vậy $\triangle MFH = \triangle HEM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow ME = FH \text{ (hai cạnh tương ứng)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$

Mà BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm).

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q . Gọi I là giao điểm của DK và BC .

Ta có $BD = FM$ (vì $\triangle DBM = \triangle FMB$); $FM = EH$ (vì $\triangle MFH = \triangle HEM$) và $EH = CK$ (gt)

$$\Rightarrow BD = FM = EH = CK$$

Xét hai tam giác vuông BDP và CKQ có:

$$BD = CK \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{DBP} = \widehat{KQ} \text{ (vì cùng bằng } \widehat{ACB} \text{)}$$

Vậy $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow DP = KQ \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Lại có: $DP \perp BC$ và $KQ \perp BC \Rightarrow DP \parallel KQ \Rightarrow \widehat{PDI} = \widehat{QKI}$

Xét $\triangle DPI$ và $\triangle KQI$, có:

$$\widehat{DIP} = \widehat{QIK} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$DP = KQ \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{PDI} = \widehat{QKI} \text{ (chứng minh trên)}$$

Vậy $\triangle DPI = \triangle KQI$ (g – c – g)

$$\Rightarrow ID = IK$$

Vậy BC đi qua trung điểm I của DK .

Câu 17. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . M là trung điểm của BC . I là một điểm nằm giữa C và M . Từ B và C vẽ BD và CE lần lượt vuông góc với AI . (D và E thuộc AI).

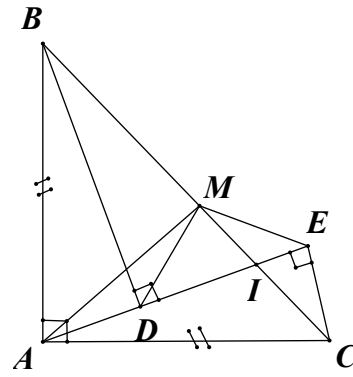
Chứng minh rằng:

a) $BD = AE$

b) $\triangle BAC = \triangle BAC$

c) DM tia phân giác \widehat{BDE}

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{EAD}$ (cùng phụ \widehat{BAD})

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CAE$ có:

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{EAD} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{BDA} = \widehat{AEC} (=90^\circ)$$

suy ra $\triangle ABD = \triangle CAE$ (ch-gn)

$$\Rightarrow BD = AE \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Theo giả thiết

$$BD \perp AE \text{ tại } D$$

$$CE \perp AE \text{ tại } E$$

$$\Rightarrow BD \parallel EC \text{ (theo T/c)}$$

Ta có: $\widehat{MAD} = \widehat{BMC}$ (cùng phụ \widehat{AMB})

mà $\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$ (so le trong do $BD \parallel EC$)

$$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{ECB} \text{ hay } \widehat{MAD} = \widehat{MCE}$$

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CME$ có:

$$AD = CE \text{ (vì } \triangle ABD = \triangle CAE \text{ (ýa))}$$

$$\widehat{MAD} = \widehat{MCE} \text{ (cmt)}$$

$$AM = CM \text{ (do } M \text{ là trung điểm của } \triangle ABC \text{ vuông cân)}$$

Do đó $\triangle AMD = \triangle CME$ (c - g - c)

c) xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A có AM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow AM \perp BC \text{ và } AM = MC = \frac{BC}{2}$$

Ta có: $MD = ME$ (vì $\triangle AMD = \triangle CME$ (cmt)) $\Rightarrow \triangle DME$ cân tại M (*)

Mà $\widehat{AMD} = \widehat{CME}$ (vì $\triangle AMD = \triangle CME$ (cmt)) và $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{CME} = 90^\circ \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle DME$ vuông cân tại M

$$\widehat{MED} = \widehat{MDE} = 45^\circ$$

$$\widehat{BDM} + \widehat{MDE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MDB} = 45^\circ$$

Vậy DM tia phân giác \widehat{BDE}

Câu 18. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B}$, Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD .

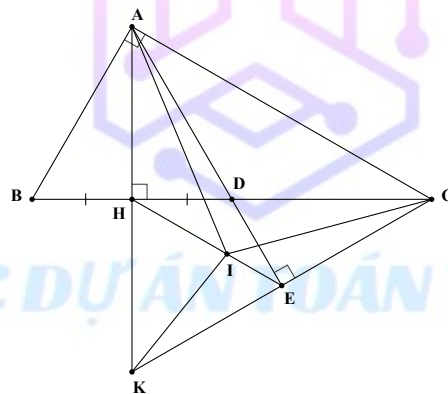
a) Chứng minh rằng: $\triangle ABD$ là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng $AD = CD; DE = DH; HE \parallel AC$

d) Gọi K là giao điểm của AH và CE , lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn HE ($I \neq H, I \neq E$). Chứng minh

rằng $IA + IK + IC > \frac{3AC}{2}$

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\triangle ABD$ là tam giác đều.

