

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xác định phương trình đường thẳng

1. **Dạng 1.** Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và dạng chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $u_d = (a_1; a_2; a_3)$.

Phương pháp. Ta có:

$$d: \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP: } u_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d dạng tham số

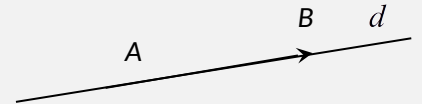
$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Phương trình đường thẳng d dạng chính tắc

$$d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1 a_2 a_3 \neq 0).$$

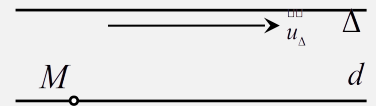
2. **Dạng 2.** Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua A và B .

Phương pháp. Đường thẳng

$$d: \begin{cases} \text{Qua } A \text{ (hay } B) \\ \text{VTCP: } u_d = \overrightarrow{AB} \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$


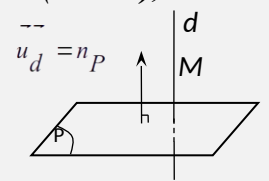
3. **Dạng 3.** Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ .

Phương pháp. Ta có

$$d: \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP: } u_d = u_\Delta \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$


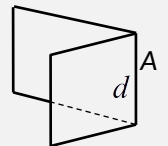
4. **Dạng 4.** Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Phương pháp. Ta có

$$d: \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP: } u_d = n_{(P)} = (a; b; c) \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$


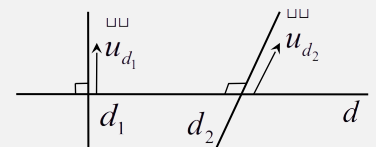
5. **Dạng 5.** Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) cho trước.

Phương pháp. Ta có

$$d: \begin{cases} \text{Qua } A = (P) \cap (Q) \\ \text{VTCP: } u_d = [n_{(P)}, n_{(Q)}] \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$


6. **Dạng 6.** Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước.

Phương pháp. Ta có

$$d: \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP: } u_d = [u_{d_1}, u_{d_2}] \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$


7. Dạng 7. Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với hai mặt phẳng (P) , (Q) .

$$d: \begin{cases} \square \text{ Qua } M \rightarrow \\ \square \text{ VTCP: } u_d = [n_P, n_Q] \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$

Phương pháp. Ta có

8. Dạng 8. Viết phương trình đường thẳng d qua M , vuông góc đường d' và song song mặt (P) .

$$d: \begin{cases} \square \text{ Qua } M \rightarrow \\ \square \text{ VTCP: } u_d = [u_{d'}, n_P] \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$

Phương pháp. Ta có

9. Dạng 9. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt (P) , song song mặt (Q) và qua M .

$$d: \begin{cases} \square \text{ Qua } M \rightarrow \\ \square \text{ VTCP: } u_d = [n_P, n_Q] \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$

Phương pháp. Ta có

10. Dạng 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc và cắt đường thẳng d' .

Phương pháp.

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A , vuông góc d' .

$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } A \rightarrow \\ \square \text{ VTPT: } n_P = u_{d'} \end{cases}$$

Nghĩa là mặt phẳng

Tìm $B = d' \cap (P)$. Suy ra đường thẳng d qua A và B (dạng 1)

Lưu ý: Trường hợp d' là các trục tọa độ thì $d \equiv AB$, với B là hình chiếu của A lên trục.

11. Dạng 11. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm M và cắt đường thẳng d_1 và vuông góc d_2 cho trước.

Phương pháp. Giả sử $d \cap d_1 = H$, ($H \in d_1$, $H \in d$)

$$\Rightarrow H(x_1 + a_1t; x_2 + a_2t; x_3 + a_3t) \in d_1$$

$$\forall t \quad MH \perp d_2 \Rightarrow MH \cdot u_{d_2} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow H.$$

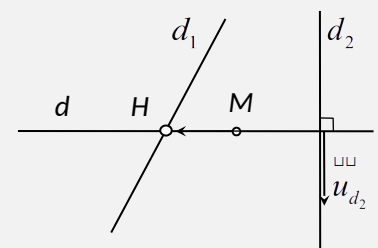
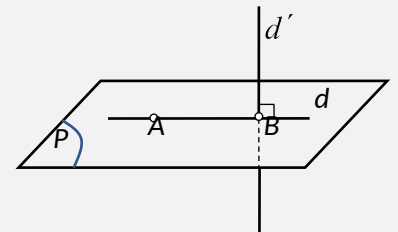
$$d: \begin{cases} \square \text{ Qua } M \rightarrow \\ \square \text{ VTCP: } u_d = MH \end{cases} \text{ (dạng 1)}$$

Suy ra đường thẳng

Dạng 12. d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 :

• **Cách 1:** Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2 . Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d .

• **Cách 2:** Gọi $(P) = (M_0, d_1)$, $(Q) = (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$, do đó, một VTCP của



d có thể chọn là $a = [n_P, n_Q]$.

Dạng 13. d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 :

Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P), B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB .

Dạng 14. d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 :

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1 , mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 15. d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• **Cách 1:** Gọi $M \in d_1, N \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N .
Khi đó, d là đường thẳng MN .

• **Cách 2:**

– Vì $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $a = [a_{d_1}, a_{d_2}]$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1 , bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1 .

+ Một VTPT của (P) có thể là: $n_P = [a, a_{d_1}]$.

– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_1 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 16. Viết phương trình đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ lên mặt (P) .

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và (P) .

▮ Nếu $\Delta \parallel (P)$.

Chọn một điểm M trên Δ .

Tìm H là hình chiếu của M lên (P) .

Hình chiếu $d: \begin{cases} \text{Qua } H \\ \text{VTCP: } u_d = u_\Delta \end{cases}$.

▮ Nếu $\Delta \cap (P) = I$.

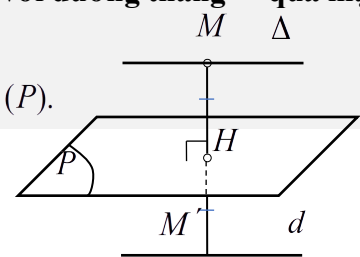
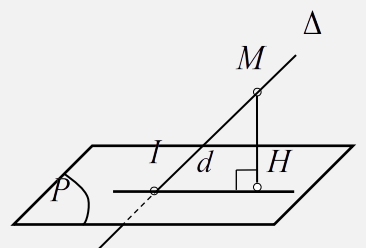
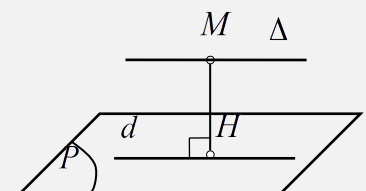
Chọn một điểm $M \neq I$ trên Δ .

Tìm H là hình chiếu của M lên (P) .

Hình chiếu vuông góc của Δ lên (P) là $d \equiv IH$.

Dạng 17. Viết đường thẳng d là đường thẳng đối xứng với đường thẳng Δ qua mặt phẳng (P) .

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và (P) .



▮ Nếu $\Delta \parallel (P)$.

Chọn một điểm M trên Δ .

Tìm H là hình chiếu của M lên (P) .

Tìm M' đối xứng với M qua (P) .

Đường thẳng đối xứng $d: \begin{cases} \text{Qua } M' \\ \text{VTCP: } u_d = u_\Delta \end{cases}$.

▮ Nếu $\Delta \cap (P) = I$.

Chọn một điểm M trên Δ .

Tìm H là hình chiếu của M lên (P) .

Tìm M' đối xứng với M qua (P) .

Đường thẳng đối xứng $d: \begin{cases} \text{Qua } M' \\ \text{VTCP: } u_d = IM' \end{cases}$.

Câu 1. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Viết phương trình đường thẳng EF

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{EF} = (3; 1; -7)$. Đường thẳng EF đi qua điểm $E(-1; 0; 2)$ và có VTCP $u = \overrightarrow{EF} = (3; 1; -7)$ có phương trình: $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có một vector chỉ phương $a = (4; -6; 2)$. Viết phương trình tham số của Δ

Lời giải

$$a = (4; -6; 2) = 2(2; -3; 1)$$

Do đó đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (2; -3; 1)$. Vậy phương trình tham số của

Δ đi qua $M(2; 0; -1)$ và có một vector chỉ phương là $u = (2; -3; 1)$ là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Câu 3. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(5; 4; -1)$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2; -4)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $u = (-2; -1; 2)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(5; 4; -1)$ nhận $u(-2; -1; 2)$ làm vector chỉ phương là:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}, (1)$$

Câu 4. (Chuyên Đại học Vinh - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Viết phương trình đường thẳng EF

Lời giải

Đường thẳng EF có vector chỉ phương là $\overrightarrow{EF} = (3; 1; -7)$ và đi qua $E(-1; 0; 2)$ nên có phương trình:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}.$$

Câu 5. (Ngô Quyền - Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vector chỉ phương $a(1; -4; -5)$

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $a(1; -4; -5)$, do $a = -v$ với $v(-1; 4; 5)$ nên d cũng nhận vector $v(-1; 4; 5)$ làm vector chỉ phương do đó phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}.$$

Câu 6. (Sở Bình Thuận 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1; 4)$ và nhận vector $u(3; -1; 5)$ làm vector chỉ phương. Viết phương trình tham số của d ?

