|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT NINH BÌNH  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **LƯƠNG VĂN TỤY**  \*\*\*\*\*\*\*\* | **ĐỀ THI ĐỀ XUẤT**  **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI NĂM 2023**  **MÔN:** **TOÁN 10**  Thời gian làm bài: 180 phút  ( Đề này gồm 05 câu, 01 trang) |

**Câu 1 (4,0 điểm).**

Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn

.

**Câu 2 (3,0 điểm).**

Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng

.

**Câu 3 (5,0 điểm).**

Cho tam giác không cân, nội tiếp đường tròn . Đường tròn  nội tiếp tam giác  tiếp xúc với các cạnh  và  lần lượt tại  và  Gọi  là giao điểm thứ hai (khác ) của đường tròn  với đường tròn đường kính 

a) Chứng minh rằng  đi qua điểm chính giữa của cung  không chứa .

b) Gọi là giao điểm của  và ;  là điểm đối xứng vớiqua  là hình chiếu vuông góc của  lên  Chứng minh rằng ba điểm thẳng hàng.

**Câu 4** **(4,0 điểm).**

Cho  là một hợp số sao cho  chia hết , ở đó  là hàm Euler và  là tổng các ước nguyên dương của . Chứng minh  có ít nhất  ước nguyên tố phân biệt.

**Câu 5 (4,0 điểm).**

Với  là số nguyên dương, xét bảng ô vuông kích thước  được chia thành các ô vuông. Một cách tô các ô vuông màu đen được gọi là “đẹp” nếu số lượng ô đen mỗi hàng và mỗi cột bất kì luôn là số chẵn; đồng thời, số các ô màu đen trên đường chéo có độ dài lớn hơn  bất kì là số lẻ (*đường chéo ở đây là dãy các ô liên tiếp nằm trên đường thẳng song song với một trong hai đường chéo của bảng ô vuông* *ban đầu; độ dài đường chéo là số lượng ô nằm trên đó*).

a) Chứng minh rằng tồn tại một cách tô “đẹp” khi .

b) Chứng minh rằng không tồn tại cách tô “đẹp” với mọi  là số chẵn.

---------HẾT--------

|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT NINH BÌNH  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **LƯƠNG VĂN TỤY**  \*\*\*\*\*\*\*\* | **HDC ĐỀ THI ĐỀ XUẤT**  **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC**  **DUYÊN HẢI NĂM 2023**  **MÔN:** **TOÁN 10**  Thời gian làm bài: 180 phút  ( Đề này gồm 07 câu, 08 trang) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu hỏi** | **Hướng dẫn** | **Điểm** |
| **1.**  **(4,0 điểm)** | Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn | |
| Kí hiệu  là phép thế  bởi  và  bởi  trong  Nếu  là hàm hằng thì thay vào  ta được .  Nếu  khác hằng. Từ  do đó tồn tại .  Nếu , từ  là hằng.  Vô lí.  Vậy .    Giả sử tồn tại  thỏa mãn .  Trừ vế theo vế  ta được    Do  nên . Vậy  đơn ánh.  Lại có  , nên  .  Vậy   hoặc . | 1,0  0.5  0.5  1,0  1,0 |
| **2.**  **(3,0 điểm)** | Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng  . | |
| Giả sử .  Ta có:    .  Ta có đpcm. | 1,0  1,0  1,0 |
| **3.**  **(5,0 điểm)** | Cho tam giác không cân, nội tiếp đường tròn . Đường tròn  nội tiếp tam giác  tiếp xúc với các cạnh  và  lần lượt tại  và  Gọi  là giao điểm thứ hai (khác ) của đường tròn  với đường tròn đường kính  a) Chứng minh rằng  đi qua điểm chính giữa của cung  không chứa  .  b) Gọi là giao điểm của  và ;  là điểm đối xứng vớiqua  là hình chiếu vuông góc của  lên  Chứng minh rằng ba điểm thẳng hàng. | |
|  |  |
| a) Xét hai tam giác  và  có  Vì  nên  thuộc đường tròn đường kính .  Do đó  suy ra  Từ (\*) và (\*\*) suy ra hai tam giác  và  đồng dạng  Suy ra  Suy ra  là phân giác trong của góc  hay  đi qua điểm chính giữa của cung  không chứa . | 1,0  1,0 |
| b) Ta có  (  Theo định lí Xeva ta có  đồng qui tại .  Do tam giác  không cân nên  cắt  tại .  Gọi  là giao điểm của  với  và  là giao điểm của  với .  Xét tam giác  có  đồng quy tại .  Suy ra  Mà , kết hợp (1) suy ra  là phân giác trong của góc  Do  đối xứng  qua  nên  là phân giác trong của góc  Từ (2) và (3) suy ra  thẳng hàng. | 1,0  1,0  1,0 |
| **4.**  **(4,0 điểm)** | Cho  là một hợp số sao cho  chia hết , ở đó  là hàm Euler và  là tổng các ước nguyên dương của . Chứng minh  có ít nhất  ước nguyên tố phân biệt. | |
| Giả sử  là lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố , .  Khi đó  nên , mâu thuẫn .  Do đó  có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt.  Giả sử , với  là hai số nguyên tố phân biệt,  là các số nguyên dương.  Nếu  hoặc , tương tự như chứng minh trên thì ta cũng gặp mâu thuẫn.  Do đó . Suy ra  .  Do đó . Giả sử  hay    Cố định , giả sử  là nghiệm nguyên dương của phương trình  .  với  nhỏ nhất và . Xét phương trình  .  Khi đó phương trình có một nghiệm , do đó phương trình có một nghiệm .  Dễ thấy  nguyên. Nếu  thì , suy ra , vô lí.  Do đó , suy ra  là số nguyên dương. Suy ra  cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình (1).  Kéo theo , suy ra , do đó . Ta gặp mâu thuẫn. Như vậy  không thể có đúng hai ước nguyên tố phân biệt. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. | 0.5  0.5  1,0  1,0  1,0 |
| **5.**  **(4,0 điểm)** | Với  là số nguyên dương, xét bảng ô vuông kích thước  được chia thành các ô vuông. Một cách tô các ô vuông màu đen được gọi là “đẹp” nếu số lượng ô đen mỗi hàng và mỗi cột bất kì luôn là số chẵn; đồng thời, số các ô màu đen trên đường chéo có độ dài lớn hơn  bất kì là số lẻ (*đường chéo ở đây là dãy các ô liên tiếp nằm trên đường thẳng song song với một trong hai đường chéo của bảng ô vuông* *ban đầu; độ dài đường chéo là số lượng ô nằm trên đó*).  a) Chứng minh rằng tồn tại một cách tô “đẹp” khi .  b) Chứng minh rằng không tồn tại cách tô “đẹp” với mọi  là số chẵn. | |
| **a) 1,5 điểm**  Ta xét cách tô màu cho bảng ô vuông kích thước lẻ tùy ý. Tô màu đen tất cả các ô ở hàng trên cùng và tất cả các ô ở dàng dưới trừ cột ngoài cùng bên trái như sau. Khi đó,   * Ở hàng  và hàng  thì số ô được tô là  chẵn; các hàng còn lại có số ô được tô là * Ở cột 1 thì số ô được tô là  các cột còn lại có số ô được tô là * Trên mỗi đường chéo có độ dài lớn hơn 1 thì số ô được tô là  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   Như vậy, cách tô trên là đẹp và khi đó với  cũng thỏa mãn.  **b) 2,5 điểm**  Giả sử phản chứng rằng tồn tại cách tô màu đẹp cho bảng  khi  chẵn. Ta đánh dấu các ô theo thứ tự bởi các số  như hình minh họa bên dưới với    Kí hiệu  lần lượt là số ô được đánh dấu nằm trong các ô đánh số  Ta có các nhận xét sau:   * phải là số lẻ vì các ô được đánh dấu trên đường chéo là số lẻ và các ô được đánh dấu bởi số  và  sẽ phủ lên lẻ đường chéo. * là số chẵn vì số các ô được đánh ở các cột bất kì đều là số chẵn. * Tương tự,  cũng phải là chẵn.   Từ đó suy ra  cũng là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy nên điều giả sử là sai và không tồn tại cách đánh số đẹp trong trường hợp  chẵn. | 0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  0.5 |

---------HẾT--------

Người ra đề: Nguyễn Thị Bích Ngọc - Số điện thoại: 0904014676