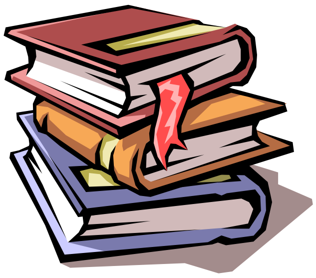
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HÌNH HỌC LỚP 9

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

Mục Lục

Trang

CHƯƠNG 1- HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Hệ thức về cạnh và đường cao

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Talet, về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau:

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có:

1) $a^2 = b^2 + c^2$.

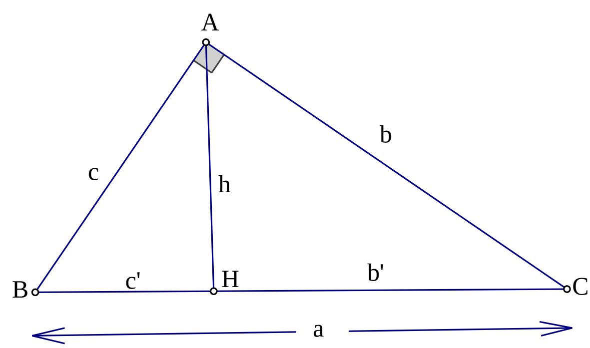
2) $b^2 = a.b';c^2 = a.c'$

3) $h^2 = b'.c'$

4) $a.h = b.c$.

5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

6) $\frac{b'}{a} = \frac{b^2}{a^2}$.



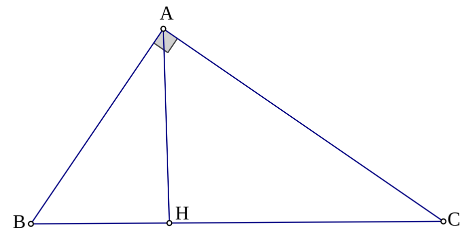
Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S = \frac{1}{2}ab$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AB + AC = 21cm$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.

Giải:



a). Theo giả thiết: $AB : AC = 3 : 4$,

suy ra $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{AB + AC}{3 + 4} = 3$.

Do đó $AB = 3.3 = 9\left(cm\right)$;

$AC = 3.4 = 12\left(cm\right)$.

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lý Pythagore ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, suy ra $BC = 15cm$.

b) Tam giác ABC vuông tại A, ta có $AH.BC = AB.AC$, suy ra

$AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{9.12}{15} = 7{,}2\left(cm\right)$.

$AH^2 = BH.HC$. Đặt $BH = x\left(0 < x < 9\right)$ thì $HC = 15 - x$, ta có:

$\left(7{,}2\right)^2 = x\left(15 - x\right) \Leftrightarrow x^2 - 15x + 51{,}84 = 0 \Leftrightarrow x\left(x - 5{,}4\right) = 9{,}6\left(x - 5{,}4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 5{,}4\right)\left(x - 9{,}6\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5{,}4$ hoặc $x = 9{,}6$ (loại)

Vậy $BH = 5{,}4cm$. Từ đó $HC = BC - BH = 9{,}6\left(cm\right)$.

Chú ý: Có thể tính BH như sau:

$AB^2 = BH.BC$ suy ra $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{9^2}{15} = 5{,}4\left(cm\right)$.

Ví dụ 2: Cho tam giác cân ABC có đáy $BC = 2a$, cạnh bên bằng $b\left(b > a\right)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Dựng $BK \perp AC$. Tính tỷ số $\frac{AK}{AC}$.

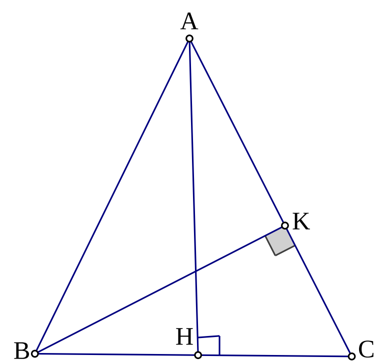
Giải:

a). Gọi H là trung điểm của BC. Theo định lý Pitago ta có:

$AH^2 = AC^2 - HC^2 = b^2 - a^2$

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - a^2}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{b^2 - a^2}$



b). Ta có $\frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}BK.AC = S_{ABC}$

Suy ra $BK = \frac{BC.AH}{AC} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - a^2}$. Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AKB ta có: $AK^2 = AB^2 - BK^2 = b^2 - \frac{4a^2}{b^2}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{\left(b^2 - 2a^2\right)^2}{b^2}$. Suy ra $AK = \frac{\left|b^2 - 2a^2\right|}{b}$ do đó $\frac{AK}{AC} = \frac{\left|b^2 - 2a^2\right|}{b^2}$.

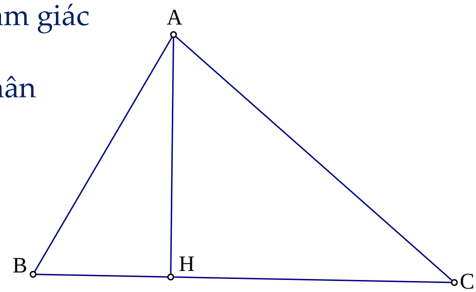
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với các đỉnh A, B, C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là: a, b, c.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo a

b) Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Giải:

a). Ta giả sử góc A là góc lớn nhất của tam giác $ABC \Rightarrow B, C$ là các góc nhọn. Suy ra chân đường cao hạ từ A lên BC là điểm H thuộc cạnh BC.



Ta có: $BC = BH + HC$. Áp dụng định lý Pi ta go cho các tam giác vuông AHB, AHC ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2, AC^2 = AH^2 + HC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có:

$$c^2 - b^2 = HB^2 - HC^2 = (HB + HC)(HB - HC) = a.(HB - HC)$$

$$\Rightarrow HB - HC = \frac{c^2 - b^2}{a} \text{ ta cũng có: } HB + HC = a \Rightarrow BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông

$$AHB \Rightarrow AH^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \left[\frac{(a + c)^2 - b^2}{2a}\right].\left[\frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}\right] = \frac{(a + b + c)(a + c - b)(b + a - c)(b + c - a)}{4a^2}$$

Đặt $2p = a + b + c$ thì

$$AH^2 = \frac{16p(p - a)(p - b)(p - c)}{4a^2} \Rightarrow AH = 2\frac{\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{a}.$$

Từ đó tính được $S = \frac{1}{2}BC.AH = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

b). Từ câu $a)$ ta có: $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\le\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}$. Suy ra $S\le\sqrt{p.\frac{p^3}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

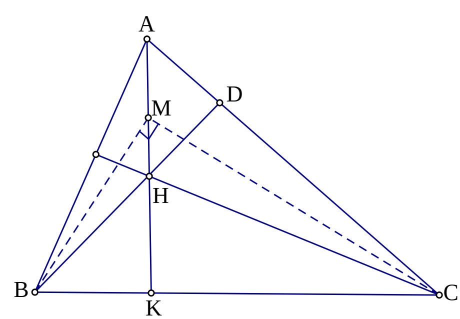
Hay $S\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{12\sqrt{3}}$. Mặt khác ta dễ chứng minh được:

$\left(a+b+c\right)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ suy ra $S\le\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{12\sqrt{3}}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$

Dấu bằng xảy ra hki và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC đường cao CK ; H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB}=90^0$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng $S=\sqrt{S_1.S_2}$.

Giải:



Tam giác AMB vuông tại M có

$MK\perp AB$ nên $MK^2=AK.BK$ (1).

$\Delta AHK\sim\Delta CBK$ vì có

$\widehat{AKH}=\widehat{CKB}=90^0$; $\widehat{KAH}=\widehat{KCB}$

(cùng phụ với $\widehat{ABC}$). Suy ra $\frac{AK}{CK}=\frac{HK}{BK}$, do đó $AK.KB=CK.KH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK^2=CK.HK$ nên $MK=\sqrt{CK.HK}$;

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}.AB.MK=\frac{1}{2}AB.\sqrt{CK.HK}=\sqrt{\frac{1}{2}AB.CK.\frac{1}{2}AB.HK}=\sqrt{S_1S_2}.$$

Vậy $S=\sqrt{S_1.S_2}$.

Ví dụ 5. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0, \widehat{B} = 60^0, CD = 30cm, CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.

Giải:

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = 60^0$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$), vì thế trong tam giác vuông ACD ta có $AC = 2AD$.

Theo định lý Pythagore thì: $AC^2 = AD^2 + DC^2$ hay $\left(2AD\right)^2 = AD^2 + 30^2$

Suy ra $3AD^2 = 900 \Leftrightarrow AD^2 = 300$ nên $AD = 10\sqrt{3}\left(cm\right)$.

Kẻ $CH \perp AB$. Tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật vì có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^0$, suy ra $AH = CD = 30cm; CH = AD = 10\sqrt{3}\left(cm\right)$.

Tam giác ACB vuông tại C, ta có: $CH^2 = HA.HB$, suy ra

$HB = \dfrac{CH^2}{HA} = \dfrac{\left(10\sqrt{3}\right)^2}{30} = \dfrac{300}{30} = 10\left(cm\right)$, do đó

$AB = AH + HB = 30 + 10 = 40\left(cm\right)$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CH\left(AB + CD\right)\frac{1}{2}.10\sqrt{3}.\left(40 + 30\right) = 350\sqrt{3}\left(cm^2\right).$$

Vậy diện tích hình thang $ABCD$ bằng $350\sqrt{3}cm^2$.

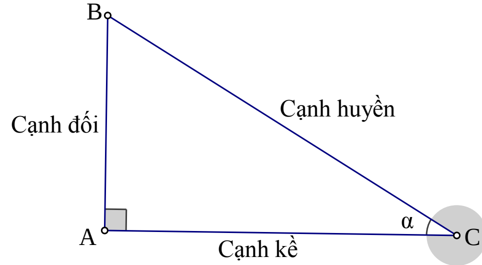
Tỉ số lượng giác của góc nhọn

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình) được định nghĩa như sau:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}; \cos\alpha = \frac{AC}{BC}; \tan\alpha = \frac{AB}{AC}; \cot\alpha = \frac{AC}{AB}$$

+ Nếu α là một góc nhọn thì



$0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1;$

$\tan\alpha > 0; \cot\alpha > 0$

2. Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^0$,

ta có: $\sin\alpha = \cos\beta; \cos\alpha = \sin\beta; \tan\alpha = \cot\beta; \cot\alpha = \tan\beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha = \sin\beta$ hoặc $\cos\alpha = \cos\beta$ thì $\alpha = \beta$.