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1; 4)$ và nhận vector $u(3; -1; 5)$ làm vector chỉ phương.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}.$$

 Phương trình tham số của d là:

Câu 7. (Mã 101 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P)

Lời giải

Đường thẳng cần tìm đi qua $M(1; -2; 3)$, vuông góc với (P) nên nhận $n_{(P)} = (2; -1; 3)$ là vector chỉ phương. Phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}.$$

Câu 8. (Mã 103 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P)

Lời giải

Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) nhận véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) làm véc tơ chỉ phương có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P)

Lời giải

Ta có mặt phẳng $(P): x + z - 2 = 0$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; 0; 1)$

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ . Vì đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{n}_{(P)} = (1; 0; 1)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3; 2; -1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = (1; 0; 1)$ là:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Câu 10. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -2; 1)$. Vì $d \perp (P)$ nên $\vec{n}_P = (1; -2; 1)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng d . Suy ra phương trình đường thẳng d thường gặp là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

Câu 11. (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x - 5y + z - 1 = 0$ và $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P)

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -5; 1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = -\vec{n} = (-2; 5; -1)$.

Δ đi qua A nên có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Cho $t = -1$ ta được điểm $B(3; -3; 0) \in \Delta$.

Vì thế Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = -t \end{cases}$$

Câu 12. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 1; 2)$ và $C(2; 3; 1)$.
Viết phương trình đường thẳng đi qua A và song song với BC

Lời giải

Gọi d là phương trình đường thẳng qua $A(1; 2; 0)$ và song song với BC .

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 2; -1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

Câu 13. (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; 1)$, $B(-1; -2; 0)$, $C(2; 1; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua C và song song với AB

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; -1)$ nên chọn là véc tơ chỉ phương của Δ là $u(1; 2; 1)$.

Do đó phương trình của Δ là
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Câu 14. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $M = \Delta \cap Ox$. Suy ra $M(a; 0; 0)$.

$\overrightarrow{AM} = (a-1; -2; -3)$

d có VTCP: $u_d = (2; 1; -2)$

Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot u_d = 0 \Leftrightarrow 2a - 2 - 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy Δ qua $M(-1; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AM} = (-2; -2; -3) = - (2; 2; 3)$ nên Δ có phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Câu 15. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 .

Lời giải

$$d_1: \begin{cases} x = 3 - t_1 \\ y = 3 - 2t_1 \\ z = -2 + t_1 \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 5 - 3t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = 2 + t_2 \end{cases}$$

Phương trình và

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ .

Giả sử đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại A, B .

Gọi $A(3 - t_1; 3 - 2t_1; -2 + t_1)$, $B(5 - 3t_2; -1 + 2t_2; 2 + t_2)$.

$\overrightarrow{AB} = (2 - 3t_2 + t_1; -4 + 2t_2 + 2t_1; 4 + t_2 - t_1)$.

Vector pháp tuyến của (P) là $n = (1; 2; 3)$.

Do $\overrightarrow{AB}$ và n cùng phương nên $\frac{2 - 3t_2 + t_1}{1} = \frac{-4 + 2t_2 + 2t_1}{2} = \frac{4 + t_2 - t_1}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 - 3t_2 + t_1}{1} = \frac{-4 + 2t_2 + 2t_1}{2} \\ \frac{-4 + 2t_2 + 2t_1}{2} = \frac{4 + t_2 - t_1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases}.$$

Do đó $A(1; -1; 0)$, $B(2; -1; 3)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; -1; 0)$ và có vector chỉ phương $n = (1; 2; 3)$ là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

Câu 16. (Đề Tham Khảo 2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 .

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n_{(P)} = (2; 2; -1)$.

Gọi $M = \Delta \cap d_1 \Rightarrow M(1+2m; m; -1-2m)$, $(m \in \mathbb{R})$,

$$N = \Delta \cap d_2 \Rightarrow N(2+n; 2n; -1-n) \quad (n \in \mathbb{R})$$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (n-2m+1; 2n-m; -n+2m)$

Vì Δ vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{MN}, n_{(P)}$ cùng phương nên ta có

$$\frac{n-2m+1}{2} = \frac{2n-m}{2} = \frac{-n+2m}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=0 \end{cases}$$

Do đó $N(3; 2; -2), \overrightarrow{MN} = (2; 2; -1)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua $N(3; 2; -2)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (2; 2; -1)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$

Câu 17. (Mã 103 2018) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d

Lời giải

$$d: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -t \\ z = -2+2t \end{cases}$$

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d .

$$\overrightarrow{u_{\Delta}} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_P}] = (-1; 4; 3)$$

Gọi A là giao điểm của d và (P) . Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$$(-1+2t) + (-t) - (-2+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A(3; -2; 2)$$

Phương trình Δ qua $A(3; -2; 2)$ có vtcp $\overrightarrow{u_{\Delta}} = (-1; 4; 3)$ có dạng: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+4t \\ z = 2+3t \end{cases}$

Câu 18. (Mã 123 2017) Trong không gian Oxyz cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}, \Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

Lời giải

+) VTCP của Δ, Δ' lần lượt là $\overrightarrow{u} = (3; 2; 1)$ và $\overrightarrow{v} = (1; 3; -2); [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = (-7; 7; 7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

+) d đi qua $M(-1; 1; 3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Câu 19. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2 .

Lời giải

Gọi $M(2+t; -1-t; 1+t) = d \cap d_2$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $\vec{AM} = (1+t; -t; -2+t)$ và $\vec{u}_1 = (3; 3; -1)$ là vector chỉ phương của d_1 .

Mặt khác $\vec{AM} \cdot \vec{u}_1 = 0$ nên $3(1+t) + 3(-t) - 1(-2+t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$

$\Rightarrow \vec{AM} = (6; -5; 3)$ là 1 vector chỉ phương của d .

Vậy phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-3}{3}$.

Câu 20. (Hội 8 trường chuyên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 2)$ và hai đường thẳng

$d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$, $d': \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và d' ?

Lời giải

Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -4; 6)$.

Đường thẳng d' có một vector chỉ phương $\vec{u}' = (2; 1; -5)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua M , vuông góc với d và d' nên có một vector chỉ phương là:

$\vec{u}_\Delta = [\vec{u}, \vec{u}'] = (14; 17; 9)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) .

Lời giải

Ta có: $\vec{n}_{(Oxy)} = (1; 1; 0)$, $\vec{n}_{(P)} = (0; 0; 1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) . Khi đó:

$$\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(Oxy)} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Oxy)}] = (1; -1; 0) \quad d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$$

. Vậy

Câu 22. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3; -1; 5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 4 = 0$, $(Q): 2x + y + z + 4 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; -1; 1)$; mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (2; 1; 1)$.

Nhận thấy $A \notin (P)$ và $A \notin (Q)$.

Gọi đường thẳng cần lập là d và u là một vector chỉ phương của nó.

Ta chọn $u = [\vec{n}_Q, \vec{n}_P] = (2; -1; -3)$.

Mặt khác, d qua $A(3; -1; 5)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$.

Câu 23. (Chu Văn An - Hà Nội - 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + z - 1 = 0$, $(\beta): 2x + y - z = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$.

Lời giải

mp (α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -2; 1)$, mp (β) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2; 1; -1)$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $u = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (1; 3; 5)$.

Phương trình của đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với AB .

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2 \\ \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -3 \\ 2x - 6z = -8 \\ 6x + 3y + 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{98} \\ y = \frac{40}{49} \\ z = \frac{135}{98} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{13}{98}; \frac{40}{49}; \frac{135}{98}\right)$$

Ta có: $\vec{AB} = (-1; 2; 0)$

Mặt phẳng (Oxy) có 1 véc tơ pháp tuyến $k = (0; 0; 1)$

Theo giả thiết đường thẳng Δ cần tìm có 1 véc tơ chỉ phương là $u_{\Delta} = [\vec{AB}, k] = (2; 1; 0)$

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = \frac{13}{98} + 2t \\ y = \frac{40}{49} + t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1; 3; -2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - 3 = 0$ và $(Q): 2x - y + z - 3 = 0$

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P): x + y - 3 = 0$ và $(Q): 2x - y + z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n}_P = (1; 1; 0); \vec{n}_Q = (2; -1; 1)$

Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có vector chỉ phương: $u = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; -1; -3)$.

Đường thẳng đi qua điểm $M(1; 3; -2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - 3 = 0$ và $(Q): 2x - y + z - 3 = 0$ nhận vector u làm vector chỉ phương có phương trình

$$\text{tham số là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 5 = 0$ và điểm $A(1; 1; -2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d

Lời giải

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow d \text{ có một vector chỉ phương là } u(1; 2; 2)$$

$(P): 2x + y + 2z - 5 = 0 \Rightarrow (P)$ có một vector pháp tuyến là $n(2; 1; 2)$.

Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d

$\Rightarrow \Delta$ có một vector chỉ phương là $v = [u, n] = (2; 2; -3)$, và đường thẳng Δ đi qua điểm

$A(1; 1; -2) \Rightarrow$ Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}$.

Câu 27. (SP Đồng Nai - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Cách 1:

Ta có: (P) có vector pháp tuyến là: $n = (1; 1; -1)$.

d có vector chỉ phương là: $u = (1; 3; 2)$ và $B(3; 3; 0) \in d$.

Δ có vector chỉ phương là: $\vec{u}_{\Delta} = (a; b; c)$ và $A(1; 2; -1) \in \Delta$ (trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

$\Rightarrow \vec{AB} = (2; 1; 1); d \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u}_{\Delta} \cdot n = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = (a; b; a + b)$.

Do d cắt $\Delta \Leftrightarrow [\vec{AB}, u] \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$.

$a = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = (-1; 2; 1) \Rightarrow \Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Chọn

$\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Kết luận:

Câu 28. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Viết phương trình đường thẳng hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

Lời giải

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; -5; 3)$ và có VTCP $u_d = (2; -1; 4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P): x + 3 = 0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1; -5; 3)$ và có VTPT là $[n_P; u_d] = (0; 4; 1)$

$\Rightarrow (Q): 4y + z + 17 = 0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$$\begin{cases} 4y + z + 17 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

Câu 29. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường

thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P)

Lời giải

Gọi M là giao điểm của d với (P) .

Tọa độ của M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1; 1)$$

Lấy điểm $N(0; -1; 2) \in d$.

Một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $n = (1; 1; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $n = (1; 1; 1)$ làm vec tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P) .

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ x - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Tọa độ của N' là nghiệm của hệ:

$$N' \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{3}u(1; 4; -5)$$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận $u = (1; 4; -5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có

phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Dạng 2. Xác định một số phương trình đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến, giao tuyến...)

Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vécto chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$

Đường thẳng phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng này có vectơ chỉ phương được xác định theo công thức

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 \pm \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} (a_1; b_1; c_1) \pm \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} (a_2; b_2; c_2)$$

Chỉ tiết có hai phân giác:

Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0 \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là vectơ chỉ phương của phân

giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng và $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 - \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là vectơ chỉ phương của phân
giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng.

Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0 \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là vectơ chỉ phương của phân

giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng và $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 - \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là vectơ chỉ phương của phân
giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng.

Câu 30. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -2)$. Viết phương trình đường thẳng đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Lời giải

Ta có điểm $A(1; -3; 5)$ thuộc đường thẳng d , nên $A(1; -3; 5)$ là giao điểm của d và Δ .

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}(-3; 0; -4)$. Ta xét:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{3} (1; 2; -2) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right);$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} (-3; 0; -4) = \left(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5} \right).$$

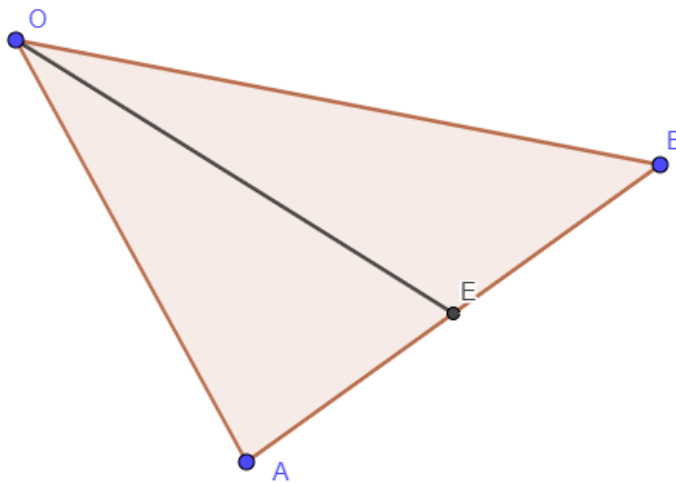
Nhận thấy $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 > 0$, nên góc tạo bởi hai vectơ $\vec{u}_1, \vec{v}_1$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Ta có $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \left(-\frac{4}{15}; \frac{10}{15}; -\frac{22}{15}\right) = -\frac{15}{2}(2; -5; 11)$ là vector chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có vector chỉ

phương là $\vec{w}_1 = (2; -5; 11)$. Do đó có phương trình:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 2; 1), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đường phân giác trong của tam giác OAB

Lời giải



Ta có:

$$\vec{OE} = -\frac{OA}{OB} \cdot \vec{EB} = -\frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}}} \cdot \vec{EB} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{EB} = \frac{3}{4} \cdot \vec{BE}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = \frac{3}{4} \left(x + \frac{8}{3}\right) \\ 2 - y = \frac{3}{4} \left(y - \frac{4}{3}\right) \\ 1 - z = \frac{3}{4} \left(z - \frac{8}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{12}{7} \\ z = \frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\vec{OE} = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right) \Rightarrow u = (0; 1; 1)$$

$$\Delta: \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{VTCP } u \end{cases} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 32. (THPT Gang Thép Thái Nguyên -2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1; 2; 3), A(2; 4; 4)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y - z + 4 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt $(P), (Q)$ lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

Lời giải

Điểm B thuộc mặt (P) nên $B(2c - b - 1; b; c)$ $M(1; 2; 3)$ BC nên
 $C(3 - 2c + b; 4 - b; 6 - c)$ C (Q) $3c - c - 7 = 0 \Leftrightarrow c = 3b - 7$
 . Do thuộc mặt nên . Khi đó
 $B(5b - 15; b; 3b - 7)$ $C(-5b + 17; 4 - b; 13 - 3b)$ $\overline{BC}(-10b + 32; -2b + 4; -6b + 20)$ ABC cân
 $\overline{BC} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow 20b - 60 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow B(0; 3; 2)$ Δ $M(1; 2; 3)$
 tại A nên Đường thẳng đi qua và
 $B(0; 3; 2)$ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$
 có phương trình là

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vector chỉ phương $u(1; 2; -2)$. Viết phương trình đường thẳng đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Lời giải

Ta có điểm $A(1; -3; 5)$ thuộc đường thẳng d , nên $A(1; -3; 5)$ là giao điểm của d và Δ .

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $v(-3; 0; -4)$. Ta xét:

$$\overline{u}_1 = \frac{1}{|u|} \cdot u = \frac{1}{3}(1; 2; -2) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right);$$

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{|v|} \cdot v = \frac{1}{5}(-3; 0; -4) = \left(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

Nhận thấy $\overline{u}_1 \cdot \overline{v}_1 > 0$, nên góc tạo bởi hai vector $\overline{u}_1, \overline{v}_1$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Ta có $\overline{w} = \overline{u}_1 + \overline{v}_1 = \left(-\frac{4}{15}; \frac{10}{15}; -\frac{22}{15}\right) = -\frac{15}{2}(2; -5; 11)$ là vector chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có vector chỉ

phương là $\overline{w}_1 = (2; -5; 11)$. Do đó có phương trình: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$.

Câu 34. (THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1; 3; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của đoạn MN .

Lời giải

Theo giả thiết: $N \in d \Rightarrow N(2t - 2; t + 1; 1 - t)$

Mà A là trung điểm $MN \Rightarrow M(4 - 2t; 5 - t; 3 + t)$

Mặt khác, $M \in (P) \Leftrightarrow 2(4 - 2t) - (5 - t) + (3 + t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

$\Rightarrow N(-6; -1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{NA} = (7; 4; -1)$

Đường thẳng Δ đi qua $N(-6; -1; 3)$ và có một VTCP là $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{NA} = (7; 4; -1)$ nên có phương trình

chính tắc là: $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 35. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Viết phương trình đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$

Lời giải

$(P): x + z - 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1; 0; 1)$

$(Q): x - 2y - z + 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (1; -2; -1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right] = (2; 2; -2)$

Gọi u là một vector chỉ phương của Δ , thì $u \perp \overrightarrow{n_1}$ và $u \perp \overrightarrow{n_2}$.

Suy ra u cùng phương với $\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right]$. Chọn $u = (1; 1; -1)$.

Lấy $M(2; 1; 3)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q) .

Đường thẳng Δ đi qua $M(2; 1; 3)$ có một vector chỉ phương $u = (1; 1; -1)$

Vậy phương trình Δ là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 36. (THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d': \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

Lời giải

d đi qua $A(2;1;4)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1; 2; -2)$.

d' đi qua $B(4; -1; 0)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -2; 2)$.

Ta có $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$ và $\frac{2-4}{1} \neq \frac{1+1}{-2} \neq \frac{4}{2}$ nên $d \nparallel d'$.

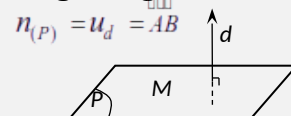
Đường thẳng Δ thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó khi và chỉ

khi $\begin{cases} \Delta \parallel d \parallel d' \\ d(\Delta, d) = d(\Delta, d') \end{cases}$ hay Δ qua trung điểm $I(3; 0; 2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Khi đó phương trình của Δ : $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

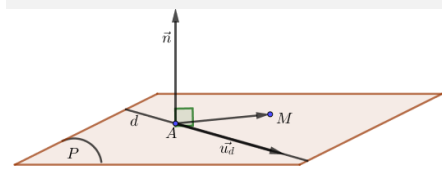
Dạng 3. Xác định phương trình mặt phẳng có yếu tố đường thẳng

Dạng 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng $d \equiv AB$.

Phương pháp. $(P): \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \vec{AB} \end{cases}$



Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng qua M và chứa đường thẳng d với $M \notin d$.



Bước 1: Chọn điểm $A \in d$ và một VTCP $\vec{u}_d$. Tính $[\vec{AM}, \vec{u}_d]$.

Bước 2: Phương trình $\text{mp}(P) \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{VTPT } \vec{n} = [\vec{AM}, \vec{u}_d] \end{cases}$

Câu 37. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm

$M(1; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$

Lời giải

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ thì Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 2; 1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Có $\Delta \perp (\alpha)$, nên $u = (2; 2; 1)$ là một vec-tơ pháp tuyến của (α) .

Mặt phẳng (α) qua điểm $M(1; 1; -1)$ và có một vec-tơ pháp tuyến $u = (2; 2; 1)$.

Nên phương trình (α) là $2x + 2y + z - 3 = 0$.

Câu 38. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-2}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ

Lời giải

Đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-2}$ nhận vec-tơ $u(1; 4; -2)$ là một vec-tơ chỉ phương.

Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ nhận vec-tơ chỉ phương $u(1; 4; -2)$ của Δ là vec-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng phải tìm là:

$$1.(x-2) + 4.(y-1) - 2.(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z - 6 = 0.$$

Câu 39. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3; -1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

Lời giải

Mặt phẳng cần tìm đi qua $M(3; -1; 1)$ và nhận VTCP của Δ là $\vec{u}_{\Delta} = (3; -2; 1)$ làm VTPT nên có phương trình: $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Câu 40. (Bắc Giang - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d

Lời giải

d có VTCP $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

$(P) \perp d \Rightarrow (P)$ có VTPT $\vec{n} = \vec{u} = (1; -1; 2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x - 2 - (y - 0) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$.

Câu 41. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d .

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên (P) có VTPT $\vec{n}_P = \vec{u}_d = (1; -1; 2)$.

Nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $(x-2) - (y-0) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$.

Câu 42. (SGD&ĐT Đồng Tháp - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) .

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương: $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) có vector pháp tuyến: $\vec{n} = (1; -1; 2)$.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $(x-1) - (y+2) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 9 = 0$.

Dạng 4. Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, giao điểm đường với mặt phẳng

Câu 43. (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$. Tìm tọa độ của điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Lời giải

Vì A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) nên

$$+ A \in d \Rightarrow A(1+2t; 3-t; 1-t).$$

$$+ A \in (P) \Rightarrow (1+2t) + 2(3-t) - 3(1-t) + 2 = 0 \Rightarrow t = -2.$$

Vậy tọa độ điểm $A(-3; 5; 3)$.

Câu 44. (Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Lời giải

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\text{Xét phương trình } -3 + 2t + 2(-1 + t) - (3 + t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3t = 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\Rightarrow \text{Đường thẳng } d \text{ cắt mặt phẳng } (P) \text{ tại điểm } M(-1; 0; 4).$$

Câu 45. (SGD Thái Bình - lần 1 - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 3; 5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 17 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm M của (d) và trục Oz

Lời giải

$$\vec{u}_d = \vec{n}_P = (2; 3; 1)$$

$$d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

$$d \cap Oz = M(0; 0; z)$$

$$2 + 2t = 0$$

$$\Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow z = 4$$

$$\Rightarrow M(0; 0; 4)$$

Câu 46. (SGD Hưng Yên 22-23) Tìm hình chiếu của điểm $M(2; 0; 1)$ trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α) .

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Khi đó phương trình

Gọi M' là giao điểm của Δ và $(P) \Rightarrow M'$ là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) .

$$M' \in \Delta \Rightarrow M'(2 + t; t; 1 + t)$$

$$M' \in (P) \Rightarrow 2 + t + t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M'(1; -1; 0)$$

Câu 47. (SGD Hải Dương - 2022 – 2023) Cho $A(2; 1; -1)$ và $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) . Tìm tọa độ M thuộc d sao cho $OM = \sqrt{3}$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(2; 1; -1)$ và vuông góc với (P) là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Điểm $M \in d \Rightarrow M(2+t; 1+2t; -1-2t)$

Khi đó: $OM = \sqrt{(2+t)^2 + (1+2t)^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow (2+t)^2 + (1+2t)^2 + (-1-2t)^2 = 3$

$\Rightarrow 9t^2 + 12t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Với $t = -1$ ta có điểm $M(1; -1; 1)$

Với $t = -\frac{1}{3}$ ta có điểm $M(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$

Câu 48. (SGD Bắc Giang - Lần 2 - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 5; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-7}{-2}$. Tìm điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d

Lời giải

Gọi $H(3+2t; 1+t; 7-2t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d .
 $\overrightarrow{AH}(2t; t-4; 7-2t)$, $\overrightarrow{u_d}(2; 1; -2)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot 2 + (t-4) \cdot 1 + (7-2t) \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(7; 3; 3)$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d thì H là trung điểm AA' nên $A'(11; 1; 6)$.

Câu 49. (SGD Bình Thuận - Lần 01 - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)

Lời giải

Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x-4z-8=0 \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$$

Câu 50. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 2 - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$. Gọi M là giao điểm của (d) với mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Xác định tổng hoành độ, tung độ của điểm M

Lời giải

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Phương trình tham số của đường thẳng (d) là:

Gọi $M(1+t; -1+2t; 3+2t)$ là giao điểm của (d) và (P) .

Khi đó ta có: $1+t - 1+2t - 3 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Vậy $M(5; 7; 11)$. Tổng hoành độ và tung độ của điểm M bằng 12.

Câu 51. (Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 1B - 2022 - 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 8 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) .

Lời giải

$$\begin{cases} a = 2t + 1 \\ b = -t + 2 \\ c = 3t \end{cases}$$

Gọi $M(a, b, c)$ vì M thuộc (d) nên suy ra:

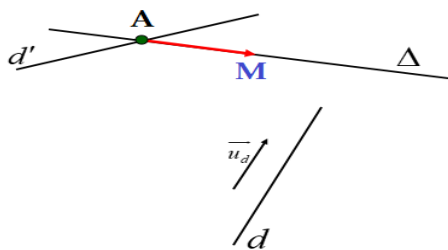
Vì M thuộc (P) nên:

$$2t + 1 - (-t + 2) + 2 \cdot 3t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) là $(3, 1, 3)$.

Câu 52. (SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH-2022-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$; $d': \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $M(3; 2; 1)$, vuông góc với d và cắt d' . Tìm tọa độ giao điểm của Δ và mặt phẳng Oyz

Lời giải



Giả sử $\Delta \cap d' = A(t; 1+2t; -1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (3-t; 1-2t; 2-t)$.

Đường thẳng d có 1 véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (3; 1; 1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với d suy ra:

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u_d} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3-t) + 1 \cdot (1-2t) + 1 \cdot (2-t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó: $\overrightarrow{AM} = (1; -3; 0)$ là 1 véc tơ chỉ phương của Δ .

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = 1 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng

Phương trình mặt phẳng $(Oyz): x = 0$

Giả sử $\Delta \cap (Oyz) = B(3 + t'; 2 - 3t'; 1)$

Khi đó, $B \in (Oyz) \Rightarrow 3 + t' = 0 \Leftrightarrow t' = -3 \Rightarrow B(0; 11; 1)$

Dạng 5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Ta có định lý sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có u_1, u_2 là hai vector chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta_1 // \Delta_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng ph - ng} \\ \vec{u}_1, \vec{M}_1\vec{M}_2 \text{ không cùng ph - ng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0 \\ [\vec{u}_1, \vec{M}_1\vec{M}_2] \neq 0 \end{cases} \\ \Delta_1 \perp \Delta_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng ph - ng} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{M}_1\vec{M}_2 \text{ cùng ph - ng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq 0 \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M}_1\vec{M}_2 = 0 \end{cases} \\ \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} &\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M}_1\vec{M}_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Câu 53. (SGD Cần Thơ - Lần 01 - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A , cắt d và (P) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Biết Δ có một vector chỉ phương $u = (a; b; 4)$, tính giá trị của $a + b$

Lời giải

$$d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của đường thẳng

$$\text{Do } M = \Delta \cap d \Rightarrow M \in d \Rightarrow M(-1 + t; 2t; 2 + t)$$

$$\text{Do } A(1; -1; 2) \text{ là trung điểm của } MN \text{ nên } N(3 - t; -2 - 2t; 2 - t)$$

$$\text{Do } N = \Delta \cap (P) \Rightarrow N \in (P) \Rightarrow 3 - t - 2 - 2t - 4 + 2t + 5 = 0 \Rightarrow -t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow M(1; 4; 4)$$

$$\text{Ta có } \vec{AM} = (0; 5; 2) \Rightarrow 2\vec{AM} = (0; 10; 4) \Rightarrow a = 0, b = 10 \Leftrightarrow a + b = 10$$

Câu 54. (THPT Kiên Thụy – Hải Phòng – 2022 - 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt

$$d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $I(1; 3; 2)$ và đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Lời giải

Ta có $N \in d \Rightarrow N(-2 + 2t; 1 + t; 1 - t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 2x_I - x_N = 4 - 2t \\ y_M = 2y_I - y_N = 5 - t \\ z_M = 2z_I - z_N = 3 + t \end{cases} \Rightarrow M(4 - 2t; 5 - t; 3 + t)$$

I là trung điểm của MN

$$M \in (P) \Leftrightarrow 2(4 - 2t) - (5 - t) + (3 + t) - 10 = 0 \Leftrightarrow -2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Với $t = -2$ ta có $N(-6; -1; 3)$, $\overrightarrow{NI} = (7; 4; -1)$. Đường thẳng Δ qua $N(-6; -1; 3)$ và nhận vector $\overrightarrow{NI} = (7; 4; -1)$ làm vec tơ chỉ phương nên Δ có phương trình là $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 2 - s \\ z = 5 + 3s \end{cases}$$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

a) Chứng minh rằng $d \parallel d'$.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d' .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -3)$ và $\overrightarrow{u_{d'}} = (-2; -1; 3)$ là hai vector cùng phương và điểm $A(1; -2; 4)$ thuộc

đường thẳng d nhưng hệ $\begin{cases} 1 - 2s = 1 \\ 2 - s = -2 \\ 5 + 3s = 4 \end{cases}$ vô nghiệm nên điểm A không thuộc đường thẳng d' . Do đó $d \parallel d'$.

b) Ta có $B(1; 2; 5)$ thuộc đường thẳng d' , suy ra: $\overrightarrow{AB} = (0; 4; 1)$. Vì mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d và d' nên $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{AB}] = (13; -2; 8)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$13(x - 1) - 2(y + 2) + 8(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 13x - 2y + 8z - 49 = 0.$$

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ và } d': \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' .

Lời giải

Ta có $\vec{u_d} = (-1; 1; 2)$ là một vector chỉ phương của d và $\vec{u_{d'}} = (3; 2; -1)$ là một vector chỉ phương của d' .

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -3)$, đường thẳng d' đi qua $B(-2; -1; 0)$.

Vì $\left[\vec{u_d}, \vec{u_{d'}} \right] \cdot \vec{AB} = (-5; 5; -5) \cdot (-3; -3; 3) = -15 \neq 0$ nên hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Câu 57. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + 3t_1 \\ y = 4 + 6t_1 \\ z = -1 - 12t_1 \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 5 - t_2 \\ y = -1 - 2t_2 \\ z = 3 + 4t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \text{ là tham số})$

b) $\Delta_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{3}, \Delta_2: \frac{x-6}{-5} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+5}{7};$

c) $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}, \Delta_2: \begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$

Lời giải

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-2; 4; -1)$ và có $\vec{u_1} = (3; 6; -12)$ là vector chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(5; -1; 3)$ và có $\vec{u_2} = (-1; -2; 4)$ là vector chỉ phương.

Ta có: $\vec{u_1} = -3\vec{u_2}$, suy ra $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ cùng phương;

$\vec{M_1M_2} = (7; -5; 4)$ và $\frac{3}{7} \neq \frac{6}{-5}$ nên $\vec{u_1}, \vec{M_1M_2}$ không cùng phương.

Vậy $\Delta_1 // \Delta_2$.

b) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-3; 1; -4)$ và có $\vec{u_1} = (2; -1; 3)$ là vector chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(6; -5; -5)$ và có $\vec{u_2} = (-5; 4; 7)$ là vector chỉ phương.

Ta có: $\frac{2}{-5} \neq \frac{-1}{4}$, suy ra $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ không cùng phương;

$\vec{M_1M_2} = (9; -6; -1),$

$$[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-19; -29; 3).$$

Do $[\vec{u_1}, \vec{u_2}] \cdot \vec{M_1M_2} = (-19) \cdot 9 + (-29) \cdot (-6) + 3 \cdot (-1) = 0$ nên $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{M_1M_2}$ đồng phẳng. Vậy Δ_1 cắt Δ_2 .

c) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-1; 4; 0)$ và có $u_1 = (1; -2; 3)$ là vector chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-11; -2; 3)$ và có $u_2 = (5; 3; -2)$ là vector chỉ phương.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-10; -6; 3)$,

$$[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-5; 17; 13).$$

Do $[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-5) \cdot (-10) + 17 \cdot (-6) + 13 \cdot 3 = -13 \neq 0$ nên $u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng. Vậy Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Câu 58. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \frac{x+7}{5} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z+2}{-2}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -10 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$ (t là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-6}$

c) $\Delta_1: \frac{x}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-3}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{-6} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{6}$.

Lời giải

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-7; 1; -2)$ và có $u_1 = (5; -7; -2)$ là vector chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-5; -10; 3)$ và có $u_2 = (-3; -4; 7)$ là vector chỉ phương.

Ta có: $\frac{5}{-3} \neq \frac{-7}{-4}$, suy ra u_1, u_2 không cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -11; 5)$,

$$[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-57; -29; -41).$$

Do $[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-57) \cdot 2 + (-29) \cdot (-11) + (-41) \cdot 5 = 0$ nên $u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng. Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-2; 1; 0)$ và có $u_1 = (5; -1; 3)$ là vector chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-2; 1; 1)$ và có $u_2 = (4; 5; -6)$ là vector chỉ phương.

Ta có: $\frac{5}{4} \neq \frac{-1}{5}$, suy ra u_1, u_2 không cùng phương;

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0; 0; 1),$$

$$[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-9; 42; 29).$$

Do $[\vec{u_1}, \vec{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-9).0 + 42.0 + 29.1 = 29 \neq 0$ nên $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng.

Vậy Δ_1, Δ_2 chéo nhau.

c) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; -5; 1)$ và có $\vec{u_1} = (3; 2; -3)$ là vector chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(1; 3; 1)$ và có $\vec{u_2} = (-6; -4; 6)$ là vector chỉ phương.

Ta có: $-2\vec{u_1} = \vec{u_2}$, suy ra $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 8; 0)$ và $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{8}$ nên $\vec{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}$ không cùng phương.

Vậy $\Delta_1 // \Delta_2$.

Câu 59. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 8 + 9t' \\ y = 7 + 6t' \\ z = 8 + 6t' \end{cases}$

b) $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{2}$ và $d': \frac{x-5}{8} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-3}{4}$;

d) $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $d': \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases}$

Lời giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 3; 4)$ và nhận $\vec{a} = (3; 2; 2)$ làm vector chỉ phương.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(8; 7; 8)$ và nhận $\vec{a'} = (9; 6; 6)$ làm vector chỉ phương.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (6; 4; 4), \vec{a'} = 3\vec{a} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MM'}$, suy ra ba vector $\vec{a}, \vec{a'}, \overrightarrow{MM'}$ cùng phương. Do đó $d \equiv d'$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 3; 1)$ và nhận $\vec{a} = (4; 3; 2)$ làm vector chỉ phương.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(5; 5; 3)$ và nhận $\vec{a'} = (8; 6; 4)$ làm vector chỉ phương.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (5; 2; 2)$. Ta có $\vec{a'} = 2\vec{a}$, suy ra $\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương. Mặt khác $\frac{4}{5} \neq \frac{3}{2}$, suy ra $\vec{a}, \overrightarrow{MM'}$ không cùng phương. Do đó $d // d'$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;1)$ và nhận $a=(0;2;-1)$ làm vector chỉ phương.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(4;1;5)$ và nhận $a'=(3;4;5)$ làm vector chỉ phương.

Ta có $\overrightarrow{MM'}=(2;-2;4), [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}]=(14;-3;-6) \neq 0, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}] \cdot \overrightarrow{MM'}=10 \neq 0$, suy ra d và d' chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;2)$ và nhận $a=(3;4;3)$ làm vector chỉ phương.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(5;7;5)$ và nhận $a'=(0;2;-1)$ làm vector chỉ phương.

Ta có $\overrightarrow{MM'}=(3;4;3), [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}]=(-10;3;6) \neq 0, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}] \cdot \overrightarrow{MM'}=0$, suy ra d và d' cắt nhau.

Câu 60. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x=t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=2+2t' \\ y=7+6t' \\ z=-1-2t' \end{cases}$

b) $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ và $d': \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2}$;

c) $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$ và $d': \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$

d) $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và $d': \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=7 \end{cases}$

Lời giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1;1)$ và nhận $a=(1;3;-1)$ làm vector chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;7;-1)$ và nhận $a'=(2;6;-2)$ làm vector chỉ phương.

Ta có $\overrightarrow{MM'}=(2;6;-2), \overrightarrow{a'}=2\overrightarrow{a}=\overrightarrow{MM'}$, suy ra ba vector $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{MM'}$ cùng phương. Do đó $d \equiv d'$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;0)$ và nhận $a=(2;3;1)$ làm vector chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(0;0;0)$ và nhận $a'=(4;6;2)$ làm vector chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(-2;0;0), \overrightarrow{a'}=2\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{MM'}]=(0;-2;6) \neq 0$, suy ra $d // d'$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;2)$ và nhận $a=(1;1;-1)$ làm vector chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;2;1)$ và nhận $a'=(2;3;1)$ làm vector chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(1;1;-1), [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}]=(4;-3;1) \neq 0, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}] \cdot \overrightarrow{MM'}=0$, suy ra d và d' cắt nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;2)$ và nhận $a=(2;1;1)$ làm vector chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;1;7)$ và nhận $a'=(0;1;0)$ làm vector chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(1;0;5), [a, a']=(-1;0;2) \neq 0, [a, a'] \cdot \overrightarrow{MM'}=9 \neq 0$, suy ra d và d' chéo nhau.

Dạng 6. Bài toán liên quan khoảng cách, góc

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng – Khoảng cách giữa hai đường thẳng

□ **Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d qua điểm M_0 có vector chỉ phương u_d được**

$$d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \cdot u_d|}{|u_d|}.$$

xác định bởi công thức

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

□ **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:** d đi qua điểm M và có vector chỉ phương

$$d(d, d') = \frac{|[u, u'] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{|[u, u']|}.$$

u và d' đi qua điểm M' và có vector chỉ phương u' là

2. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có vector chỉ phương $u_1=(a_1;b_1;c_1)$ và $u_2=(a_2;b_2;c_2)$.

$$\cos(d_1; d_2) = \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|u_1| \cdot |u_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad \text{với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d có vector chỉ phương $u_d=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n_{(P)}=(A;B;C)$ được xác định bởi công thức:

$$\sin \alpha = |\cos(n_{(P)}; u_d)| = \frac{|\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_{(P)}}|}{|u_d| \cdot |n_{(P)}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Câu 61. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P) .

Lời giải

(P) có vecto pháp tuyến $n(2; -2; -1)$ và đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $u(2; 1; 2)$ thỏa mãn $n \cdot u = 0$ nên $\Delta // (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$.

Do đó: lấy $A(1; -2; 1) \in \Delta$ ta có: $d(\Delta(P)) = d(A; (P)) = \frac{|2.1 - 2.(-2) - 1 + 1|}{\sqrt{4+4+1}} = 2$.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox ?

Lời giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$

Trục Ox có VTCP $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Góc tạo bởi (P) với trục Ox

$$\sin((P); Ox) = |\cos((P); Ox)| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{|-\sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy góc tạo bởi (P) với trục Ox bằng 60° .

Câu 63. (Chuyên Hạ Long - Lần 2 - 2022-2023) Trong không gian có hệ trục $Oxyz$, đường thẳng (d)

có phương trình: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\Delta): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Góc giữa (d) và (Δ) bằng α . Tính $\sin \alpha$

Lời giải

Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; 1)$, mặt phẳng (Δ) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -2)$, khi đó:

$$\sin((d), (\Delta)) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Câu 64. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - Lần 2 - 2022 - 2023) Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-4}{-6} = 1$ và $(Q): x + 2y + 3z + 7 = 0$. Tính tang góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

Lời giải

$$(P): \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-4}{-6} = 1 \Leftrightarrow (P): 2x + 3y - z - 9 = 0$$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)} = (2; 3; -1)$

$$(Q): x + 2y + 3z + 7 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (1; 2; 3)$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\Rightarrow 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{5}{14}$$

Ta có:

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{171}{25} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3\sqrt{19}}{5}$$

Câu 65. (SGD Vĩnh Phúc - Lần 02 - Năm 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa

đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; -2; 1)$, có 1 véc tơ chỉ phương $u = (2; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến $n = (2; -2; -1)$.

Ta có: $u \cdot n = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow u \perp n$.

$$M \notin (P) \Rightarrow d \parallel (P) \Rightarrow d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Mà

Câu 66. (THPT-Thị Xã Quảng Trị-Lần 1-2022 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z + 2 = 0$ và hai điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB , thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (α) . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d

Lời giải

Gọi A' là hình chiếu của $A(2; 0; 1)$ lên (α) .

Ta có $B \in (\alpha)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB , thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng

$$(\alpha) \Rightarrow d \equiv A'B \Rightarrow kc(A, d) = kc(A, (\alpha)) = \left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 67. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ nếu cần):

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + 2t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = 0 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 7 + t_2 \\ y = -3 - t_2 \\ z = 2t_2 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-10}{-1}$;

$$c) \Delta_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-3} \text{ và } \Delta_2: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{-1}.$$

Lời giải

a) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vector chỉ phương lần lượt là $u_1 = (2; 1; 0)$, $u_2 = (1; -1; 2)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } (\Delta_1, \Delta_2) \approx 79^\circ.$$

b) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vector chỉ phương lần lượt là $u_1 = (1; -2; -2)$, $u_2 = (2; 2; -1)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 0$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } (\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ.$$

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vector chỉ phương lần lượt là $u_1 = (-1; 2; -3)$, $u_2 = (2; -1; -1)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|(-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{42}$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } (\Delta_1, \Delta_2) \approx 84^\circ.$$

Câu 68. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

$$a) \Delta: \begin{cases} x = 18 - \sqrt{3}t \\ y = 11 \\ z = 5 + t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}) \text{ và } (P): x - \sqrt{3}y - z - 3 = 0;$$

$$b) \Delta: \frac{x-8}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-6}{3} \text{ và } (P): 3x - 4y + 5z - 6 = 0.$$

Lời giải

a) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ và mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $n = (1; -\sqrt{3}; -1)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|(-\sqrt{3}) \cdot 1 + 0 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}}{10}$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } (\Delta, (P)) \approx 38^\circ.$$

b) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (2; -3; 3)$ và mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $n = (3; -4; 5)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) + 3 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } (\Delta, (P)) \approx 84^\circ$$

Câu 69. Tính góc giữa hai mặt phẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):
 $(P_1): 5x + 12y - 13z + 14 = 0$ và $(P_2): 3x + 4y + 5z - 6 = 0$.

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (5; 12; -13)$, $n_2 = (3; 4; 5)$.

$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + (-13) \cdot 5|}{\sqrt{5^2 + 12^2 + (-13)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{1}{65}$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } ((P_1), (P_2)) \approx 89^\circ$$

Câu 70. Tính góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) α là góc giữa hai vector $a = (1; 2; -1)$ và $b = (2; 1; 9)$;

b) α là góc giữa hai đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{1} \text{ và } d': \frac{x+7}{3} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-1}{2};$$

c) α là góc giữa hai mặt phẳng $(P): \sqrt{3}x + z + 9 = 0$ và $(Q): \sqrt{3}x - z + 4 = 0$;

d) α là góc giữa đường thẳng $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-5}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 11 = 0$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 9}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 9^2}} = \frac{-5}{\sqrt{516}} \Rightarrow \alpha \approx 102,7^\circ$$

b) Ta có vector chỉ phương của d và d' lần lượt là $a = (2; 4; 1), a' = (3; 1; 2)$.

$$\cos \alpha = \frac{|a \cdot a'|}{|a| \cdot |a'|} = \frac{|2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \alpha \approx 45,6^\circ$$

Khi đó:

c) Ta có vector pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là $n = (\sqrt{3}; 0; 1)$, $n' = (\sqrt{3}; 0; -1)$.

$$\cos \alpha = \frac{|n \cdot n'|}{|n| \cdot |n'|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Khi đó:

d) Ta có vector chỉ phương của d và vector pháp tuyến của (P) lần lượt là $a = (1; 2; 2), n = (2; 2; -1)$. Khi đó:

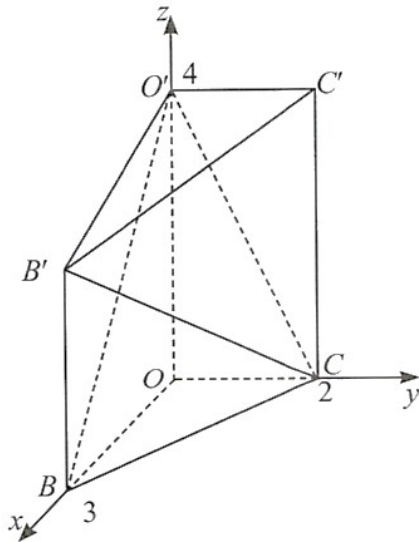
$$\sin \alpha = \frac{|\underline{a} \cdot \underline{n}|}{|\underline{a}| \cdot |\underline{n}|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha \approx 26,4^\circ.$$

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ với $O(0;0;0), B(3;0;0), C(0;2;0), O'(0;0;4)$.

a) Tính góc α giữa hai đường thẳng BO' và $B'C$.

b) Tính góc β giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

Lời giải



a) Ta có $B'(3;0;4)$. Hai đường thẳng BO' và $B'C$ lần lượt có vector chỉ phương là $\overrightarrow{BO'} = (-3;0;4)$, $\overrightarrow{B'C} = (-3;2;-4)$. Suy ra:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{BO'} \cdot \overrightarrow{B'C}|}{|\overrightarrow{BO'}| \cdot |\overrightarrow{B'C}|} = \frac{|(-3) \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} \\ &= \frac{7}{5\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 74,9^\circ. \end{aligned}$$

b) Đường thẳng $B'C$ có vector chỉ phương là $\overrightarrow{B'C} = (-3;2;-4)$.

Mặt phẳng $(O'BC)$ có phương trình là $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ hay $4x + 6y + 3z - 12 = 0$, suy ra mặt phẳng $(O'BC)$ có vector pháp tuyến là $\underline{n} = (4;6;3)$.

$$\sin \beta = \frac{|\overrightarrow{B'C} \cdot \underline{n}|}{|\overrightarrow{B'C}| \cdot |\underline{n}|} = \frac{|(-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 + (-4) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{1769}} \Rightarrow \beta \approx 16,6^\circ$$

Ta có:

Câu 72. Tính góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) α là góc giữa hai vector $\underline{a} = (1;1;-1)$ và $\underline{b} = (5;2;7)$;

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-\sqrt{3}t \\ z=5 \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x=1-\sqrt{3}t' \\ y=7+t' \\ z=9 \end{cases}$$

b) α là góc giữa hai đường thẳng

c) α là góc giữa hai mặt phẳng $(P): 4x+2y-z+9=0$ và $(Q): x+y+6z-11=0$;

d) α là góc giữa đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+99=0$.

Lời giải

a) Ta có
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1.5 + 1 \cdot 2 - 1.7}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + 7^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

b) Vector chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{a} = (1; -\sqrt{3}; 0), \vec{a}' = (-\sqrt{3}; 1; 0)$

Khi đó
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}'}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}'|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{1+3+0} \cdot \sqrt{3+1+0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

c) Ta có vector pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n} = (4; 2; -1), \vec{n}' = (1; 1; 6)$. Khi đó

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 6|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 6^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

d) Ta có vector chỉ phương của d và vector pháp tuyến của (P) lần lượt là $\vec{a} = (2; -1; 1), \vec{n} = (1; 1; -1)$

Khi đó
$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

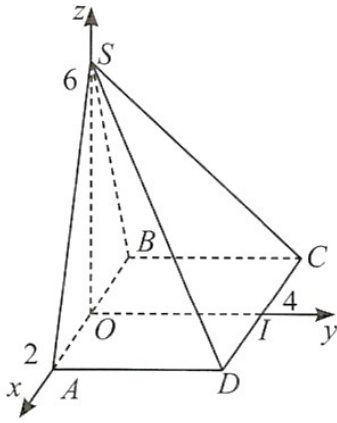
Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S có chiều cao bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc α giữa hai đường thẳng SD và BC ;

b) Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) .

Lời giải

Gọi O là trung điểm của AB suy ra $SO \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình bên. Ta có: $S(0; 0; 6), A(2; 0; 0), B(-2; 0; 0), C(-2; 4; 0), D(2; 4; 0)$.



a) Ta có $\vec{SD} = (2; 4; -6)$, $\vec{BC} = (0; 4; 0)$, suy ra

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{SD} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{SD}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 6 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{4^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow \alpha = 57,7^\circ.$$

b) Mặt phẳng (SAD) có cặp vector chỉ phương là $\vec{SD} = (2; 4; -6)$, $\vec{SA} = (2; 0; -6)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = -\frac{1}{8}[\vec{SD}, \vec{SA}] = (3; 0; 1)$.

Mặt phẳng (SCD) có cặp vector chỉ phương là $\vec{SD} = (2; 4; -6)$, $\vec{DC} = (-4; 0; 0)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n}' = \frac{1}{8}[\vec{SD}, \vec{DC}] = (0; 3; 2)$.

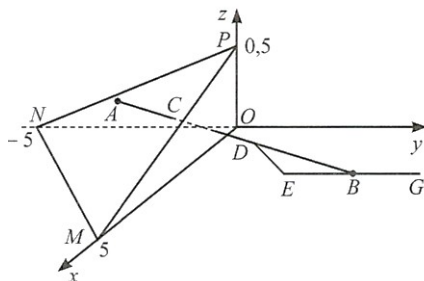
$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{130}} \Rightarrow \beta \approx 79,9^\circ$$

Suy ra

Dạng 7. Một số ứng dụng của phương trình đường thẳng trong thực tiễn

Tương tự như phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Câu 74. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3, 5; -2; 0, 4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3, 5; 5; 0)$ trên đường băng EG .



a) Lập phương trình đường thẳng AB .

b) Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ $2,5^\circ$ đến $3,5^\circ$ hay không.

c) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0), N(0;-5;0), P(0;0;0,5)$. Tìm tọa độ của điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

d) Tìm tọa độ của điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.

e) Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3,5;4,5;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 7,5; -0,4)$.

Phương trình đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = 3,5 \\ y = -2 + 7,5t \\ z = 0,4 - 0,4t \end{cases} \text{ (là tham số).}$$

b) Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$. Ta có:

$$\sin(AB, (Oxy)) = \frac{|0 \cdot 0 + 7,5 \cdot 0 + (-0,4) \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 7,5^2 + (-0,4)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{0,4}{\sqrt{56,41}} \Rightarrow (\Delta, (P)) \approx 3^\circ.$$

Vì $2,5^\circ < 3^\circ < 3,5^\circ$ nên góc trượt của máy bay nằm trong phạm vi cho phép.

c) Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\frac{x}{5} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{0,5} = 1 \Leftrightarrow x - y + 10z - 5 = 0$.

Vì C thuộc đường thẳng AB nên $C(3,5; -2 + 7,5c; 0,4 - 0,4c) (c \in \mathbb{R})$.

Mà C thuộc mặt phẳng (MNP) nên $3,5 - (-2 + 7,5c) + 10 \cdot (0,4 - 0,4c) - 5 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{9}{23}$.

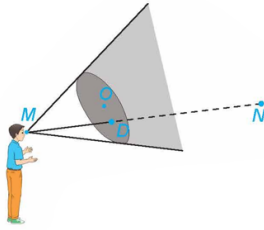
Suy ra $C\left(\frac{7}{2}; \frac{43}{46}; \frac{28}{115}\right)$.

d) Vì D thuộc AB nên $D(3,5; -2 + 7,5d; 0,4 - 0,4d) (d \in \mathbb{R})$. Mà D có cao độ là 0,12 nên $0,4 - 0,4d = 0,12 \Leftrightarrow d = 0,7$. Vậy $D(3,5; 3,25; 0,12)$.

e) Ta có: $DE = \sqrt{(3,5 - 3,5)^2 + (4,5 - 3,25)^2 + (0 - 0,12)^2} \approx 1,26(km)$.

Vì $900m = 0,9km < 1,26km$ nên phi công không nhìn thấy điểm E và không đạt được quy định an toàn bay.

Câu 75. Trong tình huống mở đầu hãy thực hiện các bước sau và trả lời câu hỏi đã được nêu ra.



- a) Viết phương trình tham số của đường thẳng MN .
- b) Tính tọa độ giao điểm D của đường thẳng MN với mặt phẳng Oxy .
- c) Hỏi điểm D có nằm giữa hai điểm M và N hay không?

Lời giải

Ta có $M(2; 3; -4), N(-1; 0; 8)$.

- a) Vì $\overrightarrow{MN} = (-3; -3; 12) = -3(1; 1; -4)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng MN nên phương

trình tham số của đường thẳng MN là
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 4t \end{cases}$$

- b) D là giao điểm của MN và (Oxy) , ta xét: $z = -4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Do đó $D(1; 2; 0)$.

- c) Vì $\overrightarrow{DM} = (1; 1; -4), \overrightarrow{DN} = (-2; -2; 8) = -2\overrightarrow{DM}$ nên D nằm giữa M và N .

Trả lời câu hỏi được nêu ra trong tình huống mở đầu:

Ta có $OD = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5} < 3$ nên tấm bìa che khuất tầm nhìn.

Câu 76. Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$, hai con đường đó tương ứng thuộc hai đường thẳng:

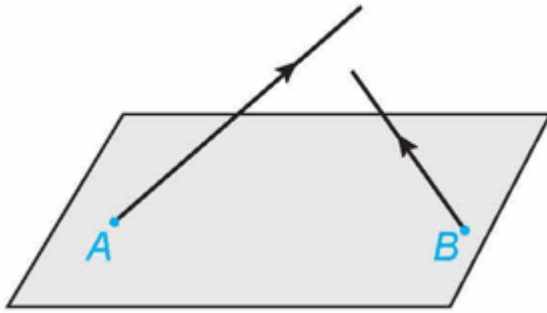
$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 2s \\ z = 1 \end{cases}$$

Hỏi hai con đường trên có vuông góc với nhau hay không?

Lời giải

Hai con đường thuộc hai đường thẳng lần lượt có vector chỉ phương là $\underline{u}_1 = (1; 1; 0), \underline{u}_2 = (-2; 2; 0)$. Ta có $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$ nên hai con đường thuộc hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, có hai vật thể lần lượt xuất phát từ $A(1; 2; 0)$ và $B(3; 5; 0)$ với vận tốc không đổi tương ứng là $\underline{v}_1 = (2; 1; 3), \underline{v}_2 = (1; 2; 1)$. Hỏi trong quá trình chuyển động, hai vật thể trên có va chạm vào nhau hay không?



Lời giải

Hai đường thẳng chứa phương chuyển động của hai vật thể là hai đường thẳng chéo nhau vì $\begin{bmatrix} \vec{v}_1, \vec{v}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{AB} = -10 + 3 + 0 = -7 \neq 0$. Vậy trong quá trình dịch chuyển hai vật thể không bao giờ chạm nhau.

Câu 78. Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$, hai con đường đó thuộc hai đường thẳng lần lượt có phương trình:

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$$

- a) Hai con đường trên có vuông góc với nhau hay không?
b) Nút giao thông trên có phải là nút giao thông khác mức hay không?



Lời giải

a) Hai con đường thuộc hai đường thẳng lần lượt có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; -1; 3), \vec{u}_2 = (-1; 1; 1) \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. Do đó hai con đường thuộc hai đường vuông góc với nhau.

b) Nút giao thông trong hình vẽ là nút giao thông khác mức vì hai đường thẳng tương ứng chứa hai con đường là chéo nhau. Độ cao của các đường giao thông khác nhau để tránh xung đột.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1; 3; 4)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; vector vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2; 1; 6)$. Hỏi viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu trong mỗi tình huống sau hay không?

a) Mục tiêu đặt tại điểm $M\left(7; \frac{7}{2}; 21\right)$.

b) Mục tiêu đặt tại điểm $N(-3; 1; -8)$.

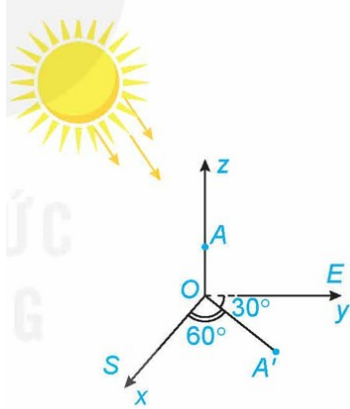
Lời giải

a) Mục tiêu đặt tại M , ta có $\vec{AM} = \left(6; \frac{1}{2}; 17\right)$ không cùng phương với $\vec{v} = (2; 1; 6)$ nên

viên đạn bắn không trúng mục tiêu.

b) Mục tiêu đặt tại N , ta có $\overrightarrow{AN} = (-4; -2; -12) = -2(2; 1; 6)$ cùng phương với $\mathbf{v} = (2; 1; 6)$ nhưng ngược chiều với $\mathbf{v} = (2; 1; 6)$. Trong trường hợp này viên đạn bắn cũng không trúng mục tiêu.

Câu 80. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao $6m$ vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột $3m$ về hướng $S60^\circ E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° và tạo với hướng đông góc 30°). Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc toạ độ là O , tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



Lời giải

Ta có $A(0; 0; 6), A' \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; -6 \right) = \frac{3}{2}(1; \sqrt{3}; -4)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AA' nên phương trình đường thẳng chứa tia nắng tại thời điểm đang xét là $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-6}{-4}$.

Câu 81. Một mô hình cầu treo được thiết kế trong không gian $Oxyz$ như Hình. Viết phương trình tham số của làn đường d đi qua hai điểm $M(4; 3; 20)$ và $N(4; 1000; 20)$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 997; 0)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm M, N nên d có vector chỉ phương là $\vec{a} = \frac{1}{997} \overrightarrow{MN} = (0; 1; 0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 + t \\ z = 20. \end{cases}$$

Câu 82. Trên một máy khoan bàn đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ. Nếu nhận xét về vị trí giữa trục d của mũi khoan và trục d' của giá đỡ có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 5 + 5t' \end{cases}.$$



Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và có vector chỉ phương $a = (0; 0; 1)$.

Đường thẳng d' có vector chỉ phương $a' = (0; 0; 5) = 5a$.

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của d' , ta được
$$\begin{cases} 1 = 10 \\ 1 = 20 \\ 1 = 5 + 5t' \end{cases} \quad (\text{không thoả mãn}).$$

Suy ra M không thuộc d' . Vậy $d \nparallel d'$.

Câu 83. Trên phần mềm thiết kế chiếc cầu treo, cho đường thẳng d trên trụ cầu và đường thẳng d' trên sàn cầu có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 50 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 20 \\ y = t' \\ z = 50 \end{cases}$$

Xét vị trí tương đối giữa d và d' .



Lời giải

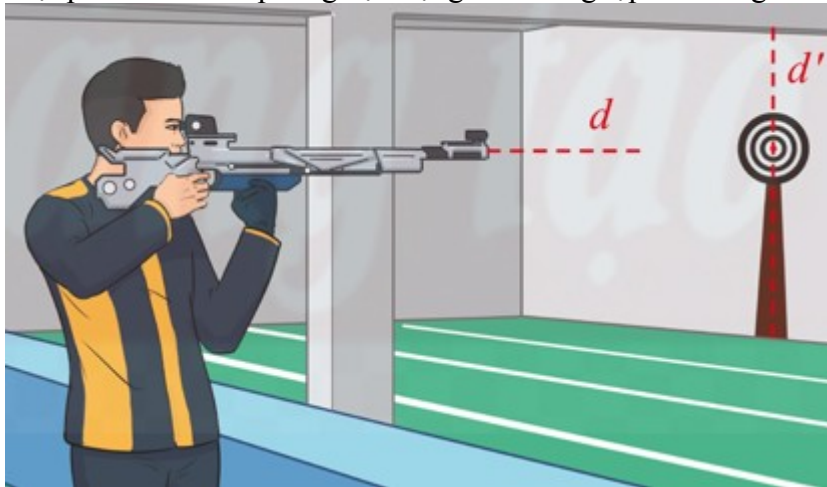
d và d' có vector chỉ phương lần lượt là $a = (0; 0; 1)$ và $a' = (0; 1; 0)$. Ta có a và a' không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\begin{cases} 0 = 20 & (1) \\ 0 = t' & (2) \\ 50 + t = 50 & (3) \end{cases}$$

Xét hệ phương trình

Ta thấy phương trình (1) vô nghiệm nên d và d' chéo nhau.

Câu 84. Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$.



Cho biết trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 20 \\ z = 9 \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$$

Xét vị trí tương đối giữa d và d' , chúng có vuông góc với nhau không?

Lời giải

d và d' có vector chỉ phương lần lượt là $a = (1; 0; 0)$ và $a' = (0; 0; 3)$.

Ta có a và a' không cùng phương. Suy ra d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Vì d và d' cùng đi qua điểm $M(10;20;9)$ nên d và d' cắt nhau.

Ta lại có $a \cdot a' = 0 + 0 + 0 = 0$. Vậy d và d' vuông góc với nhau tại $M(10;20;9)$.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, một xe tải có chiều cao bằng 1, di chuyển trên mặt phẳng (Oxy) và cần chui qua gầm của một cây cầu. Cây cầu đó thuộc đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

Hỏi chiều cao của gầm cầu có đủ để xe tải chui qua hay không?

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; -1; 2)$ và đường thẳng song song với mặt phẳng (Oxy) . Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy) bằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oxy) .

Ta có: $d(A, (Oxy)) = 2 > 1$, do đó xe tải có chiều cao bằng 1 thì chui qua được gầm cầu.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, một người ở trong một căn phòng, mắt người đặt tại vị trí $A(1; 2; 3)$, nhìn ra ngoài khu vườn qua một khung cửa sổ có dạng hình tròn tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính 2 và thuộc mặt phẳng (Oyz) . Hỏi qua khung cửa sổ, người đó có nhìn thấy bông hoa ở vị trí $M(-2; 1; 1)$ hay không?

Lời giải

Gọi N là giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (Oyz) , tọa độ điểm N có dạng $N(0; b; c)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN} = (-1; b-2; c-3)$ và $\overrightarrow{AM} = (-3; -1; -2)$ là hai vectơ cùng phương nên

$$\frac{b-2}{-1} = \frac{c-3}{-2} = \frac{-3}{-1} = 3 \Leftrightarrow b = -1; c = -3 \Rightarrow N(0; -1; -3)$$

Như vậy $ON = \sqrt{0+1+9} = \sqrt{10} > 2$ nên mắt người đặt ở vị trí A không thể nhìn thấy bông hoa đặt ở vị trí M qua một đường tròn có tâm O bán kính bằng 2 nằm trên mặt phẳng (Oyz) .