**Chuyên đề 9**

**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ  
DẠNG CĂN THỨC**

**TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ**

**Chuyên đề này bao gồm hai nội dung:**

* Bất đẳng thức dạng căn thức
* Cực trị dạng căn thức

**Các bài toán về cực trị dạng căn thức thường khó, do đó ngoài dạng đơn giản, trong chuyên đề đã phân loại các dạng sau**

* Dạng  trong đó 
* Dạng  trong đó 
* Dạng  trong đó 
* Dạng 
* Dạng 
* Dạng  trong đó  và .. đều là hằng số
* Dạng trong đó  và  đều là hằng số
* Dạng  trong đó  và  đều là hằng số
* Dạng  trong đó  và  đều là hằng số
* Dạng chứa phân thức

**CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG HÌNH HỌC**

Xuân đố Mai chứng minh bất đẳng thức sau bằng hình học  
   
 Mai chưa tìm ra cách làm. Bạn hãy giúp Mai

Giải

Kẻ đường vuông góc  và các đường xiên   
( H nằm giữa A và B, h.4)  
 Khi đó   
 Ta có   
 

**I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG CĂN THỨC**

**Ví dụ 1**. Chứng minh bất đẳng thức

 

**Giải**

*Cách 1 .* ( đặt ẩn phụ và biến đổi tương đương)  
 Đặt . Ta có  
   
   
 , đúng. Vậy  đúng

Xảy ra bất đẳng thức khi và chỉ khi 

*Cách 2*. ( dung bất đẳng thức cÔ-si)  
. Gọi vế trái là A ta có  
  
   
nên . Vậy  đúng

*Cách* **3** ( dung bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)  
  


*Cách 4.* ( dung hình học)  
Xem cách giải ở phần *Tổng quan về chuyên đề*

**Ví dụ 130**. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh bất đẳng thứ



**Giải**

Ta có .. nên  
. Từ đó  
  
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi 

**Ví dụ 131**. Chứng minh bất đẳng thức



**Giải**

Ta có   
Ta sẽ chứng minh   
  
, đúng  
Từ  và  suy ra điều phải chứng minh  
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi  hoặc 

**Ví dụ 132.** . Chứng minh bất đẳng thức

 với 

**Giải**

Gọi vế trái là A. Ta có:  
  
Áp dụng bất đẳng thức  với  ta có:  
  
  
Từ  và  suy ra

  
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi 

**II. CỰC TRI DẠNG CĂN THỨC**  
**1. Dạng  trong đó ** Để tìm giá trị nhỏ nhất của dạng trên, có hai cách:

* Đưa về bất đẳng thức 
* Xét bình phương của biểu thức

**Ví dụ 133**. Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Giải**

ĐKXĐ:   
*Cách 1.* Đặt . Ta có:  


*Cách 2.* Ta có:   
 **  


**2. Dạng  trong đó **

Để tìm giá trị lớn nhất của dang trên, ta dung bất đẳng thức   
Xảy ra đẳng thức khi và chì khi  hoặc 

**Ví dụ 134.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Giải**

ĐKXĐ:  hoặc   
Áp dụng bất đẳng thức  ta có  


**3. Dạng  trong đó **

Để tìm giá trị lớn nhất của dạng trên, ta dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki  
  
Trong một số trường hợp, có thể xét  rồi dung bất đẳng thức Cô-si  
Trong một số trường hợp, có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của dạng tr6n bằng cách xét bình phương của biểu thức  
Với dạng  trong đó , ta có thể tìmđược giá rị nhỏ nhất bằng cách xét bình phương của biểu thức hoặc dung bất đẳng thức 

**Ví dụ 135**. Cho biểu thức 

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của A
2. Tìm giá trị lớn nhất của A

**Giải**

ĐKXĐ: 

1.   
    ( do )  
   
2. Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có  
   

*Lưu ý.* Có thể giải câu a) bằng cách dung bất đẳng thức Cô-si  
  
( Ta gặp may mắn vì  ở  thỏa mãn )

**Ví dụ 136.** Tìm giá trị lớn nhất của  