3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; tg\alpha.\cot g\alpha = 1$.

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}; \sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

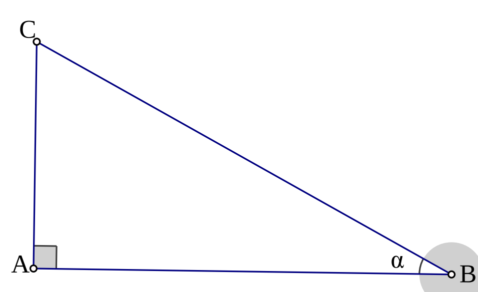
$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^0 = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 45^0 = \cot 45^0 = 1; \cot 30^0 = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.

Ví dụ 1. Biết $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

Giải:

Cách 1. Xét ΔABC vuông tại A.



Đặt $\widehat{B} = \alpha$. Ta có: $\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$

suy ra $\frac{AC}{5} = \frac{BC}{13} = k$, do đó

$AC = 5k, BC = 13k$. Tam giác ABC vuông tại A nên:

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = (13k)^2 - (5k)^2 = 144k^2$, suy ra $AB = 12k$.

Vậy $\cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$; $\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$; $\cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

Cách 2. Ta có $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ suy ra $\sin^2\alpha = \frac{25}{169}$, mà $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, do đó

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, suy ra $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

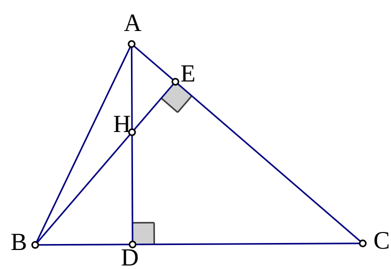
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{13}.\frac{13}{12} = \frac{5}{12}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{13}.\frac{13}{5} = \frac{12}{5}$.

Ở cách giải thứ nhất ta biểu thị độ dài các cạnh của tam giác ABC theo đại lượng k rồi sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$. Ở cách giải thứ hai, ta sử dụng giả thiết $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ để tính $\sin^2\alpha$ rồi tính $\cos\alpha$ từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Sau đó ta tính $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ qua $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $HD : HA = 1:2$. Chứng minh rằng $tgB.tgC = 3$.

Giải:

Ta có: $tgB = \frac{AD}{BD}; tgC = \frac{AD}{CD}$.



Suy ra $\tan B.\tan C = \frac{AD^2}{BD.CD}$ (1)

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$); $\widehat{HDB} = \widehat{ADC} = 90^0$.

Do đó $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ (g.g), suy ra $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, do đó $BD.DC = DH.AD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\tan B.\tan C = \frac{AD^2}{DH.AD} = \frac{AD}{DH}$ (3). Theo giả thiết $\frac{HD}{AH} = \frac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{HD}{AH+HD}=\dfrac{1}{2+1}$ hay $\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{1}{3}$, suy ra $AD=3HD$. Thay vào (3) ta được:

$\tan B.\tan C=\dfrac{3HD}{DH}=3$.

Ví dụ 3. Biết $\sin\alpha.\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$. Tính $\sin\alpha,\cos\alpha$.

Giải:

Biết $\sin\alpha.\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$. Để tính $\sin\alpha,\cos\alpha$ ta cần tính $\sin\alpha+\cos\alpha$ rồi giải phương trình với ẩn là $\sin\alpha$ hoặc $\cos\alpha$.

Ta có: $\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha=1+2.\dfrac{12}{25}=\dfrac{49}{25}$. Suy ra $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$ nên $\sin\alpha=\dfrac{7}{5}-\cos\alpha$. Từ đó ta có:

$\cos\alpha\left(\dfrac{7}{5}-\cos\alpha\right)=\dfrac{12}{25}\Leftrightarrow\dfrac{7}{5}\cos\alpha-\cos^2\alpha=\dfrac{12}{25}$

$\Leftrightarrow 25\cos^2\alpha-35\cos\alpha+12=0\Leftrightarrow 5\cos\alpha\left(5\cos\alpha-4\right)-3\left(5\cos\alpha-4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5\cos\alpha-4\right)\left(5\cos\alpha-3\right)=0$. Suy ra $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ hoặc $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

+ Nếu $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ thì $\sin\alpha=\dfrac{12}{25}:\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}$.

+ Nếu $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ thì $\sin\alpha=\dfrac{12}{25}:\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$.

Vậy $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ hoặc $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông.

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

a) Cạnh huyền nhân với $\sin$ góc đối hay nhân với $\cos in$ góc kề.

b) Cạnh góc vuông kia nhân với $\tan$ của góc đối hay nhân với $\cot$ của góc kề.
$b = a.\sin B = a\cos C; c = a.\sin C = a.\cos B; b = c.tgB = c.\cot gC;$
$c = b.tgC = b.\cot gC$

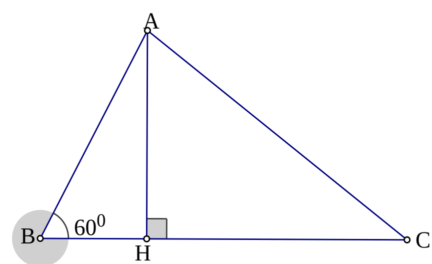
2. Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 16, AC = 14$ và $\widehat{B} = 60^0$.

a) Tính độ dài cạnh BC

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Giải:



a). Kẻ đường cao AH.

Xét tam giác vuông ABH, ta có:

$BH = AB.\cos B = AB.\cos 60^0 = 16.\dfrac{1}{2} = 8$

$AH = AB.\sin B = AB.\sin 60^0 = 16.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHC ta có:

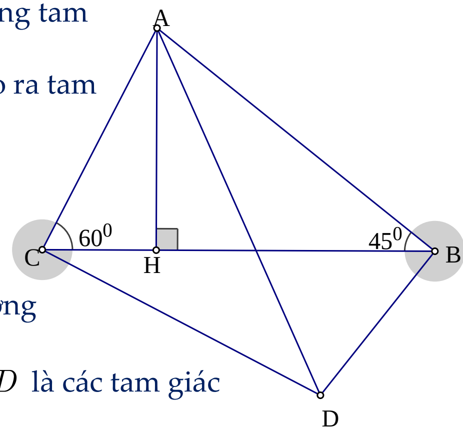
$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 196 - 192 = 4$. Suy ra $HC = 2$. Vậy $BC = CH + HB = 2 + 8 = 10$.

b) Cách 1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.10.8\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ (đvdt)

Cách 2. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.BA.\sin B = \dfrac{1}{2}.10.16.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$ (đvdt)

Ví dụ 2: Tính diện tích tam giác ABC biết $\widehat{ABC}=45^0, \widehat{ACB}=60^0$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là R.

Giải:



Giả thiết có các góc có số đo đặc biệt , nhưng tam giác ABC là tam giác thường nên ta sẽ tạo ra tam giác vuông bằng cách. Dựng các đường thẳng qua C, B lần lượt vuông góc với AC, AB. Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng trên. Khi đó tam giác ABD và ACD là các tam giác vuông và 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn đường kính $AD = 2R$.

Ta có: $AB = AD.\sin 60^0 = AD.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Kẻ đường cao AH suy ra $H \in BC$ .Tức là: $BC = BH + CH$. Tam giác AHB vuông góc tại H nên

$AH = BH = AB.\sin 45^0 = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = AD\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$. Mặt khác tam giác

ACH vuông tại H nên $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow CH = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \dfrac{R\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}$.

Từ đó tính được diện tích $S = \dfrac{R^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với các đỉnh A,B,C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là: a,b,c. Chứng minh rằng:

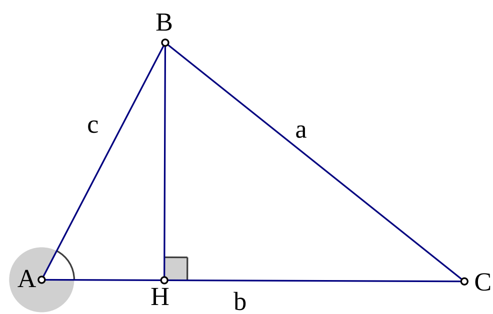
a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

b) Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Chứng minh:

$$AD = \frac{2bc.\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c}$$

Giải:

a). Dựng đường cao BH của tam giác ABC ta có:



<u>Cách 1:</u> Giả sử H thuộc cạnh AC.

Ta có: $AC = AH + HC$.

Áp dụng định lý Pi ta go cho các tam giác vuông AHB, BHC ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2, BC^2 = BH^2 + HC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có:

$$c^2 - a^2 = HA^2 - HC^2 = (HA + HC)(HA - HC) = b.(HA - HC)$$

$\Rightarrow HA - HC = \frac{c^2 - a^2}{b}$ ta cũng có: $HA + HC = b \Rightarrow AH = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$. Xét tam giác vuông AHB ta có: $\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Cách 2: Xét tam giác vuông CHB ta có:

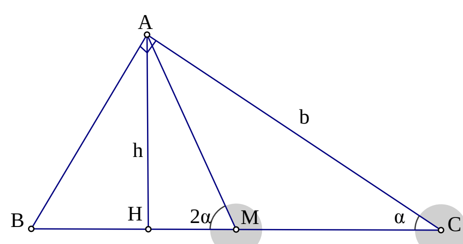
$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + \left(AC - AH\right)^2 = BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.AH$ Ta có: $AH = CB.\cos A$ suy ra $BC^2 = BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.CB.\cos A$ hay $\Leftrightarrow BC^2 = BA^2 + +AC^2 - 2AC.CB.\cos A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

b). Để chứng minh bài toán ta cần kết quả sau:

+ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

+ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

*) Thật vậy xét tam giác vuông $ABC, \widehat{A} = 90^0$, gọi M là trung điểm của BC, dựng đường cao AH. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha \Rightarrow \widehat{AMB} = 2\alpha$.