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

mà $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B} \Rightarrow 2.\widehat{C} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHD$ có:

AH là cạnh chung

$BH = HD$ (giả thiết)

$$\widehat{BHA} = \widehat{AHD} = 90^\circ \quad (AH \perp BC \text{ tại } H)$$

Vậy $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AD$ (hai cạnh tương ứng)

Nên $\triangle ABD$ cân tại A

Mà $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều.

a) Chứng minh rằng $AD = CD; DE = DH; HE \parallel AC$

Ta có: $\triangle ABD$ là tam giác đều (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ, AB = AD = BD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$\triangle ADC$ có $\widehat{EAD} = \widehat{ACB} = 30^\circ$ nên cân tại D, $\Rightarrow AD = CD$

Và $\widehat{ADC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{ACB} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$

$\widehat{HDE} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{ADC} = 120^\circ$

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle CED$ có:

$AD = CD$

$\widehat{AHD} = \widehat{CED} = 90^\circ$

$\widehat{HDA} = \widehat{EDC}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền- góc nhọn) $\Rightarrow DH = DE$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle HDE$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{HED} = \frac{180^\circ - \widehat{HDE}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{HED} = 30^\circ$

Mà $\widehat{EAD} = \widehat{HED}$ ở vị trí so le trong $\Rightarrow HE \parallel AC$

d) Gọi K là giao điểm của AH và CE , lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn HE ($I \neq H, I \neq E$). Chứng minh

rằng $IA + IK + IC > \frac{3AC}{2}$.

Xét $\triangle AEC$ và $\triangle AEK$ có

$\widehat{AEC} = \widehat{AEK} = 90^\circ$ ($CE \perp AD$)

AE là cạnh chung

$\widehat{KAE} = \widehat{EAC} = 30^\circ$ ($\widehat{EAD} = \widehat{HAD} = 30^\circ$)

Suy ra $\triangle AEC = \triangle AEK$ (g.c.g) $\Rightarrow AC = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A

Ta có $\widehat{EAK} = \widehat{HAD} + \widehat{EAD} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle ACK$ là tam giác đều

$\Rightarrow AC = CK = AK \Rightarrow 3AC = AC + CK + AK$ (4)

Áp dụng BĐT tam giác vào các tam giác AIC, CIK, KIA có

$IA + IC > AC; IC + IK > CK; IA + IK > AK$

$2(IA + IC + IK) > AC + CK + AK$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow 2(IA + IC + IK) > 3AC \Rightarrow IA + IC + IK > \frac{3AC}{2}$

Câu 19. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

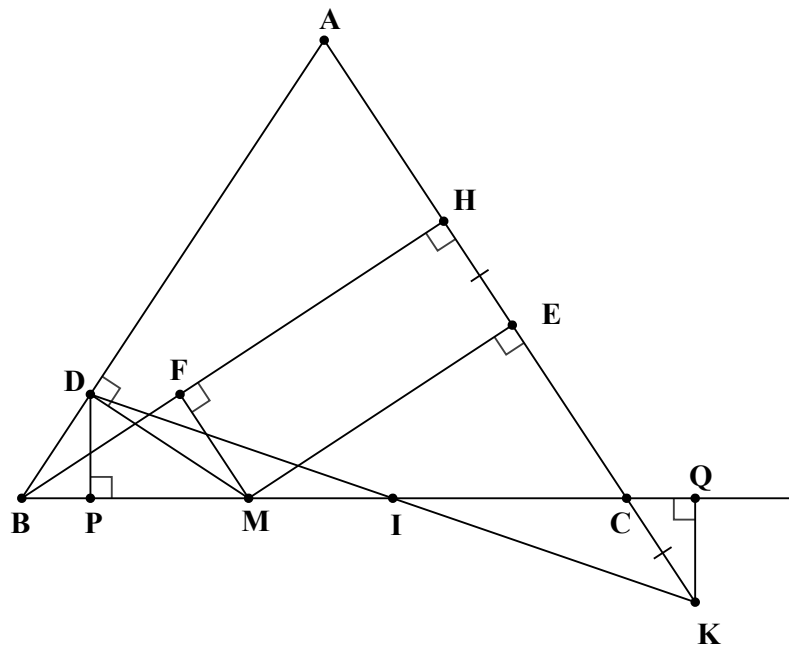
Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

Ta có $\angle BMD + \angle ABC = 90^\circ$; $\angle MBF + \angle CB = 90^\circ$. Mà $\angle ABC = \angle ACB$ nên $\angle BMD = \angle MBF$

Xét hai tam giác vuông $\triangle DBM$ và $\triangle FMB$, có:

BM là cạnh huyền chung

$\angle BMD = \angle MBF$ (chứng minh trên)

Vậy $\triangle DBM = \triangle FMB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB \Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Xét hai tam giác vuông $\triangle MFH$ và $\triangle HEM$, có:

MH là cạnh huyền chung

$\angle FHM = \angle EMH$ (so le trong vì $FH \parallel EM$)

Vậy $\triangle MFH = \triangle HEM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow ME = FH$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$

Mà BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm).

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK . Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q . Gọi I là giao điểm của DK và BC .

Ta có $BD = FM$ (vì $\triangle DBM = \triangle FMB$); $FM = EH$ (vì $\triangle MFH = \triangle HEM$) và $EH = CK$ (gt)
 $\Rightarrow BD = FM = EH = CK$

Xét hai tam giác vuông $\triangle BDP$ và $\triangle CKQ$ có:

$BD = CK$ (chứng minh trên)

$\angle DBP = \angle KCQ$ (vì cùng bằng $\angle ACB$)

Vậy $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow DP = KQ$ (hai cạnh tương ứng)

Lại có: $DP \perp BC$ và $KQ \perp BC \Rightarrow DP \parallel KQ \Rightarrow \angle PDI = \angle QKI$

Xét $\triangle DPI$ và $\triangle KQI$, có:

$\square DIP = \square QIK$ (đối đỉnh)

$DP = KQ$ (chứng minh trên)

$\square PDI = \square QKI$ (chứng minh trên)

Vậy $\triangle DPI = \triangle KQI$ (g - c - g)

$\Rightarrow ID = IK$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy BC đi qua trung điểm I của DK .



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS