

CHỦ ĐỀ 5

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP KHI BIẾT HÀM $y=f'(x)$

DẠNG 1

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP DẠNG $g(x)=f(u(x))$

VẤN ĐỀ 1

HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$ B. $(3;+\infty)$ C. $(-\infty;-3)$ D. $(-\infty;-3)\cup(0;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2 \Rightarrow f'(x^2)=2xx^4(x^2-9)(x^2-4)^2$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \end{cases}$. Do $x=0$; $x=\pm 2$ không đổi dấu

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Vậy hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f(x^2+2019)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;2)$ B. $(0;3)$ C. $(-3;0)$ D. $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=g(x)=f(x^2+2019) \Rightarrow y'=g'(x)=(x^2+2019)'f'(x^2+2019)=2x.f'(x^2+2019)$.

Mặt khác $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Nên suy ra:

$$y' = g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 2019) = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x^2 + 2019 - 2038)(x^2 + 2019 - 2023)^2$$

$$= 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x - 3)(x + 3)(x - 2)^2 (x + 2)^2$$

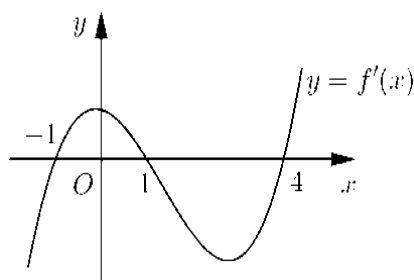
$$y' = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x - 3)(x + 3)(x - 2)^2 (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = 3 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = -3 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiem bội 2)} \\ x = -2 \text{ (nghiem bội 2)} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = g(x) = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 3)$

B. $(2; +\infty)$

C. $(-2; 1)$

D. $(-\infty; -2)$

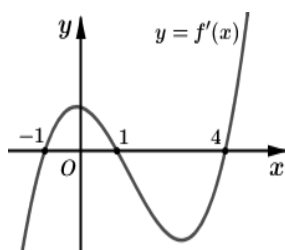
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (2 - x)' \cdot f'(2 - x) = -f'(2 - x)$

Hàm số đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = [f(x^2)]' = 2x \cdot f'(x^2)$

$$\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{theo dt } f'(x)} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 3 khoảng nghịch biến.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

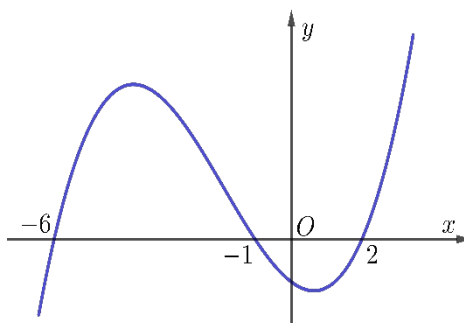
Cách 2. Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
g'	-	0	+	0	-	0	+
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn B

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. (0;1).

B. (-1;0).

C. (2;3).

D. (-2;-1).

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có:
$$\left[f(3 - x^2) \right]' = 0 \Leftrightarrow f'(3 - x^2) \cdot (-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$f'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số suy ra

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y									

Lập bảng xét dấu của hàm số $y = f(3 - x^2)$ ta được hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

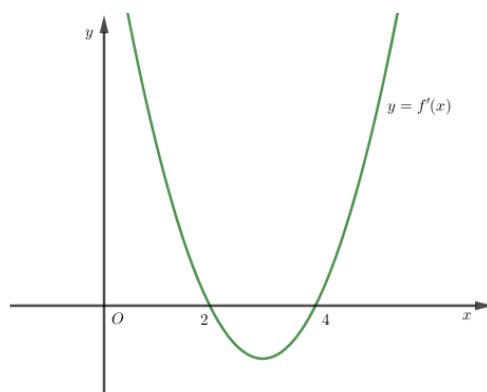
Cách 2:

Ta có: $y' = \left[f(3 - x^2) \right]' = (-2x) \cdot f'(3 - x^2)$

Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến khi và chỉ khi $(-2x) \cdot f'(3 - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(3 - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f'(3 - x^2) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} 3 - x^2 < -6 \\ -1 < 3 - x^2 < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 < 9 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1 + x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(\sqrt{3}; +\infty)$

B. $(-\sqrt{3}; -1)$

C. $(1; \sqrt{3})$

D. $(0; 1)$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = [f(1+x^2)]' = 2x \cdot f'(1+x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x^2=2 \\ 1+x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Mặt khác ta có

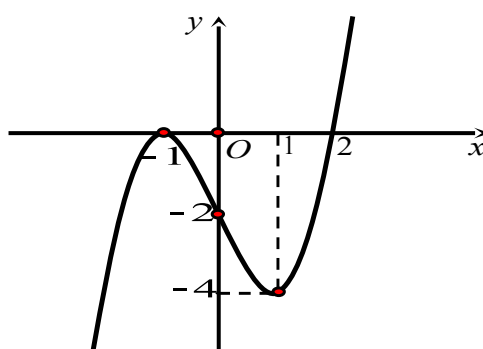
$$f'(1+x^2) < 0 \Leftrightarrow 2 < 1+x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(1+x^2)$	+	0	-	0	+	0	+
y'	-	0	+	0	-	0	+

Vậy hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(1; \sqrt{3})$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

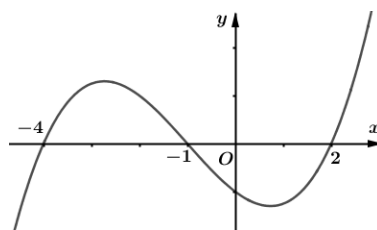
$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2); \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta có:

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ suy ra $f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ và ngược lại.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x$		-	-	-	0	+	+
$f'(2-x^2)$		+	0	-	0	-	0
$g(x)$		-	0	+	0	-	0

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 2x f'(x^2 - 5)$$

Ta có

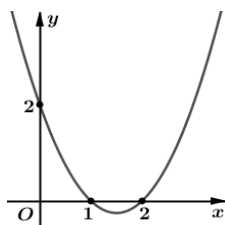
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = -4 \\ x^2 - 5 = -1 \\ x^2 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{7}$	$+\infty$
g'		-	0	+	0	-	0	+	0
g		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn C

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng?



- A. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = (1 - 2x)f'(x - x^2)$.

$$\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(x - x^2) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(x - x^2) < 0 \end{cases}.$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến

Trường hợp 1: $\begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(x - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x - x^2 < 1 \vee x - x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(x - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 1 < x - x^2 < 2 \end{cases} \text{ : vô nghiệm}$

Kết hợp hai trường hợp ta được $x > \frac{1}{2}$. Chọn D

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x - x^2 = 1 \text{ : vô nghiệm} \\ x - x^2 = 2 \text{ : vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Cách 2. Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

$$x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(x - x^2) > 0.$$

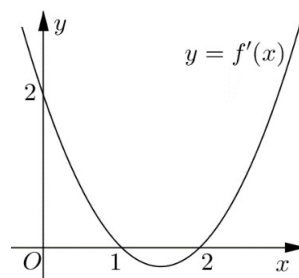
Cách 3. Vì

Suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $1 - 2x$.

$$g'(x) < 0 \rightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Yêu cầu bài toán cần

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = f(1 + 2x - x^2)$ đồng biến trên khoảng dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$

B. $(1; +\infty)$

C. $(0; 1)$

D. $(1; 2)$

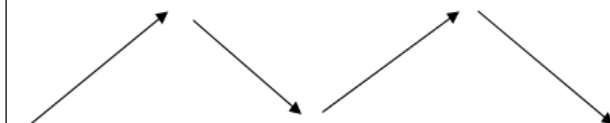
Lời giải

Chọn D

$$y' = (2 - 2x)f'(1 + 2x - x^2). \text{ Nhận xét: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2x - x^2 = 1 \\ 1 + 2x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có:

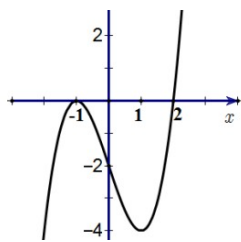
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
y						

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; 1)$

B. $(1; +\infty)$

C. $(0; 2)$

D. $(-1; 0)$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2; x = 3 \end{cases}$$

Lại có

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$													

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như

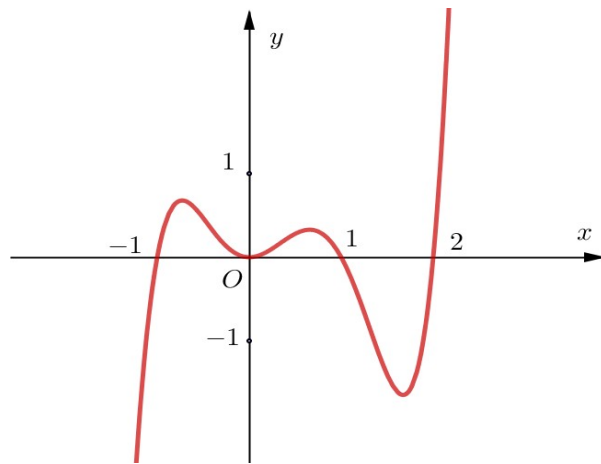
hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$.

A. $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; \sqrt{3})$

B. $(-\infty; -\sqrt{3}), (\sqrt{3}; +\infty)$

C. $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$

D. $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; +\infty)$



Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} f'(\sqrt{x^2 + 1})$.

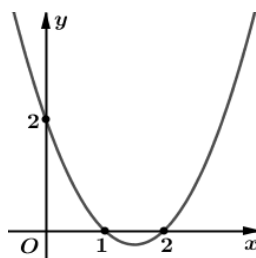
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = -1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 1 \\ x^2 + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$ đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$g'(x) = (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \right) f'(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}).$$

+
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

+
$$0 < u = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2} + \sqrt{(x+1)^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1} < 1 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(u) > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

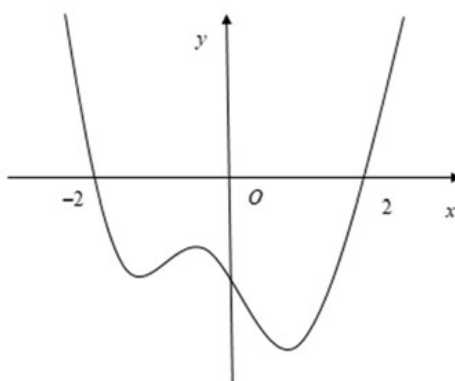
Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-2) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = |f(1-x^2)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số $y = |f(1-x^2)|$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$.
 C. Hàm số $y = |f(1-x^2)|$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $|f(-2)|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$f(-2)$		$f(2)$		$+\infty$

Ta có $f(-2) < 0; 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow f(1 - x^2) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$t = 1 - x^2 \Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow t \in (-2; 1) \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

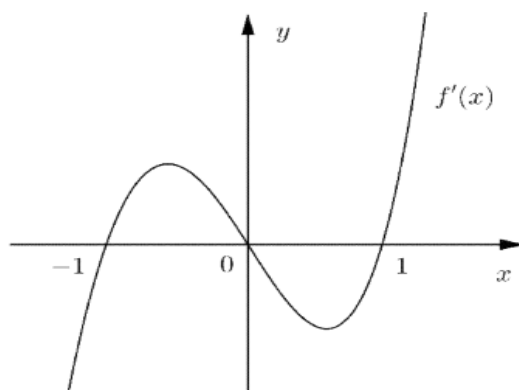
$$0 < f'(t) \Rightarrow t \in (-\infty; -2) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$$

$$g(x) = |f(1 - x^2)| \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f^2(1 - x^2)} = \frac{-4xf'(t)f'(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$			$g(-\sqrt{3})$		$g(0)$		$g(\sqrt{3})$		

Vậy hàm số $y = |f(1 - x^2)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1;0), (0;0), (1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1$$

Ta có: $g(x)=f(f'(x)) \Rightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3-x)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{cases}$$

Xét

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=1,325 \\ x=-1,325 \\ x=\pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1,325$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$1,325$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y=g(x)=f(x^2+2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=g'(x)=\left[f(x^2+2x)\right]'=(x^2+2x)'.f'(x^2+2x)=(2x+2).f'(x^2+2x)$.

Ta có $x^2+2x=(x+1)^2-1 \geq -1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ dựa vào bảng xét dấu trên ta có $f'(x^2+2x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ dấu "=" chỉ xảy ra tại $x=-1$.

Từ đó $y' \geq 0 \Leftrightarrow (2x+2).f''(x^2+2x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Mặt khác $(-\infty; -2) \subset (-\infty; -1)$ nên phương án C thỏa mãn bài toán.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $g(x) = f(2\cos x + 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

B. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Nhận thấy các tập hợp trong các đáp án đều là tập con của tập $(0; \pi)$ nên ở bài này ta xét trên khoảng $(0; \pi)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$ và $g'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow -2\sin x.f'(2\cos x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2\cos x + 1) \leq 0 \quad (\text{do } \sin x > 0, \forall x \in (0; \pi))$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2\cos x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x) = (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2 + m(3-x) + 9]$.

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2 \left[(3-x)^2 + m(3-x) + 9 \right] \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3}, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(3; +\infty)} h(x) \quad \text{với} \quad h(x) = \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3}.$$

Ta có $h(x) = \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3} = (x-3) + \frac{9}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{9}{x-3}} = 6.$

Vậy suy ra $m \leq 6 - \frac{m \in \mathbb{Z}^+}{\longrightarrow} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1).$

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2x.x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -\frac{3x^8 + 1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} h(x) \quad \text{với} \quad h(x) = -\frac{3x^8 + 1}{x^6}.$$

Khảo sát hàm $h(x) = -\frac{3x^8 + 1}{x^6}$ trên $(0; +\infty)$ ta được $\max_{(0; +\infty)} h(x) = -4.$

Suy ra $m \geq -4 - \frac{m \in \mathbb{Z}}{\longrightarrow} m \in \{-4; -3; -2; -1\}.$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2 + mx + 5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x-2)$

Hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow (2x+1)f'(x^2+x-2) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$(\text{vì } 2x+1 > 0, \forall x \in (1; +\infty))$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x) \left[(x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \right] \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\left[(x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \right] \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \quad (*) (\text{vì } (x^2+x-2)^2(x^2+x) \geq 0, (1; +\infty)).$$

Đặt $t = x^2 + x - 2$. Khi đó $x > 1 \Rightarrow t > 0$.

$$(*) \text{ trở thành } t^2 + mt + 5 \geq 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m \geq -t - \frac{5}{t}, \forall t > 0$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có } t + \frac{5}{t} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow -t - \frac{5}{t} \leq -2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{t} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Rightarrow \max_{(0; +\infty)} \left(-t - \frac{5}{t} \right) = -2\sqrt{5} \Rightarrow m \geq -2\sqrt{5}$$

Mà m nguyên âm nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$. Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của

tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 18

B. 17

C. 16

D. 20

Lời giải

Chọn A.

Xét dấu $f'(x)$ ta được

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta có: $y' = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Vì $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$ (*).

Đặt $t = x^2 + 3x - m$. Vì $x \in (0;2) \Rightarrow t \in (-m; 10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-m; 10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có:

$$\begin{cases} 10-m \leq -3 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 \leq m \leq 20 \\ -10 \leq m \leq -1 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow m \in \{-10; -9; \dots; -1; 3; 4; \dots; 20\}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 20.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y' = f'(x^2 + 3x - m) = (2x+3)f'(x^2 + 3x - m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có:

$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3 \\ x^2 + 3x - m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 + 3x + 3 \\ m \leq x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[0;2]}(x^2 + 3x + 3) \\ m \leq \min_{[0;2]}(x^2 + 3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$

Do $m \in [-10; 20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên

$m < 2021$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021

Lời giải

Chọn C.

$$g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$$

Ta có:

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$$

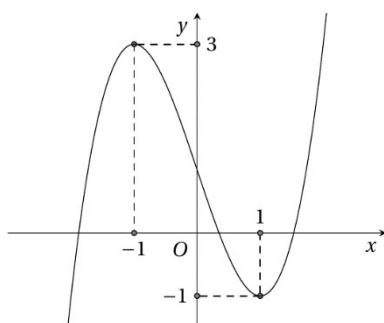
Hàm số $h(x) = \frac{2-x}{1+x} - m; x \in (2; +\infty)$ có bảng biến thiên:

x	$\frac{2}{-}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$-m$	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện $(1) \Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$, kết hợp điều kiện $m < 2021$ suy ra có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 + x + m)$ nghịch biến trên $(0; 1)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.Ta có $y' = (2x+1)f'(x^2+x+m)$.Hàm số $y = f(x^2+x+m)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (0;1)$.Vì $2x+1 > 0, \forall x \in (0;1)$ nên điều này tương đương với

$$f'(x^2+x+m) \leq 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+m \geq -1, \forall x \in (0;1) \\ x^2+x+m \leq 1, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x \geq -1-m, \forall x \in (0;1) \\ x^2+x \leq 1-m, \forall x \in (0;1) \end{cases}.$$

Ta có hàm số $g(x) = x^2+x$ luôn đồng biến trên $[0;1]$; do đó, ràng buộc trên tương đương với

$$\begin{cases} -1-m \leq g(0) = 0 \\ 1-m \geq g(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.**Câu 25.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.**A. 3.****B. 4.****C. 2.****D. 1.**

Lời giải

Chọn A.Từ giả thiết suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.Ta có $g'(x) = f'(x+m)$ và $x \in (0;2) \Leftrightarrow x+m \in (m; m+2)$.

$$g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (0;2) \Leftrightarrow (m; m+2) \subset (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m+2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m = -1; m = 0; m = 1$.**Câu 26.** Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	3	$-\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(\sqrt{x-2}+m)$ (1) nghịch biến trên khoảng $(11;25)$.**A. 1.****B. 0.****C. 2.****D. 3.**

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = \sqrt{x-2} + m$, với $x \in (11; 25)$ thì $t \in (3+m; 5+m)$, hàm số trở thành: $y = f(t)$ (2)

Dễ thấy x và t cùng chiều biến thiên nên hàm (1) nghịch biến trên $(11; 25)$ thì hàm (2) nghịch biến trên $(3+m; 5+m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$. Do đó hàm $f(t)$

nghịch biến trên $(3+m; 5+m)$ khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m+3 \geq 1 \\ m+5 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 2

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP DẠNG $g(x) = f(x) + h(x)$

VẤN ĐỀ 1

HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x^2(x-1)(4-x)$. Hàm số $y = g(x) = f(x) + f(1-x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. B. $(0; 1)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **D. $(1; 2)$.**

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = f'(x) - f'(1-x) = x^2(x-1)(4-x) - (1-x)^2(-x)(x+3)$

$$g'(x) = x(x-1)[x(4-x) + (x-1)(x+3)] = x(x-1)(6x-3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	1		$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$								

Hàm số $y = g(x) = f(x) + f(1-x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$

Suy ra hàm số đồng biến $(1; 2)$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)^2(x-3)$. Hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(0; 2)$. B. $\left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **C. $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.** D. $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^2$,

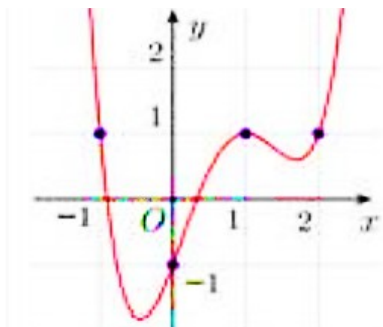
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x-3) = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)^2(x-3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy trên khoảng $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 2\right)$ thì hàm số $y=g(x)$ đồng biến.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $g(-1) < g(1) < g(2)$

B. $g(2) < g(1) < g(-1)$

C. $g(2) < g(-1) < g(1)$

D. $g(1) < g(-1) < g(2)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại 3 điểm là $x = -1$; $x = 1$ và $x = 2$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

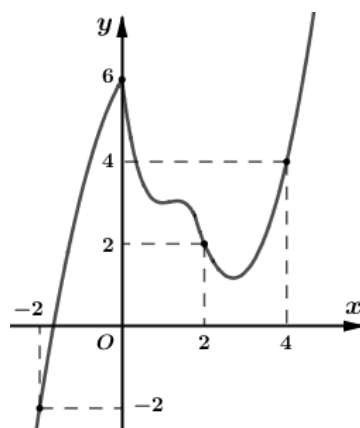
Vậy

Bảng xét dấu của hàm số $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$						

Dựa vào BBT ta thấy: $g(2) < g(1) < g(-1)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty; -2)$

B. $(-2; 2)$

C. $(2; 4)$

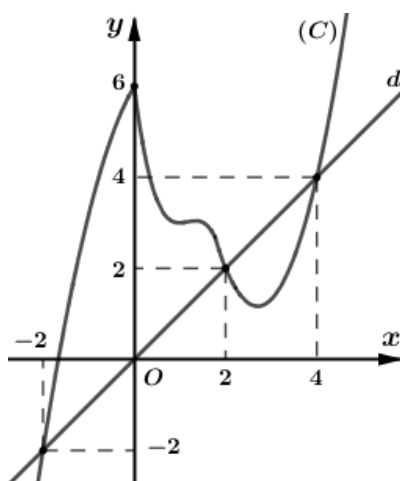
D. $(2; +\infty)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x$ (như hình vẽ bên dưới).



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

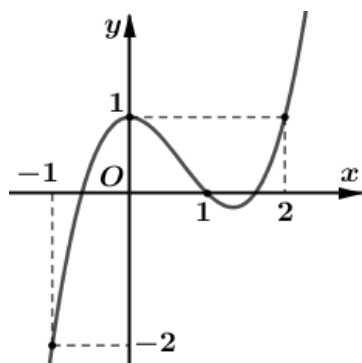
Dựa vào đồ thị, suy ra

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$					

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 2)$ và $(4; +\infty)$. So sánh 4 đáp án **Chọn B**

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

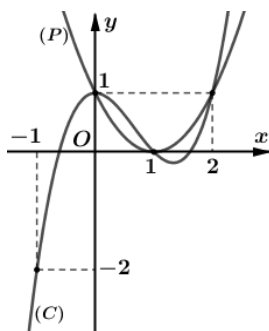
- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(1; 2)$. **D. $(0; 1)$.**

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x - 1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y = (x - 1)^2$.



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
g'	-	0	+	0	-	0	+
g							

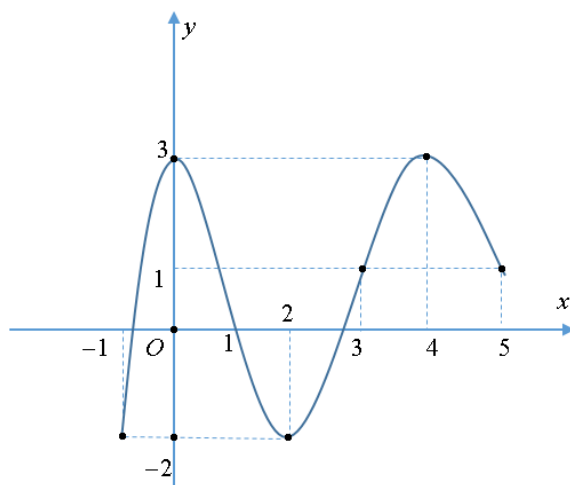
Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn D**

Lưu ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau:

Ví dụ trên khoảng $(-\infty; 0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = (x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0, x=1, x=2$ là các nghiệm đơn nên qua $g'(x)$ đổi dấu.

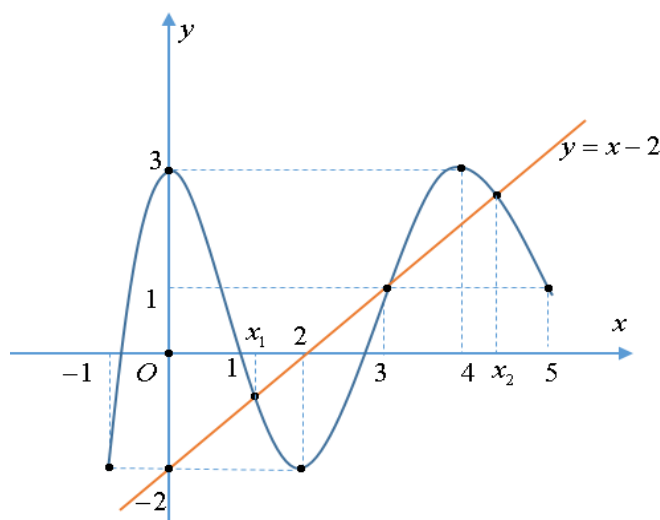
Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1; 5]$ có đồ thị của hàm $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn C.



Xét hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ trên $[-1; 5]$ ta có:

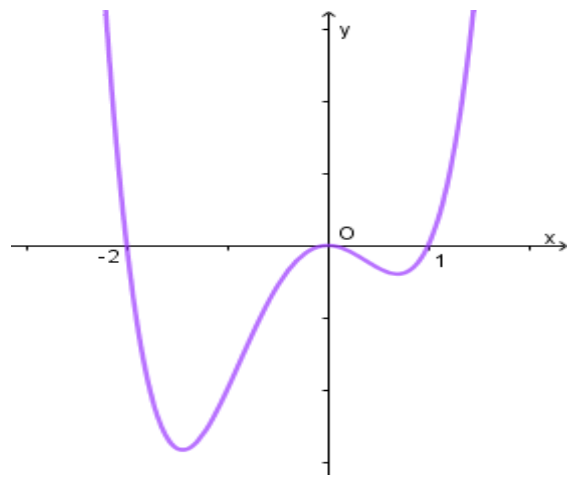
$$g'(x) = -2f'(x) + 2x - 4; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (0; 2) \\ x = 3 \\ x = x_2 \in (4; 5) \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	-1	0	x_1	2	3	4	x_2	5
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x+1)+f(2-x)-x^2+6x-3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây

- A. $(-\infty;0)$
- B. $(0;3)$
- C. $(1;2)$
- D. $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=f'(x+1)-f'(-2-x)+6-2x\geq0\forall x\in K$ ta chỉ cần chọn x sao cho

$$\begin{cases} f'(x+1)\geq0 \\ f'(2-x)\leq0 \\ 6-2x\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq1 \\ x+1\leq-2 \\ -2\leq2-x\leq1 \\ x\leq3 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x\leq3$$

đổi chiều đáp án ta tìm được đáp án C

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	x	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	-3	3	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x)-3x$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(2;2019)$
- B. $(-2019;-2)$
- C. $(1;2)$
- D. $(-1;1)$

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3$

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$.

VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-50, 50)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2$ nghịch biến trên khoảng $(0, 2)$?

A. 26.

B. 25.

C. 51.

D. 50.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2$ và $g'(x) = f'(x) - (m+1)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0, 2)$ khi

$g'(x) \leq 0, \forall x \in (0, 2)$ (dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $(0, 2)$).

$$\Leftrightarrow f'(x) - (m+1) \leq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x \leq m, \forall x \in (0; 2) \quad (*)$$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x, x \in (0; 2)$

Ta có $h'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x \in (0; 2)$

Bảng biến thiên:

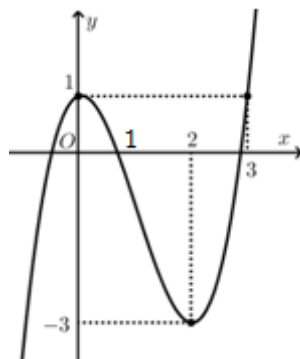
x	0	2
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	24

Nhìn bảng biến thiên suy ra điều kiện để $(*)$ xảy ra là: $m \geq 24$.

Do $m \in \mathbb{Z}$, thuộc khoảng $(-50; 50)$ nên $m \in [24; 50)$ và $m \in \mathbb{Z}$ hay $m \in \{24, 25, \dots, 49\}$.

Vậy có 26 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là



A. $m > 4$.

B. $m \leq 4$.

C. $m \geq 4$.

D. $0 > m > 4$.

Lời giải

Chọn C.

$$y = f(x) + (m-1)x \Rightarrow y' = f'(x) + m - 1$$

Ta có

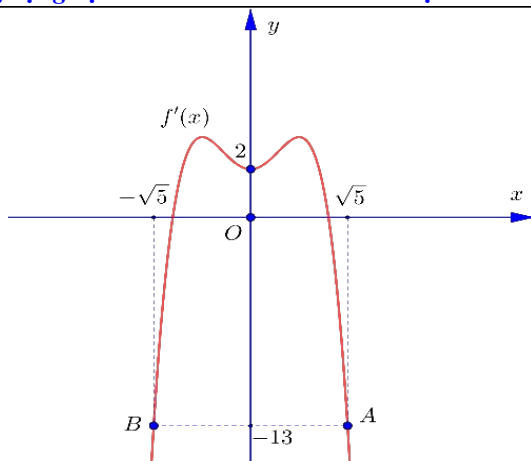
Hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow f'(x) + m - 1 \geq 0, \forall x \in (0; 3)$$

$$\Leftrightarrow -m + 1 \leq f'(x), \forall x \in (0; 3)$$

$$\Leftrightarrow -m + 1 \leq \min_{x \in (0; 3)} f'(x) \Leftrightarrow -m + 1 \leq -3 \Leftrightarrow m \geq 4$$

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ ($m \in \mathbb{R}$). Để $g(x) \leq 0$ với $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là

A. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$

B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$

C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$

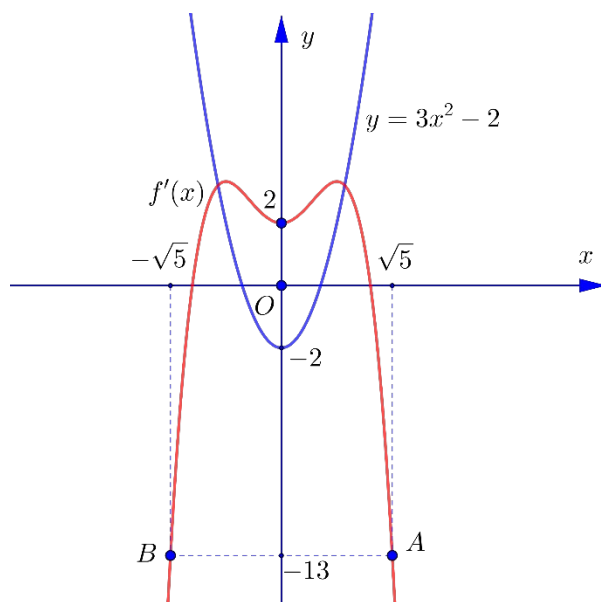
D. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3x^2 - 2 = 0$

Để $g(x) \leq 0$ với $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì $\max g(x) \leq 0$ với $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 3x^2 - 2$ ta thấy $f'(x) + 3x^2 - 2 \geq 0 \quad \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ nên hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Suy ra $\max g(x) = g(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5}) - 3m \Rightarrow 2f(\sqrt{5}) - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

DẠNG 3

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP $g(x) = f(u(x)) + h(x)$

VẤN ĐỀ 1

HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2021$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2021x + 2022$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$y' = -f'(1-x) + 2021 = -[1 - (1-x)][(1-x) + 2]g(1-x) - 2021 + 2021 = -x(3-x)g(1-x)$$

Hàm số nghịch biến khi $y'(x) < 0 \Leftrightarrow x(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$ (do $g(1-x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x) = (1-x^2)(x-5)$

Hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 5)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = (1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3) = [1-(x+3)^2](x+3-5) = -(x+4)(x+2)(x-2)$

Mặt khác: $y' = 3.f'(x+3) - 3x^2 + 12 = -3[(x+4)(x+2)(x-2) + (x^2-4)] = -3(x-2)(x+2)(x+5)$

Xét $y' < 0 \Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 1$ trong đó $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + x + 2$ nghịch biến trên các khoảng nào?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 1 \Rightarrow f'(1-x) = x(3-x)g(1-x) + 1$

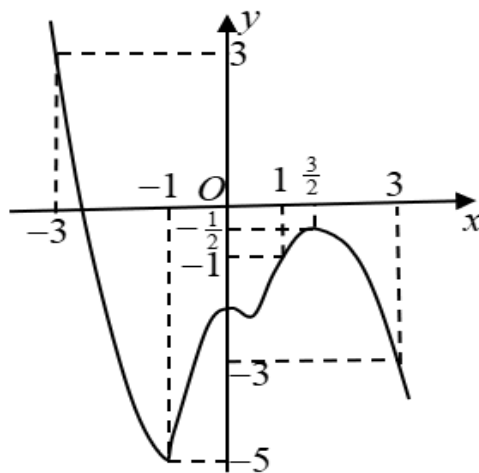
Mặt khác: $y' = (f(1-x))' + 1 = -f'(1-x) + 1 = -[x(3-x)g(1-x) + 1] + 1 = -x(3-x)g(1-x)$

Ta có: $y' < 0 \Leftrightarrow -x(3-x)g(1-x) < 0 (*)$

Do $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(1-x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 0 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = f(1-x) + x + 2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(-2; 0)$.

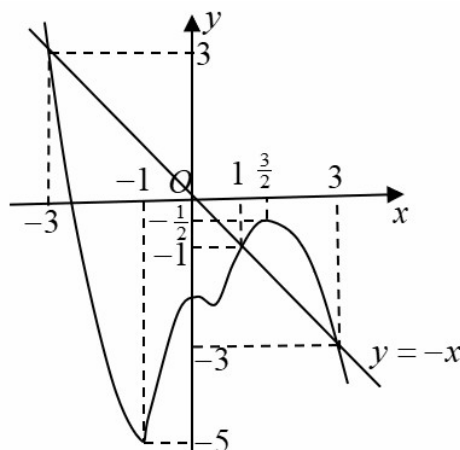
C. $(-3; 1)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:



Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + x - 1$.

Để $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > x - 1$. Đặt $t = 1 - x$, bất phương trình trở thành $f'(t) > -t$.

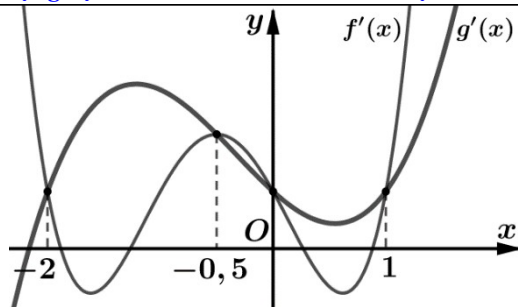
Kẻ đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x = -3$; $x = -1$; $x = 3$.

Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình $f'(t) > -t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x < -3 \\ 1 < 1 - x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$.

Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình

Đối chiếu đáp án ta **chọn B**

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm (đồ thị $y = g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ



Hàm số $h(x) = f(x-1) - g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

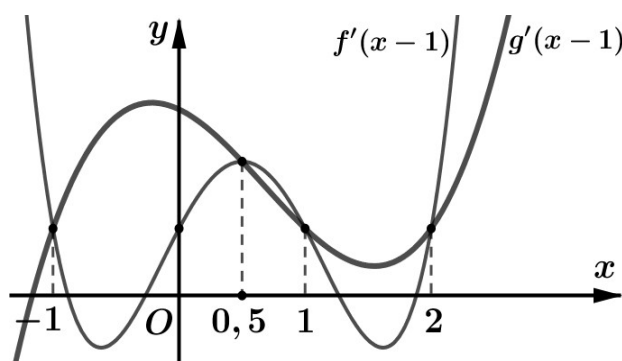
C. $(1; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Hai đồ thị $f'(x-1)$, $g'(x-1)$ được suy ra bằng cách tịnh tiến hai đồ thị $f'(x)$, $g'(x)$ sang phải 1 đơn vị như hình vẽ bên dưới



Ta có $h'(x) = f'(x-1) - g'(x-1)$.

Hàm số $h(x)$ nghịch biến khi $h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-1) < g'(x-1) \Rightarrow x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4; -2)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(2; 4)$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$. Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) \geq 2$$

Xét

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ ta có:

+) TH1: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4; -2)$.

+) TH2: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < a < 0 \Leftrightarrow 2 < 2 - 2a < x < 4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2 - 2a; 4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2; 4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$.

VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)$. Tìm m để hàm số $y = g(x) = f(x+2) - mx$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

A. $m \leq \frac{-9}{4}$

B. $-\frac{9}{4} \leq m \leq 10$

C. $m \geq \frac{-9}{4}$

D. $m \geq 10$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y = g(x) = f(x+2) - mx$. Suy ra $g'(x) = f'(x+2) - m$.

Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến $\forall x \in (-1; 2)$ thì $g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-1; 2)$.

Hay $f'(x+2) \geq m \quad \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow m \leq f'(x+2) \quad \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow m \leq x(x+3) \quad \forall x \in (-1; 2)$.

$m \leq \min_{x \in (-1; 2)} (x^2 + 3x)$. Đặt $h(x) = x^2 + 3x$, $h'(x) = 2x + 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$		
$h(x)$		-2	$-\frac{9}{4}$	10	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m \leq -\frac{9}{4}$.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có $f(x) = x(x+1)^3 \cdot (x-1)^4 \cdot (x-4)^5$.

Giá trị của tham số m để hàm số $y = g(x) = f(1-x) + \frac{1}{x^2 + mx + m^2 + 1}$ chắc chắn luôn đồng biến trên $(-3; 0)$.

A. $m \in (-2; -1)$

B. $m \in (-\infty; -2)$

C. $m \in [-1; 0]$

D. $m \in [0; +\infty)$

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $x^2 + mx + m^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng vì $x^2 + mx + m^2 + 1 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{3m^2}{4} + 1 > 0$)

$$g'(x) = -f'(1-x) - \frac{2x+m}{(x^2 + mx + m^2 + 1)^2}$$

Đặt $t = 1 - x; x \in (-3; 0) \Rightarrow t \in (1; 4) \Rightarrow -f'(1 - x), x \in (-3; 0)$ chính là $-f'(t), t \in (1; 4)$. Do đó

$$-f'(t) > 0, \forall t \in (1; 4) \Leftrightarrow -f'(1 - x) > 0, \forall x \in (-3; 0)$$

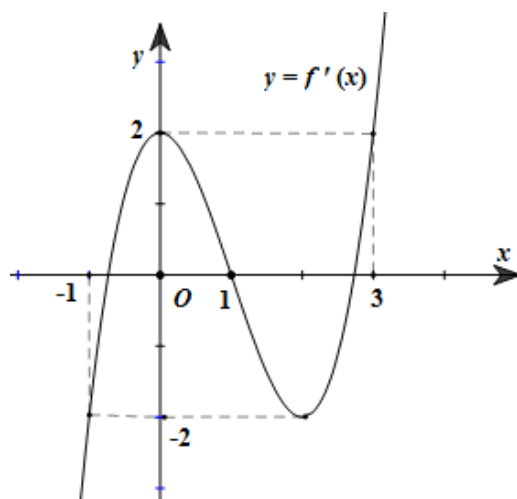
$$\Leftrightarrow -\frac{2x + m}{(x^2 + mx + m^2 + 1)^2} \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow 2x + m \leq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

Ycbt

$$\Leftrightarrow m \leq -2x, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \leq \min_{[-3; 0]}(-2x) \Leftrightarrow m \leq 0$$

. Vậy $m \in [0; +\infty)$

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x - m) - \frac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2021$ với m là tham số thực. Gọi S là

tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$.

Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.

B. 11.

C. 14.

D. 20.

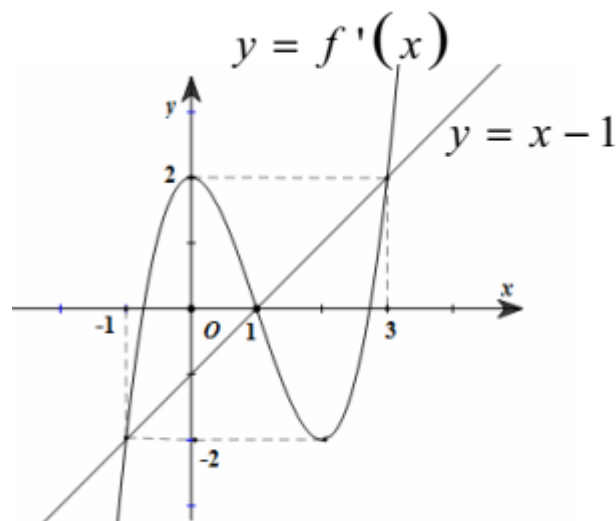
Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = f'(x - m) - (x - m - 1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x - 1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x - 1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



Ta có
$$g'(x) = h(x - m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x - m \leq 1 \\ x - m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq x \leq m + 1 \\ x \geq m + 3 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m - 1; m + 1)$ và $(m + 3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

DẠNG 4

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP $g(x) = [f(u(x))]^k$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x^2-9)(x^4-16)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số

$y = g(x) = [f(2x-x^2)]^{2023}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$. B. $(3; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) = (x+2)(x^2-9)(x^4-16) = (x-3)(x-2)(x+3)(x+2)^2(x^2+4)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2023 \cdot [f(2x-x^2)]^{2022} [f(2x-x^2)]' \\ &= 2023 \cdot [f(2x-x^2)]^{2022} (2-2x)f'(2x-x^2) \\ &= 2023 [f(2x-x^2)]^{2022} (2-2x)(2x-x^2-3)(2x-x^2-2)(2x-x^2+3)(2x-x^2+2)^2 [(2x-x^2)^2+4] \\ &= 2019 [f(2x-x^2)]^{2018} (2x-x^2+2)^2 (x^2-2x+3)(x^2-2x+2) [(x^2-2x)^2+4] (2-2x)(2x-x^2+3) \end{aligned}$$

Ta có:

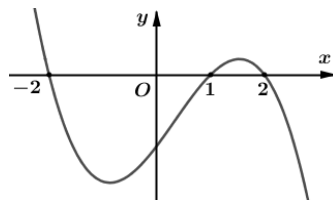
$$2023 [f(2x-x^2)]^{2022} (2x-x^2+2)^2 (x^2-2x+3)(x^2-2x+2) [(x^2-2x)^2+4] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Khi đó $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2-2x)(2x-x^2+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1] \cup [3; +\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x) = [f(2x-x^2)]^{2023}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số

$y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



- A. $(-1; \frac{3}{2})$. B. $(-1; 1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \pm 2$; $f(2) = f(-2) = 0$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$								

$\begin{matrix} \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty \end{matrix} \Rightarrow f(x) < 0; \forall x \neq \pm 2.$

Xét $y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x).f'(x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{cases}$

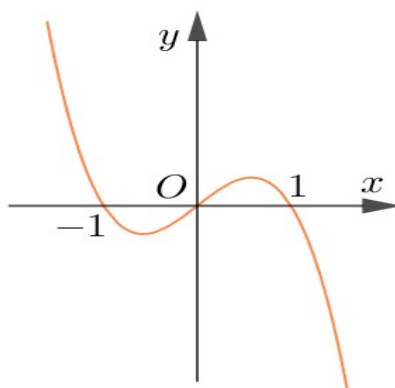
Bảng xét dấu :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$-$	$-$	0	$-$	
$y = \left[(f(x))^2 \right]'$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hoặc Ta có $g(x) = 2f(x).f'(x)$. Xét $g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x).f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(1; 2)$.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = [f(2x-1)]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1; 0)$

B. $(0; 1)$

C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = 6f^2(2x-1).f'(2x-1)$

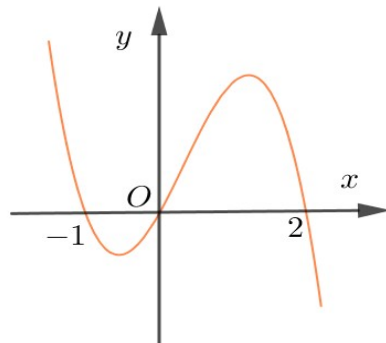
Do $6f^2(2x-1) \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(2x-1) \leq 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có

$$f'(2x-1) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 1 \\ -1 \leq 2x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đề

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(1) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = [f(x^2 - 3)]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. (1; 2)

B. (0; 1)

C. (-1; 0)

D. (-2; -1)

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = 4xf(x^2 - 3) \cdot f'(x^2 - 3)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(2)$	$-\infty$

Do $f(-1) = f(2) = 0$ nên $f(x^2 - 3) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x \cdot f'(x^2 - 3) \leq 0$

$$f'(x^2 - 3) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x^2 - 3 \leq 0 \\ x^2 - 3 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{5} \\ x \leq -\sqrt{5} \end{cases}$$

TH1: $x \geq 0$ thì

$$\text{Vì } x \geq 0 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$f'(x^3 - 3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 - 3 \leq 2 \\ x^2 - 3 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

TH2: $x \leq 0$ thì

$$\text{Vì } x \leq 0 \text{ nên } \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{5}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-3; 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = (f(x^2 + 3x - m))^3$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow +\infty$

A. 20.

B. 17.

C. 16.

D. 18.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = 3(2x + 3)f'(x^2 + 3x - m) \cdot [f(x^2 + 3x - m)]^2$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow y' = 3(2x + 3)f'(x^2 + 3x - m) \cdot [f(x^2 + 3x - m)]^2 \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

Do $x \in (0; 2)$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2)$ và $[f(x^2 + 3x - m)]^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ Do đó, ta có:

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3 \\ x^2 + 3x - m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 + 3x + 3 \\ m \leq x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(0;2)}(x^2 + 3x + 3) \\ m \leq \min_{(0;2)}(x^2 + 3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Do $m \in [-10; 20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

DẠNG 5

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP $y = g(x).f(x)$, $y = \frac{g(x)}{f(x)}$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
y'	$+\infty$	-1	0	$-\infty$

Khi đó, hàm số $y = xf'(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$

B. $(-2; 0)$

C. $(0; 2)$

D. $(-2; 2)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y = xf'(x) \Rightarrow y' = f'(x) + xf''(x)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$ với $a < -3$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	a	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(a)$	0	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có $f(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$

Và $f'(x) < 0, \forall x \in (-2; 0) \Rightarrow xf'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$

Từ đó suy ra $y' = f(x) + xf'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$. Do đó hàm số $y = xf(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì $f(x)$ và $xf'(x)$ có thể âm hoặc dương nên không thể kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0) \Rightarrow$ đáp án A sai.

Trên $(0; 2)$ thì $f(x) < 0$ và $f'(x) < 0 \Rightarrow xf'(x) < 0 \Rightarrow f(x) + xf'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 2) \Rightarrow$ đáp án C sai.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = 0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	0	0	$-\infty$

Hàm số $g(x) = (x^2 - x - 2)f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		0			

Ta có $g'(x) = (2x - 1)f(x) + (x^2 - x - 2)f'(x)$.

Ta lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	Chưa xác định
$(2x-1)f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	Chưa xác định
x^2-x-2	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$
$(x^2-x-2)f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	$-$		Chưa xác định		Chưa xác định

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	-3	5	$+\infty$

Với $m < 0$, hàm số $y=(x^2-2x+m).f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

- A. $(-1;0)$. B. $(0;1)$. C. $(1;3)$. D. $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

$$y'=(2x-2).f(x)+(x^2-2x+m).f'(x)$$

+ Ta có $2x-2 < 0, \forall x \in (0;1)$ và $f(x) < 0, \forall x \in (0;1)$ (1)

Bảng biến thiên của hàm $y=g(x)=x^2-2x+m$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	m	$m-1$	$+\infty$

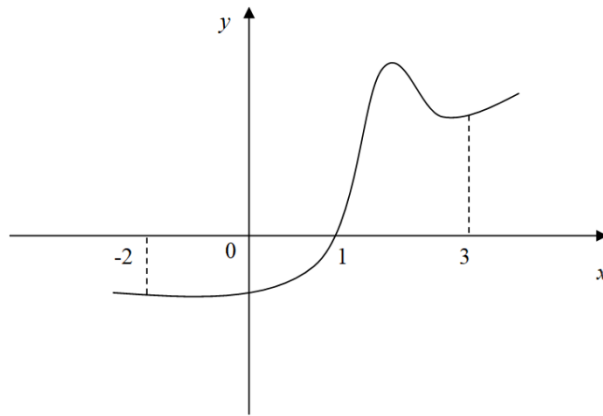
Từ hai BBT suy ra $g(x)=x^2-2x+m < 0, \forall x \in (0;1)$ (do $m < 0$) và $f'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y'=(2x-2).f(x)+(x^2-2x+m).f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0;1)$.

Trong các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(1;3)$ thì chưa thể xác định được dấu của

$y' = (2x - 2) \cdot f(x) + (x^2 - 2x + m) \cdot f'(x)$ nên dựa vào các đáp án ta **Chọn B**

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có như sau:



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có giao điểm với trục hoành và $\max_{\mathbb{R}} f(x) = -1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để

hàm số $g(x) = \frac{(x-1)^2((-2m^2+1)x+m)}{f(x)}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\max_{\mathbb{R}} f(x) = -1 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{(x-1)((-2m^2+1)(3x-1)+2m)f(x) - (x-1)^2((-2m^2+1)x+m)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{(x-1)[((-2m^2+1)(3x-1)+2m)f(x) - (x-1)((-2m^2+1)x+m)f'(x)]}{(f(x))^2}$$

$$\text{Đặt } ((-2m^2+1)(3x-1)+2m)f(x) - (x-1)((-2m^2+1)x+m)f'(x) = h(x)$$

Vì $g'(x)$ có 1 nghiệm bội lẻ $x=1$ nên để $g'(x) \geq 0$ thì điều kiện cần là $h(x)$

cũng có nghiệm là $x=1$.

$$h(1) = 2(-2m^2+m+1)f(1) = 0 \Leftrightarrow -2m^2+m+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Th1: Với $m=1$ ta có

$$g'(x) = \frac{-3(x-1)^2 f(x) + (x-1)^3 f'(x)}{(f(x))^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

TH2: Với $m = \frac{-1}{2}$ ta có

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3(x-1)^2 f(x) - (x-1)^3 f'(x)}{(f(x))^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn đề bài yêu cầu.

DẠNG 6

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM $y = f(x)$ KHI BIẾT HÀM $y = f'(u(x))$

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2022$ với $g(x) < 0, \forall x \in R$. Khi đó hàm số $y = f(1-x) + 2022x + 2023$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A.** $(1; +\infty)$ **B.** $(0; 3)$ **C.** $(-\infty; 3)$ **D.** $(4; +\infty)$

Lời giải

Chọn D.

$$y = h(x) = f(1 - x) + 2022x + 2023$$

Xét hàm số

$$h'(x) = -f'(1-x) + 2022 = -x(3-x)g(1-x)$$

Ta có

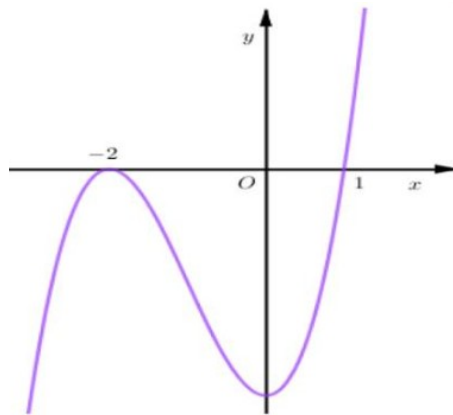
$$\forall x \in R, g(x) < 0, \text{ nên } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y							

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch trên khoảng nào?



A. $(-\infty; 8)$

B. $(-\frac{7}{3}; +\infty)$

C. $(\frac{4}{3}; +\infty)$

D. $(-\infty; 10)$

Lời giải

Chọn A.

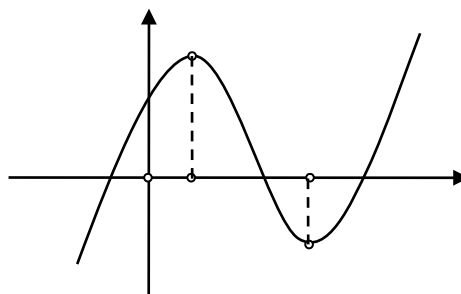
Đặt $x = 3t + 5$. Khi đó $g(t) = f(3t+5) \Rightarrow g'(t) = 3f'(3t+5)$

Ta có $g'(t) < 0 \Leftrightarrow f'(3t+5) < 0 \Leftrightarrow t < 1$

Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{3} < 1 \Leftrightarrow x < 8$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 8)$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta - \alpha$ là:



A. 9

B. 3

C. 6

D. 1

Lời giải

Chọn D.

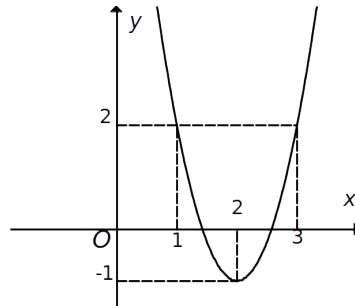
Ta có: $y = f(3x-2) \Rightarrow y' = 3.f'(3x-2)$

Hàm số $y = f(3x-2)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y' \leq 0 \Leftrightarrow 3.f'(3x-2) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3x-2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Vậy khoảng $(\alpha; \beta)$ lớn nhất là $(1; 2)$.

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x - 2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x - 2) + 2 < 2, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow f'(x - 2) < 0, \forall x \in (1; 3)$.

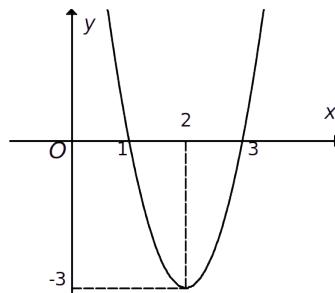
Đặt $x^* = x - 2$ thì $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

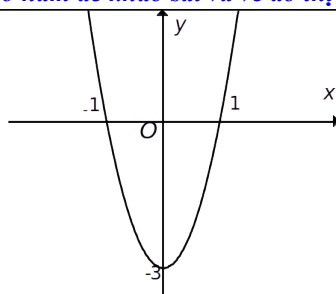
Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Cách 2: Tịnh tiến đồ thị

Từ đồ thị hàm số $f'(x - 2) + 2$ tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x - 2)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).

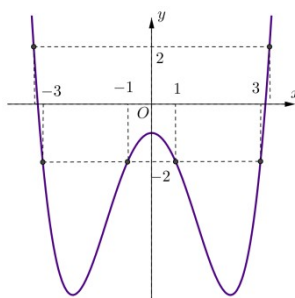


Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x - 2)$ sang trái 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x) < 0$ khi $x \in (-1; 1)$.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



- A. $(-3; -1), (1; 3)$. B. $(-1; 1), (3; 5)$. C. $(-\infty; -2), (0; 2)$. D. $(-5; -3), (-1; 1)$.

Lời giải

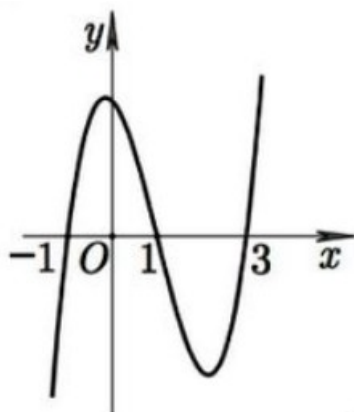
Chọn B.

Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x+2) - 2 < -2, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; 3) \Leftrightarrow f'(x+2) < 0, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

Đặt $x^* = x + 2$ suy ra: $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1) \cup (3; 5)$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1), (3; 5)$.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(2x + \frac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta cần giải bất phương trình $y' = f'(x) > 0$.

Dựa vào đồ thị $y = f\left(2x + \frac{3}{2}\right)$. Ta có $f'\left(2x + \frac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \quad (*)$

Đặt $t = 2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(2t - 3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \frac{2t-3}{4} < 1 \\ \frac{2t-3}{4} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < t < \frac{7}{2} \\ t > \frac{15}{2} \end{cases}$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ và $\left(\frac{15}{2}; +\infty\right)$.

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$						$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây

A. $(0; 2)$

B. $(2; 5)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-4; -2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $[f(x+2)]' = (x+2)' \cdot f'(x+2) = f'(x+2)$

Đặt $t = x+2$ khi đó $y = f(x+2) = f(t)$ và $y' = [f(x+2)]' = f'(t)$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x+2)$ ta có $f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$

Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \end{cases}$

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 0)$