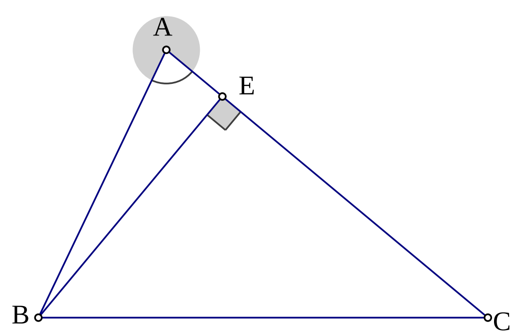
Ta có $\sin\alpha = \sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{h}{b}$

$\cos\alpha = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$

$\sin 2\alpha = \sin\widehat{AMH} = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2h}{a}$.

Từ đó ta suy ra: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

*) Xét tam giác ABC. Dựng đường cao BE ta có:



$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BE.AC = \dfrac{1}{2}BE.b$ (1)

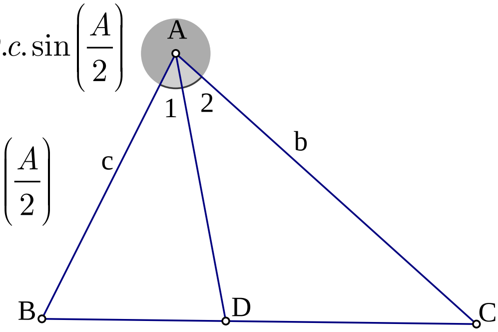
Mặt khác trong tam giác vuông AEB

ta có: $\sin A = \dfrac{BE}{AB} \Rightarrow BE = c.\sin A$

thay vào (1)

Ta có: $S=\frac{1}{2}ab\sin C$

Trở lại bài toán:



Ta có $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD.AB\sin A_1=\frac{1}{2}AD.c.\sin\left(\frac{A}{2}\right)$

$S_{ACD}=\frac{1}{2}AD.AC\sin A_2=\frac{1}{2}AD.b.\sin\left(\frac{A}{2}\right)$

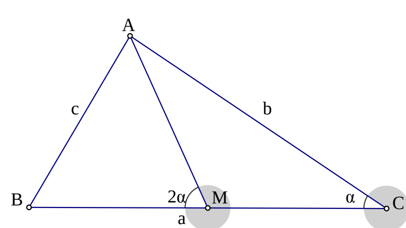
Suy ra $S_{ABC}=S_{ACD}+S_{ABD}=$

$=\frac{1}{2}AD\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[c+b\right]$. Mặt khác $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow$

$$AD\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[c+b\right]=bc\sin A\Leftrightarrow AD=\frac{bc\sin A}{\left(b+c\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{c+b}$$

Chú ý rằng: Ta chứng minh được kết quả sau: $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

Thật vậy xét tam giác vuông $ABC,\widehat{A}=90^0$, gọi M là trung điểm của BC, dựng đường cao AH. Đặt $\widehat{ACB}=\alpha\Rightarrow\widehat{AMB}=2\alpha$.



Ta có : $\cos\alpha=\cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$

$\sin\alpha=\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$,

$\cos 2\alpha=\cos\widehat{AMH}=\frac{AM^2+MB^2-AB^2}{2AM.MB}$

$= \dfrac{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-c^2}{2\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}} = \dfrac{a^2-2c^2}{a^2} = 1-2\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = 1-2.\dfrac{a^2-b^2}{a^2} = 2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-1$. Từ đó suy ra $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Áp dụng $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow a^2 = b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right)$.

$\Rightarrow 2\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1 \Leftrightarrow \cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{\left(b+c\right)^2-a^2}{4bc}$. Thay vào công thức đường phân giác ta có:

$AD = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{c+b} = \dfrac{2bc\sqrt{\dfrac{\left(b+c\right)^2-a^2}{4bc}}}{b+c} = \dfrac{\sqrt{bc}\sqrt{\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)}}{b+c}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\sqrt{bc} \le \dfrac{b+c}{2} \Rightarrow AD \le \dfrac{\sqrt{\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)}}{2} = \sqrt{p(p-a)}$ với $2p = a+b+c$.

<u>Áp dụng công thức</u>: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$. Ta cũng chứng minh được hệ thức rất quan trọng trong hình học phẳng (Định lý Stewart) đó là:

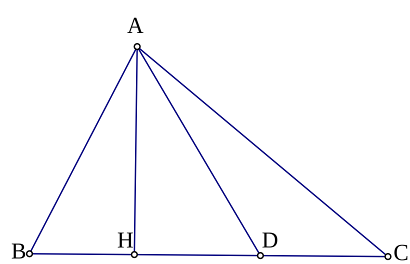
''Cho điểm D nằm trên cạnh BC của tam giác ABC khi đó ta có:
$AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right)$''

+ Thật vậy :Ta giả kẻ $AH \perp BC$

không mất tính tổng quát,

ta giả sử D nằm trong đoạn

HC. Khi đó ta có:



$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD.BD.\cos\widehat{ADB} = AD^2 + BD^2 - 2DB.DH$ (1)

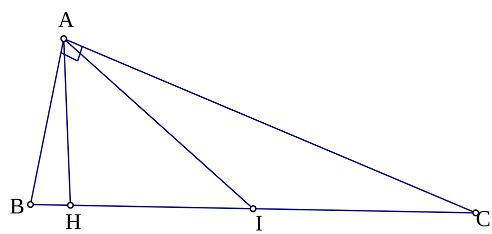
Tương tự ta có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2DH.DC$ (2). Nhân đẳng thức (1) với DC đẳng thức (2) với BD rồi cộng lại theo vế ta có:

$$AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right)$$

Ví dụ 3. Không dùng máy tính và bảng số hãy chứng minh rằng

$\sin 75^0 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Giải:



Vẽ tam giác ABC vuông tại A

với $BC = 2a$ (a là một độ dài tùy ý)

, $\widehat{C} = 15^0$, suy ra $\widehat{B} = 75^0$.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có

$IA = IB = IC = a$. Vì $\widehat{AIB}$ là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác cân IAC nên

$\widehat{AIB} = 2\widehat{C} = 30^0$. Kẻ $AH \perp BC$ thì $IH = AI.\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AH = AI.\cos 30^0 = \dfrac{a}{2}$; $CH = CI + IH = a + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$.

Tam giác AHC vuông tại H, theo định lý Pythagore, ta có:

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 = \frac{a^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2\left(4+4\sqrt{3}+3+1\right)}{4}$$

$$= \frac{4a^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4} = a^2\left(2+\sqrt{3}\right)$$, suy ra $AC = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$\sin 75^0 = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2a} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $\sin 75^0 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Chủ đề 1: CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

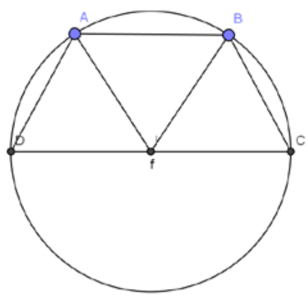
Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

I. Phương pháp 1 chứng minh: Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.

CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB.

Câu 1: Cho hình thang $ABCD$ $(AB // CD,\ AB < CD)$ có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0$, $CD = 2AD$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



Hướng dẫn giải

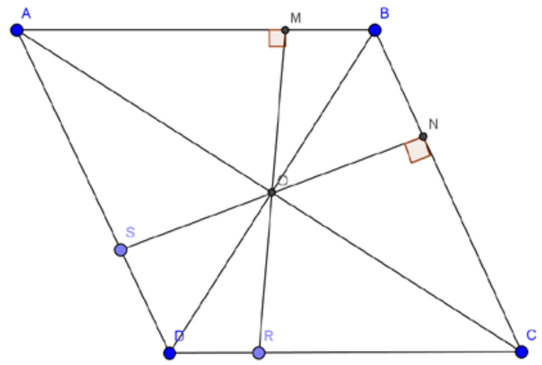
Gọi I là trung điểm CD, ta có $\begin{cases} IC = AB \\ IC // AB \end{cases} \Rightarrow ICBA$ là hình hành $\Rightarrow BC = AI$ (1)

Tương tự $AD = BI$ (2)

$ABCD$ là hình thang có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0$ nên $ABCD$ là hình thang cân(3); mà

Từ (1), (2), (3) ta có hai tam giác $ICB; IAD$ đều hay $IA = IB = IC = ID$ hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Câu 2: Cho hình thoi $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh bốn điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

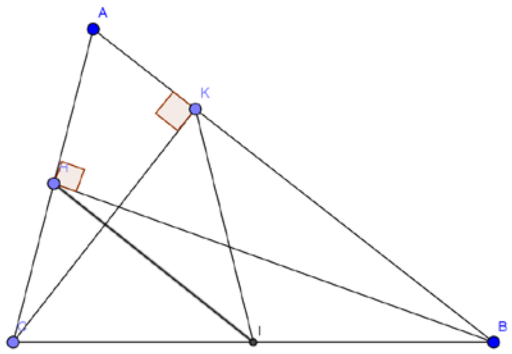


Hướng dẫn giải

Do $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của AC, BD; AC, BD là phân giác góc A, B, C, D nên $\Delta MAO = \Delta SAO = \Delta NCO = \Delta PDO \Rightarrow OM = ON = OP = OS$ hay bốn điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

Câu 3: Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

Chứng minh B, K, H, C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.



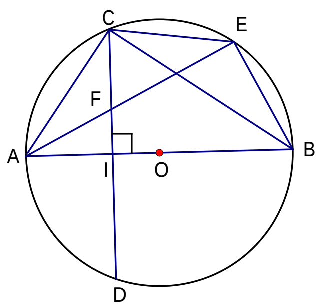
Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm CB, do $\Delta CHB; \Delta CKB$ vuông tại H, K nên $IC = IB = IK = IH$ hay B, K, H, C cùng nằm trên một đường tròn tâm I.

Mức độ 2: TH.

Câu 4: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Tứ giác $BEFI$ có: $\widehat{BIF} = 90^0$ (gt)

$\widehat{BEF} = \widehat{BEA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

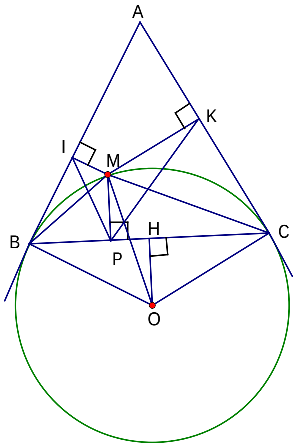
Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF

Câu 5: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$, $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ $(I \in AB, K \in AC)$

a) Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ $(P \in BC)$. Chứng minh: $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp

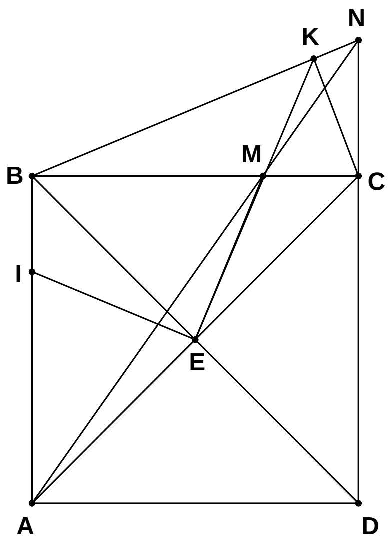
Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng min $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Tứ giác $BIEM$: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt);hay tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow$ ΔEBI $=\Delta ECM$ (g-c-g)$\Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$

Vì $CN // BA$ nên theo định lí Thalet, ta có: $\dfrac{MA}{MN} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{IA}{IB}$. Suy ra IM song song với BN

(định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

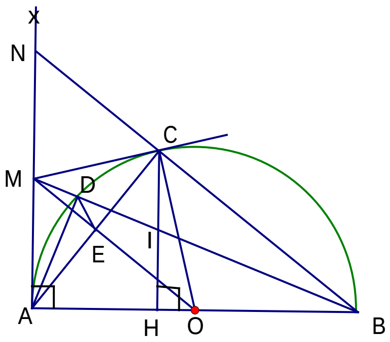
Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Mức độ 3: VDT.

Câu 7: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

Chứng minh: $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Vì MA, MC là tiếp tuyến nên: $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^0 \Rightarrow AMCO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^0$ (1)

Lại có: $OA = OC = R$; $MA = MC$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra OM là đường trung trực của AC

$\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^0$ (2).

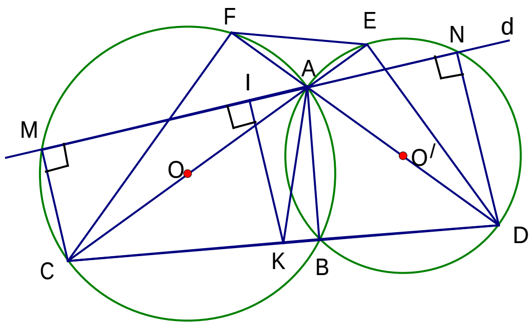
Từ (1) và (2) suy ra $AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MA.

Câu 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O').

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và $(O') \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác $CDEF$ có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

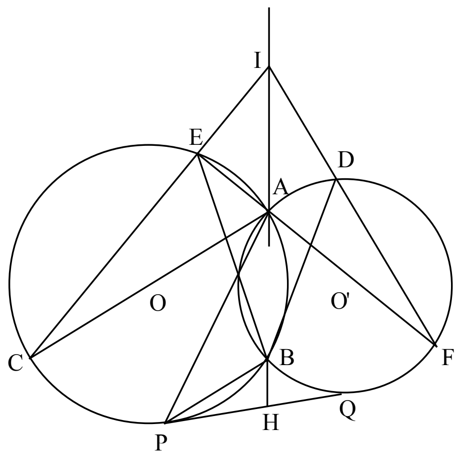
$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$ suy ra $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 9: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt. Đường thẳng OA cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai C và D. Đường thẳng $O'A$ cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai E E, F .

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.

2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên B, C, F thẳng hàng. AB, CE và DF là 3 đường cao của tam giác ACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^0$ suy ra $BEIF$ nội tiếp đường tròn.

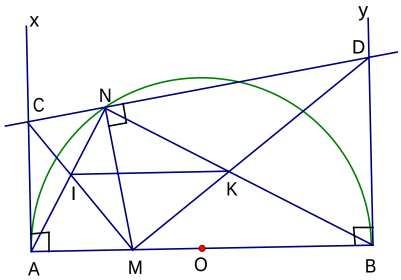
Mức độ 4: VDC.

Câu 10: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua V và vuông góc với NM cắt Ax, By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔCMD từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Ta có tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{\mathrm{MNC}}=90^0$ (gt) $\widehat{\mathrm{MAC}}=90^0$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow$ $ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính. MD

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{\mathrm{ABN}}=\widehat{\mathrm{CDM}}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\widehat{\mathrm{BAN}}=\widehat{\mathrm{DCM}}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) nên $\Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)

c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \widehat{\mathrm{CMD}}=\widehat{\mathrm{ANB}}=90^{\circ}$ (do $\widehat{\mathrm{ANB}}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{\mathrm{IMK}}=\widehat{\mathrm{INK}}=90^0 \Rightarrow$ $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Mức độ 1: NB

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB

Bài 2. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

HD Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AB

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

Chứng minh: $AEHF$ và $BCEF$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{\mathrm{AEH}}=\widehat{\mathrm{AFH}}=90^0$ (gt). Suy ra $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

- Tứ giác $BCEF$ có: $\widehat{\mathrm{BEC}}=\widehat{\mathrm{BFC}}=90^0$ (gt). Suy ra $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

II. ***Phương pháp 2 chứng minh*** **"**Chứng minh tứ giác có hai góc đối diện bù nhau (tổng hai góc đối diện bằng 180^0).

CÁC VÍ DỤ.

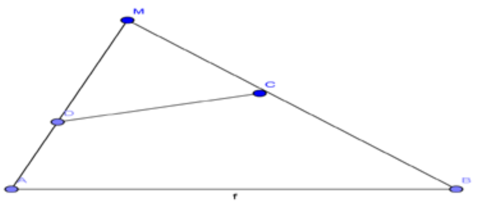
Mức độ 1: NB.

Câu 11: Hình chữ nhật; Hình thang cân; Hình bình hành. Hình nào nội tiếp được trong đường tròn? Chứng minh.

Hướng dẫn giải

Ta có hình chữ nhật và hình thang cân đều có tổng hai góc đối diện bù nhau nên chúng nội tiếp trong một đường tròn.

Câu 12: Cho tứ giác $ABCD$ sao cho: AD cắt BC tại M và $MA.MD = MB.MC$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.



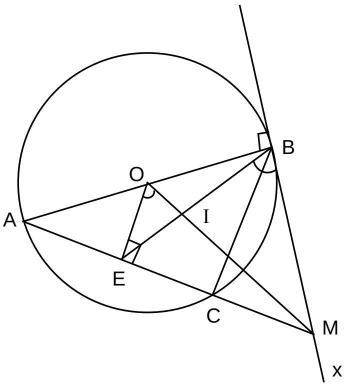
Hướng dẫn giải

Xét hai tam giác MAB, MCD

Có $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ và $MA.MD = MB.MC \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MD}$ hay $\Delta MAB \sim \Delta MCD$ hay $\widehat{MCD} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^o$ hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.

Câu 13: Cho đường tròn $(O;R)$,đường kính AB. Dây $BC = R$. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M. Gọi E là trung điểm của AC.

Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp đường tròn.



Hướng dẫn giải

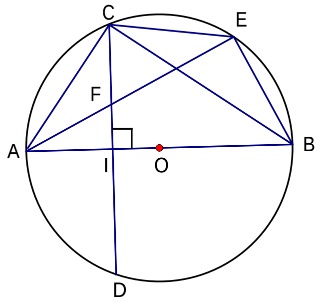
Ta có E là trung điểm của $AC \Rightarrow OE \perp AC$

Mà $Bx \perp AB \Rightarrow \widehat{\text{ABx}} = 90^o$ nên tứ giác $OBME$ nội tiếp.

Mức độ 2: TH.

Câu 14: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải

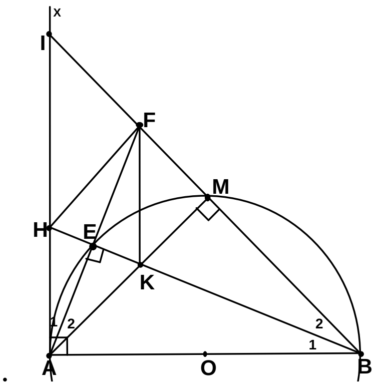


Tứ giác $BEFI$ có: $\widehat{\mathrm{BIF}} = 90^0$ (gt) $\widehat{\mathrm{BEF}} = \widehat{\mathrm{BEA}} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF.

Câu 15: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K. Chứng minh rằng: $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\widehat{AMB} = 90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KMF} = 90^o$ (vì là hai góc kề bù).

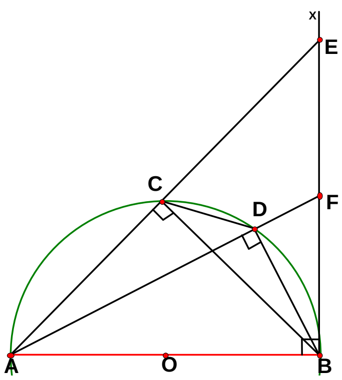
$\widehat{AEB} = 90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KEF} = 90^o$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{KEF} + \widehat{KMF} = 180^o$ do đó $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 16: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB,. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh: $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$.

2. Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.



Hướng dẫn giải:

1) ΔADB có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°)(1)

ΔABF có $\widehat{ABF}=90^o$ (BF là tiếp tuyến).$\Rightarrow \widehat{AFB}+\widehat{BAF}=90^o$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^o) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{DFB}$

2) Tứ giác $ACDB$ nội tiếp $(O)\Rightarrow \widehat{ABD}+\widehat{ACD}=180^o$.

$\Rightarrow \widehat{ECD}+\widehat{ACD}=180^o \angle$ (Vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DBA}$

Theo trên $\widehat{ABD}=\widehat{DFB}, \widehat{ECD}=\widehat{DBA}\Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DFB}$. Mà $\widehat{EFD}+\widehat{DFB}=180^o$ (Vì là hai góc kề bù) nên $\Rightarrow \widehat{ECD}+\widehat{AEFD}=180^o$, do đó tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Mức độ 3: VDT.

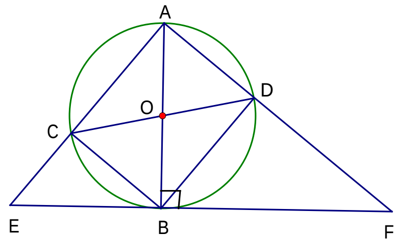
Câu 17: Cho đường tròn $(O;R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\Delta ACD\sim\Delta CBE$

c) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $ACBD$ có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật suy ra $\widehat{CAD}=\widehat{BCE}=90^0$ (1).

Lại có $\widehat{CBE}=\frac{1}{2}$sđ$\overset\frown{BC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); $\widehat{ACD}=\frac{1}{2}$sđ$\overset\frown{AD}$ (góc nội tiếp), mà $\overset\frown{BC}=\overset\frown{AD}$ (do $BC=AD$) $\Rightarrow \widehat{CBE}=\widehat{ACD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ACD\sim\Delta CBE$.

c) Vì $ACBD$ là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: $\widehat{CBE}=\widehat{DFE}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{ACD}=\widehat{DFE}$ do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Câu 18: Cho nửa đường tròn đường kính $BC=2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH\perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O_1; O_2 cắt AB và CA thứ tự tại D và E.

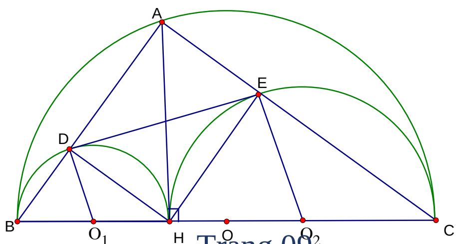
a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R=25$ và $BH=10$.

b) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\widehat{BAC}=90^o$ (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH}=\widehat{CEH}=90^o$



Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^o$ hay $ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE = AH$ mà $AH^2 = BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay $AH^2 = 10.40 = 20^2\left(BH = 10; CH = 2.25 - 10 = 40\right) \Rightarrow DE = 20$

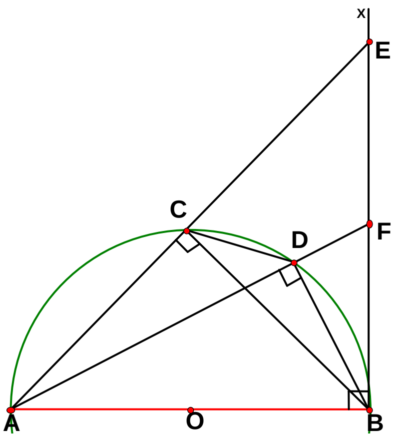
b) Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì $ADHE$ là hình chữ nhật) => $\widehat{C} = \widehat{ADE}$ do $\widehat{C} + \widehat{BDE} = 180^o$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Câu 19: Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB. Các tia AC, AD cắt Bx lần lượt ở E và F (F nằm giữa B và E).

Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp

Hướng dẫn giải



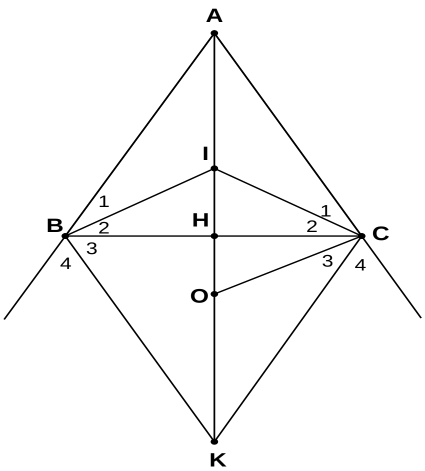
thật vậy. $\widehat{ABD} = \widehat{BFD}$ (1) (cùng phụ với $\widehat{DBF}$)

Mặt khác A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{ECD} = \widehat{ABD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\widehat{ECD} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{EFD} = 180^o$ hay $CEFD$ là tứ giác nội tiếp

Mức độ 4: VDC.

Câu 20: Cho ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK. Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O



Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{B_3} = \widehat{B_4}$ Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{B_4} = 180^0$ $\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 90^0$

Tương tự $\widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 90^0$

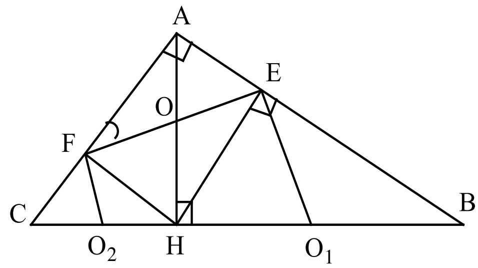
Xét tứ giác $BICK$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow$ bốn điểm B, I, C, K thuộc đường tròn tâm O đường kính IK.

Câu 21: Cho tam giác ΔABC vuông ở A $(AB > AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh:

1) Tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật.

2) Tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết suy ra

$\widehat{CFH} = 90^0$, $\widehat{HEB} = 90^0$. (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Trong tứ giác $AFHE$ có: $\hat{A} = \hat{F} = \hat{E} = 90^o \Rightarrow$ AFHE là hình chữ nhật

2) Vì $AFHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $AFHE$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AE}$) (1)

Ta lại có $\widehat{AHE} = \widehat{ABH}$ (góc có cạnh tương ứng $\perp$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABH}$ mà $\widehat{CFE} + \widehat{AFE} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CFE} + \widehat{ABH} = 180^0$. Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

Câu 22: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D

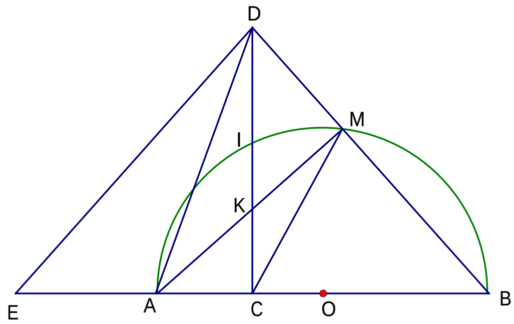
Chứng minh:

1) $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBC$

3) $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



1) Ta có: $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMD}=90^0$. Tứ giác $ACMD$ có $\widehat{AMD}=\widehat{ACD}=90^0$, suy ra $ACMD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD.

2) ΔABD và ΔMBC có: $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAD}=\widehat{BMC}$ (do $ACMD$ là tứ giác nội tiếp).
Suy ra: $\Delta ABD \sim \Delta MBC$ (g – g)

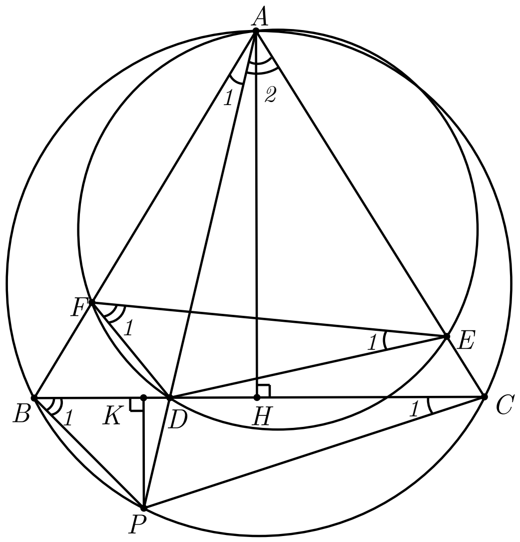
3) Lấy E đối xứng với B qua C thì E cố định và $\widehat{EDC}=\widehat{BDC}$, lại có: $\widehat{BDC}=\widehat{CAK}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$), suy ra: $\widehat{EDC}=\widehat{CAK}$. Do đó $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

III. Phương pháp 3 chứng minh: **“**Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng tạo bởi hai điểm còn lại hai góc bằng nhau”.

CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB.

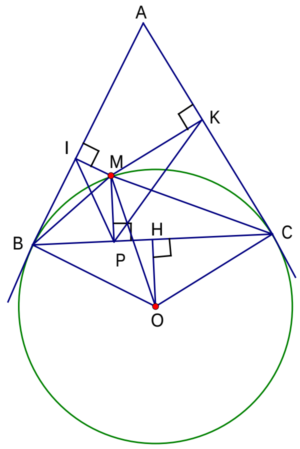
Câu 23: Cho tam giác ABC, lấy điểm D thay đổi nằm trên cạnh BC (D không trùng với B và C). Trên tia AD lấy điểm P sao cho D nằm giữa A và P đồng thời $DA.DP = DB.DC$. Đường tròn (T) đi qua hai điểm A, D lần lượt cắt cạnh AB, AC tại F và E. Chứng minh rằng: Tứ giác $ABPC$ nội tiếp



Hướng dẫn giải:

Ta có $DA.DP = DB.DC \Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DC}{DP}$ mà $\widehat{ADB}=\widehat{CDP}$ nên hai tam giác ADB, CDP đồng dạng. Suy ra, $\widehat{DAB}=\widehat{DCP} \Rightarrow$ Tứ giác $ABPC$ nội tiếp.

Câu 24: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$). Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

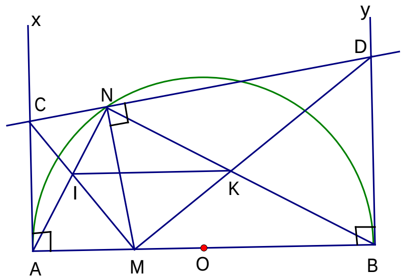


Hướng dẫn giải

Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM.

Câu 25: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By thứ tự tại C và D. Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC} = 90^o$ (gt) $\widehat{MAC} = 90^o$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD.

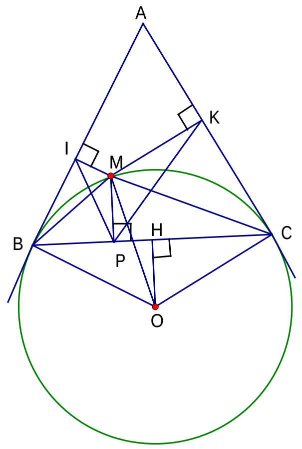
Mức độ 2: TH.

Câu 26: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$)

a) Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ $(P \in BC)$. Chứng minh: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM .

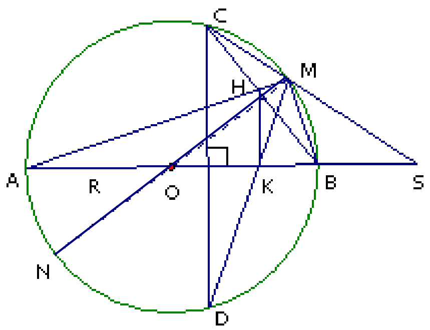
b) Tứ giác $CPMK$ có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó $CPMK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MCK}$ (1).

Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$ (3)

Chứng minh tương tự câu b ta có $BPMI$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 27: Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB (CD không đi qua tâm O). Trên tia đối của tia BA lấy điểm S; SC cắt $(O;R)$ tại điểm thứ hai là M . Gọi H là giao điểm của MA và BC; K là giao điểm của MD và AB. Chứng minh $BMHK$ là tứ giác nội tiếp.



Hướng dẫn giải:

Vì $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.

Suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{MKB}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}(\text{sd}\overset{\frown}{AD} + \text{sd}\overset{\frown}{MB})$ $\Rightarrow$ tứ giác $BMHK$ nội tiếp được đường tròn.

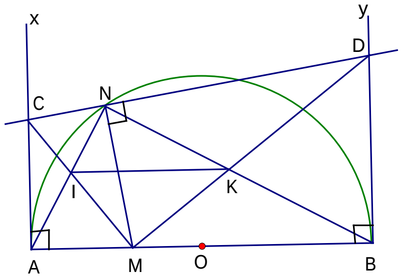
Câu 28: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta CMD$.

c) Gọi I là giao điểm của AN và CM, K là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC}=90^o$ (gt) $\widehat{MAC}=90^o$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow$ $ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD.

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{ABN}=\widehat{CDM}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\widehat{BAN}=\widehat{DCM}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) $\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)

c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \widehat{CMD}=\widehat{ANB}=90^o$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Suy ra $\widehat{IMK}=\widehat{INK}=90^o \Rightarrow$ $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

Mức độ 3: VDT.

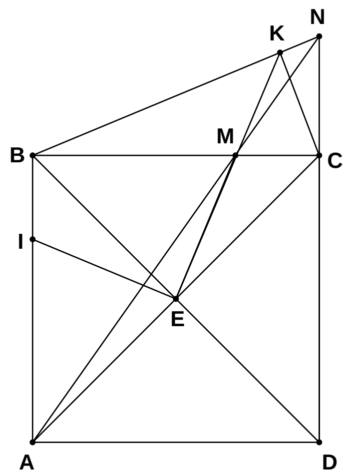
Câu 29: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM}=90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng min $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Tứ giác $BIEM$: $\widehat{IBM}=\widehat{IEM}=90^0$ (gt);hay tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow$ $\Delta EBI = \Delta ECM$ (g-c-g) $\Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$

Vì $CN // BA$ nên theo định lí Thalet, ta có: $\dfrac{MA}{MN} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{IA}{IB}$. Suy ra $IM // BN$ (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

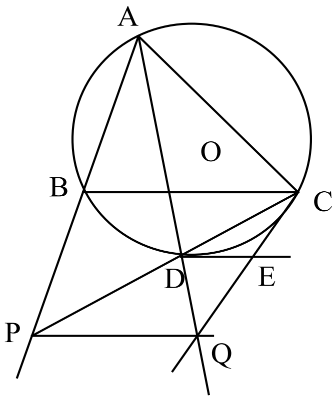
Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 30: Cho đường tròn (O) với dây BC cố định và một điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AC > AB$ và $AC > BC$. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại D và C cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB với CD; AD với CE.

1) Chứng minh rằng: $DE // BC$

2) Chứng minh tứ giác $PACQ$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



1) $\widehat{CDE} = \dfrac{1}{2} Sđ\,\overparen{DC} = \dfrac{1}{2} Sđ\,\overparen{BD} = \widehat{BCD}$ $\Rightarrow DE // BC$

2) $\widehat{APC} = \dfrac{1}{2} sđ(\overparen{AC} - \overparen{DC}) = \widehat{AQC}$

$\Rightarrow$ $PACQ$ nội tiếp đường tròn (vì $\widehat{APC} = \widehat{AQC}$)

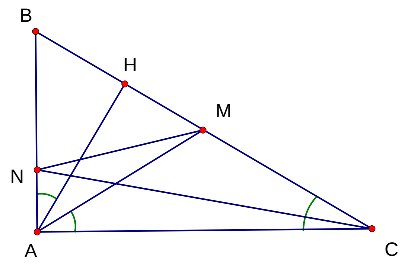
.

Câu 31: Cho tam giác ABC có $\hat{C} < \hat{B} < 90^0$, đường cao AH và trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 90^0$ thì $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$.

b) Nếu $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$ thì tam giác ABC có vuông không, tại sao?

Hướng dẫn giải



Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$ (Tam giác MAC cân tại M theo tính chất trung tuyến trong tam giác vuông)

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$

b) Giả sử tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

Kẻ đường cao CN của tam giác ABC

Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{BAH}$ (giả thiết)

$\widehat{BAH} = \widehat{BCN}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\widehat{MCN} = \widehat{MNC}$ (Tam giác MNC cân tại N)

Suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$. Do đó $ACMN$ là tứ giác nội tiếp mà

$\widehat{ANC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^0 \Rightarrow H \equiv M$

Suy ra tam giác ABC cân (mâu thuẫn giả thiết)

Vậy khi $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$ thì tam giác ABC là tam giác vuông

Mức độ 4: VDC.

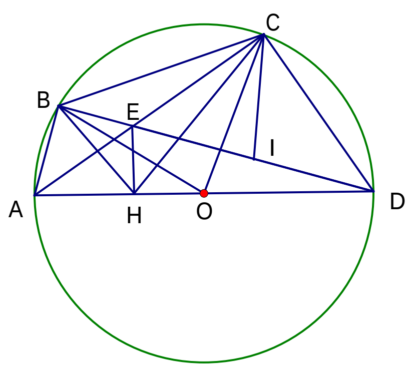
Câu 32: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

1) Các tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

2) E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

3) Năm điểm $B,\ C,\ I,\ O,\ H$ cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



1) Tứ giác $ABEH$ có: $\widehat{B} = 90^o$ (góc nội tiếp trong nửa đường tròn); $\widehat{H} = 90^o$ (giả thiết) nên tứ giác $ABEH$ nội tiếp được.

Tương tự, tứ giác $DCEH$ có $\widehat{C} = \widehat{H} = 90^o$, nên nội tiếp được.

2) Trong tứ giác nội tiếp $ABEH$, ta có: $\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung $\overset\frown{EH}$)

Trong (O) ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung $\overset\frown{CD}$).

Suy ra: $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$, nên BE là tia phân giác của góc $\widehat{HBC}$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ECH} = \widehat{BDA} = \widehat{BCE}$, nên CE là tia phân giác của góc $\widehat{BCH}$.
Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

3) Ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ECD, nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset\frown{EC}$). Mà $\widehat{EDC} = \widehat{EHC}$, suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$.

+ Trong (O), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset\frown{BC}$).

Hay năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

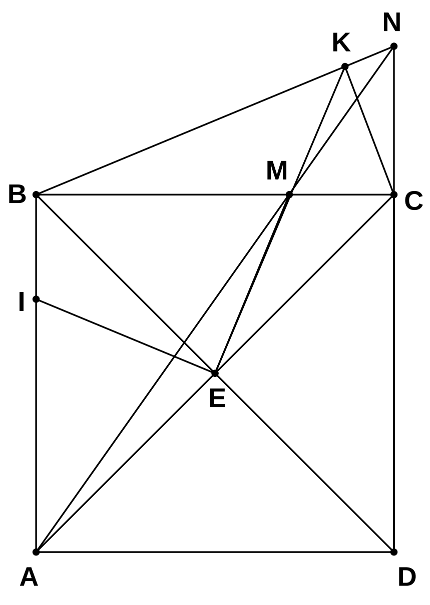
Câu 33: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng minh $BKCE$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra : $CK \perp BN$.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $BIEM$ có: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt); suy ra tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có: $\widehat{IBE} = \widehat{MCE} = 45^0$, $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow \Delta EBI = \Delta ECM\left(g.c.g\right) \Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$. Vì $CN//BA$ nên theo định lí Thalet, ta có:

$\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{IA}{IB}$. Suy ra $MI//BN$ (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

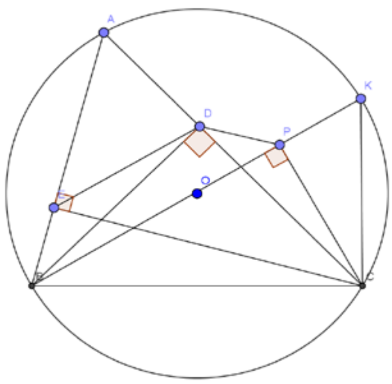
Suy ra: $\widehat{BKC} + \widehat{BEC} = 180^0$ mà $\widehat{BEC} = 90^0$; suy ra $\widehat{BKC} = 90^0$; hay $CK \perp BN$.

Câu 34: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), đường cao BD, CE cắt nhau tại H $\left(D \in AC; E \in AB\right)$. Kẽ đường kính BK, Kẽ $CP \perp BK$ $\left(P \in BK\right)$

a) Chứng minh rằng $BECD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $EDPC$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra $ED = CP$

(trích HK2-Sở bắc ninh 2016-2017)



Hướng dẫn giải

Do E, D, P nhìn BC dưới một góc vuông nên B, E, D, P, C nằm trên một đường tròn đường kính BC.

Nên $BECD$, $EDPC$ là tứ giác nội tiếp.

Chủ đề 2: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

1. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

a) Khái niệm: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ khi $\begin{cases} \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'; \angle C = \angle C' \\ AB = A'B'; BC = B'C'; AC = A'C' \end{cases}$

b) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giỏc: c.c.c; c.g.c; g.c.g.

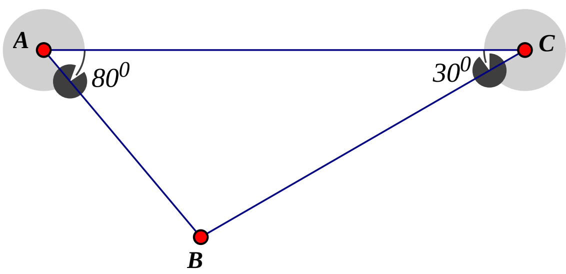
c) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông: hai cạnh góc vuông; cạnh huyền và một cạnh góc vuông; cạnh huyền và một gúc nhọn.

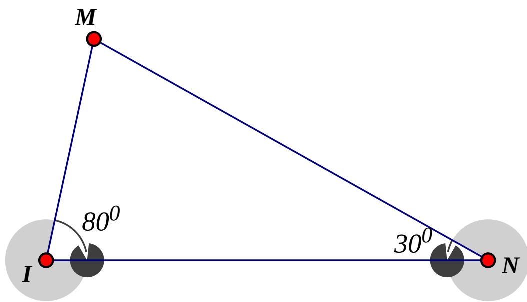
d) Hệ quả: Hai tam giác bằng nhau thì các đường cao; các đường phân giác; các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.

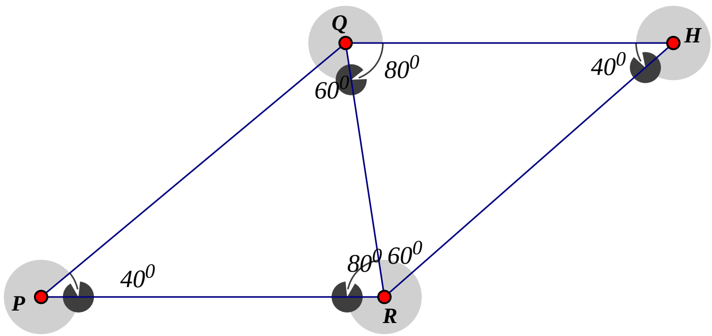
2. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB

Câu 1: Trong các hình sau các tam giác nào bằng nhau (Các cạnh bằng nhau được đánh dấu bởi những kí hiệu giống nhau). Kể tên các đỉnh tương ứng của các tam giác bằng nhau đó. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của các tam giác đó.







Hướng dẫn giải.

- Xem hình a) ta có: $\widehat{A} = \widehat{I} = 80^0, \widehat{C} = \widehat{N} = 30^0$?

$\widehat{B} = \widehat{M} = 180^0 - \left(80^0 + 30^0\right) = 70^0$.

Và $AB = MI, AC = IN, BC = MN$ nên $\Delta ABC = \Delta IMN$

- Xem hình b) ta có: $\widehat{Q_2} = \widehat{R_2} = 80^0$ (ở vị trí so le trong) nên $QH // RP$. Nên $\widehat{R_1} = \widehat{Q_1} = 60^0$ (so le trong). $\widehat{P} = \widehat{H} = 40^0$ và $QH = RP, HR = PQ$, QR chung nên $\Delta HQR = \Delta PRQ$

Câu 2: Cho ΔABC=ΔHIK

a) Tìm cạnh tương ứng với cạnh BC. Tìm góc tương ứng với góc H

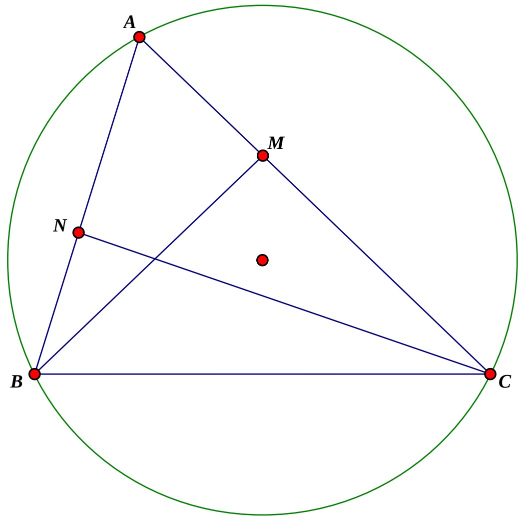
b) Tìm các cạnh bằng nhau, tìm các góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải

- Ta có $\Delta ABC = \Delta HIK$, nên cạnh tương ứng với BC là cạnh IK .Góc tương ứng với góc H là góc A.
- $\Delta ABC = \Delta HIK$. Suy ra $AB = HI, AC = HK, BC = IK$. $\widehat{A} = \widehat{H}; \widehat{B} = \widehat{I}; \widehat{C} = \widehat{K}$

Câu 3: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh AB lấy điểm N (N khác A và B), trên cạnh AC lấy điểm M sao cho BN = AM. Gọi P là giao điểm của BM và CN. Chứng minh ΔBNC= ΔAMB.

Hướng dẫn giải



Gợi ý:ΔBNC và ΔAMB có: BN=AM (gt)
GócNBC= gócMAB
BC=AB (vì ΔABC là tam giác đều) $\Rightarrow$ ΔBNC= ΔAMB.

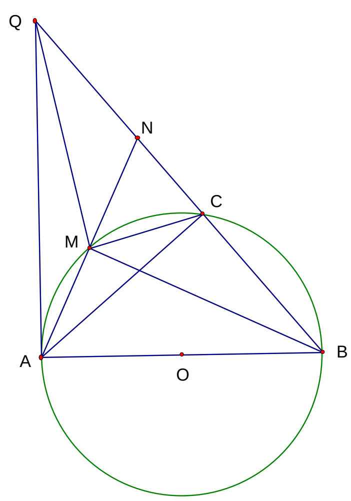
Mức độ 2: TH

Câu 4: Cho đường tròn (O) đồng kính AB = 2R và C là một điểm thuộc đường tròn $(C \neq A\,;\, C \neq B\,)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C , kẻ tia Ax tiếp xúc với đòng tròn (O), gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC . Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N.

a). Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân .

b). Chứng minh rằng $\Delta\ MCB = \Delta\ MNQ$

Hướng dẫn giải



a). Xét ΔABM và ΔNBM .

Ta có: AB là đờng kính của đờng tròn (O)

nên :AMB = NMB = 90^o .

M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC

nên ABM = MBN => BAM = BNM

=> ΔBAN cân đỉnh B.

Tứ giác AMCB nội tiếp

=> BAM = MCN (cùng bù với góc MCB).

=> MCN = MNC (cùng bằng góc BAM).

=> Tam giác MCN cân đỉnh M

b). Xét Δ MCB và Δ MNQ có :

MC = MN (theo cm trên MNC cân) ; MB = MQ (theo gt)

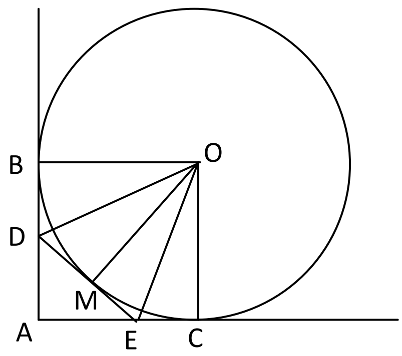
$\angle$ BMC = $\angle$ MNQ (vì : $\angle$MCB = $\angle$MNC ; $\angle$MBC = $\angle$MQN).

=> Δ $MCB = \Delta$ MNQ $(c.g.c)$.

Câu 5: Cho đường tròn (O;R) và một điểm A sao cho OA = R$\sqrt{2}$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Một góc $\angle$xOy = 45^0 cắt đoạn thẳng AB và AC lần lượt tại D và E.

Chứng minh rằng: DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn giải



Áp dụng định lí Pitago tính được

AB = AC = R $\Rightarrow$ ABOC là hình vuông

Kẻ bán kính OM sao cho

$\angle$BOD = $\angle$MOD$\Rightarrow$

$\angle$MOE = $\angle$EOC

Chứng minh ΔBOD = ΔMOD

$\Rightarrow$ $\angle$OMD = $\angle$OBD = 90^0

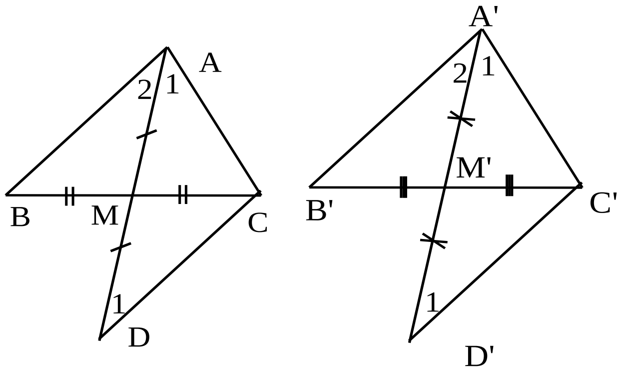
Tương tự: $\angle$OME = 90^0

$\Rightarrow$D, M, E thẳng hàng. Do đó DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu 6: Chứng minh rằng: Nếu hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Giải

GT	$\triangle$ABC, $\triangle$A'B'C': AB = A'B', AC= A'C' M$\in$BC: MB=MC M'$\in$B'C': M'B'=M'C' AM=A'M'
KL	$\triangle$ABC=$\triangle$A'B'C'



Hướng dẫn giải

Lấy $DAM : MD = MA$
Lấy $D'A'M' : M'D' = M'A'$
Xét $\triangle$ABM và $\triangle$DMC có:
MB=MC(gt)
$\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$(đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle$ABM và $\triangle$DMC(c.g.c)
AM = MD(cách lấy điểm D)
$\Rightarrow$CD= AB(hai cạnh tương ứng)
Và $\widehat{A_2} = \widehat{D_1}$ (1)(hai góc tương ứng)
C/m tương tự ; C'D'=A'B'; $\widehat{A'_2} = \widehat{D'_1}$ (2)
Xét $\triangle$ACD và $\triangle$A'C'D' có:
AC = A'C'(gt)
AD=A'D'(vì AM=A'M') $\Rightarrow \triangle$ACD = $\triangle$A'C'D'(c.g.c)
CD=C'D'(=AB)
$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A'_1}$ và $\widehat{D_1} = \widehat{D'_1}$ (3)
Từ (1), (2),(3) $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{A'_2}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A'_1} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
Vậy $\triangle$ABC=$\triangle$A'B'C'(c.g.c)
* cách 2:
$\triangle$AMC và $\triangle$A'M'C' có:
AM=A'M'(gt)
$\widehat{A_1} = \widehat{A'_1}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle$AMC = $\triangle$A'M'C'(c.g.c)
AC= A'C'(gt)
$\Rightarrow$MC = M'C'(hai cạnh tương ứng)
Mà MC = $\frac{1}{2}$BC; M'C' = $\frac{1}{2}$B'C'(gt). Do đó: BC=B'C'.
Vậy $\triangle$ABC=$\triangle$A'B'C'(c.c.c)

Mức độ 3: VD

Câu 7: Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 20^0$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Chứng minh góc $\widehat{DCA} = \frac{1}{2}\widehat{A}$

Hướng dẫn giải.

Giải: Tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 20^0$

suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{\left(180^0 - 20^0\right)}{2} = 80^0$

Vẽ tam giác đều BCM (m, A thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC), ta được $AD = BC = CM$

Tam giác MAB=tam giác MAC (c.c.c).

Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MAC} = \dfrac{20^0}{2} = 10^0$

$\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 80^0 - 60^0 = 20^0$

Tam giác CAD và tam giác ACM có AD=CM (c/m trên)

$\widehat{CAD} = \widehat{ACM} = 20^0$

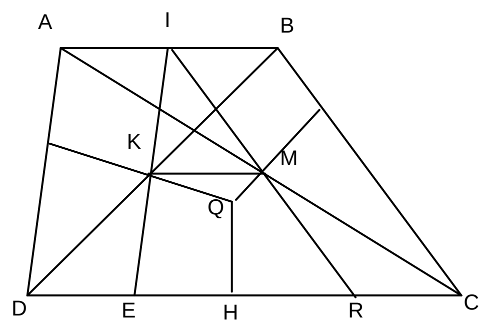
AC chungVậy tam giác CAD = tam giác ACM (c.g.c) suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{MAC} = 10^0$ ^, do đó $\widehat{DCA} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$

Câu 8: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB<CD). Gọi K, M lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đường thẳng qua K và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại Q. Chứng minh:

a) $KM\,//\,AB$.

b) $QD = QC$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm AB, $E = IK \cap CD$, $R = IM \cap CD$. Xét hai tam giác KIB và KED có:

$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$, $KB = KD$ (K là trung điểm BD), $\widehat{IKB} = \widehat{EKD}$

Suy ra $\Delta KIB = \Delta KED \Rightarrow IK = KE$.

Chứng minh tương tự có: $\Delta MIA = \Delta MRC$

Suy ra: MI = MR

Trong tam giác IER có $IK = KE$ và $MI = MR$ nên KM là đường trung bình $\Rightarrow$ $KM\,//\,CD$

Do $CD\,//\,AB$ (gt) do đó KM // AB (đpcm)

Ta có: IA=IB, KB=KD (gt)$\Rightarrow$ IK là đường trung bình của ΔABD $\Rightarrow$ IK//AD hay IE//AD

chứng minh tương tự trong ΔABC có IM//BC hay IR//BC

Có: $QK \perp AD$ (gt), IE//AD (CM trên) $\Rightarrow QK \perp IE$. Tương tự có $QM \perp IR$

Từ trên có: IK=KE, $QK \perp IE \Rightarrow QK$ là trung trực ứng với cạnh IE của ΔIER. Tương tự QM là trung trực thứ hai của ΔIER

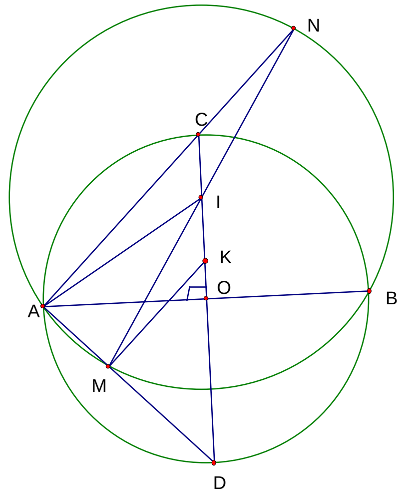
Hạ $QH \perp CD$ suy ra QH là trung trực thứ ba của ΔIER hay Q nằm trên trung trực của đoạn CD $\Rightarrow$ Q cách đều C và D hay QD=QC (đpcm).

Câu 9: Cho đường tròn tâm O đường kính AB và CD vuông góc với nhau, lấy điểm I bất kỳ trên đoan CD.

a) Tìm điểm M trên tia AD, điểm N trên tia AC sao cho I lag trung điểm của MN.

b) Chứng minh tổng $MA + NA$ không đổi.

Hướng dẫn giải



a) Dựng (I, IA) cắt AD tại M cắt tia AC tại N

Do MAN = 90^0 nên MN là đường kính

Vậy I là trung điểm của MN

b) Kẻ $MK // AC$ ta có : ΔINC=ΔIMK (g.c.g)

=> $CN = MK = MD$ (vì ΔMKD vuông cân)

Vậy $AM + AN = AM + CN + CA = AM + MD + CA$

=> $AM = AN = AD + AC$ không đổi

Chủ đề 3: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

Hai tam giác bất kỳ:

1. Dùng định lý: 1 đường thẳng song song với 1 cạnh và cắt 2 cạnh còn lại của tam giác.
2. Trường hợp: c – c – c.
3. Trường hợp: c – g – c.
4. Trường hợp: g – g.

Hai tam giác vuông:

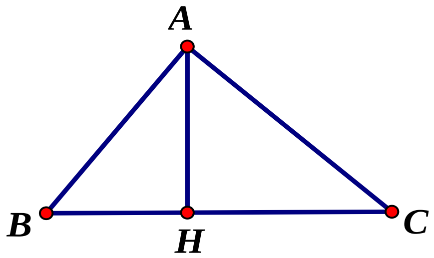
1. Trường hợp: g – g.
2. Trường hợp: c – g – c.
3. Trường hợp: cạnh huyền – cạnh góc vuông.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Mức độ 1: Nhận Biết

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng $AH^2 = HB.HC$

Lời giải:



Xét hai tam giác ΔAHB và ΔCHA ta có:

$\angle AHB = \angle CHA = 90^0$

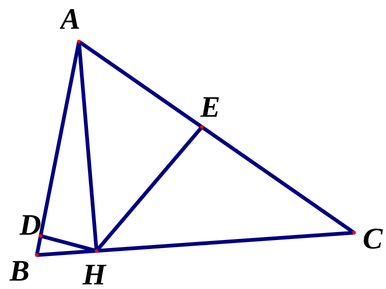
$\angle ABH = \angle CAH$ (cùng phụ $\angle ACH$)

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CHA$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{HB}{HA}$

$\Rightarrow AH^2 = HB.HC$.

Câu 2. Cho ΔABC có ba góc nhọn, đường cao AH $(H \in BC)$. Vẽ HD vuông góc AB tại D, HE vuông góc AC tại E. Chứng minh ΔAHB đồng dạng với ΔADH.



Lời giải:

Ta có AH và HD lần lượt là đường cao của ΔABC và ΔBHA nên ta có ΔAHB và ΔDHA là các tam giác vuông.

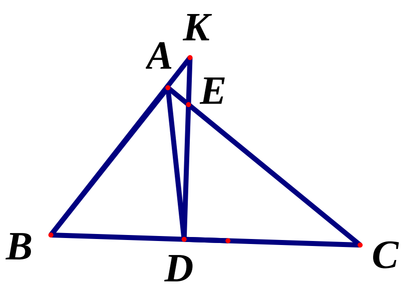
Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔADH có $\angle HAB = \angle DHA$

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta ADH$.

Câu 3. Cho ΔABC có AB = 3 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E và BA tại K.

Chứng minh ΔEDC đồng dạng ΔBDK

Lời giải:



Xét ΔABC có

$BC^2 = 25, AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

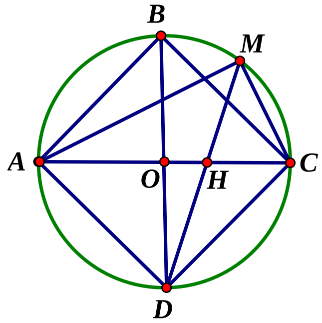
Ta có $\begin{cases} \angle ECD + \angle KBC = 90^0 \\ \angle ECD + \angle DEC = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \angle KBC = \angle DEC$

Xét hai tam giác vuông Δ EDC và Δ BDK có $\angle DBK = \angle DEC$

$\Rightarrow$ Δ EDC $\backsim$ Δ BDK (g-g).

Mức độ 2: Thông Hiểu

Câu 1. Tuyển sinh vào 10 Bình Dương 2010-2011. Một hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn Tâm O bán kính R. Một điểm M di động trên cung ABC, M không trùng với A, B và C, MD cắt AC tại H. Chứng minh tam giác MDC đồng dạng với tam giác MAH.



Lời giải:

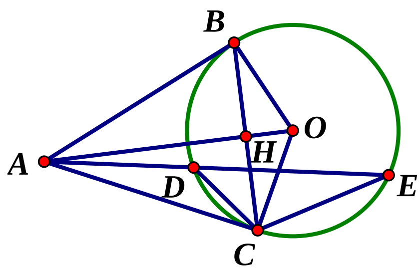
Xét hai tam giác ΔMDC và ΔMAH có

$\angle MDC = \angle MAH$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC) (1)

$\angle AMH = \angle DMC$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\Delta MDC \backsim \Delta MAH$ (g-g).

Câu 2. Tuyển sinh vào 10 Nghệ An 2011-2012. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE tới đường tròn (B, C là hai tiếp điểm; D nằm giữa A và E). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng AH.AO = AD.AE



Lời giải:

Xét tam giác cân ABC có AO là phân giác cũng là đường cao.

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ACO ta có

$AC^2 = AH.AO$ (1).

Xét hai tam giác ΔADC và ΔACE có

$\angle CAD = \angle EAC$

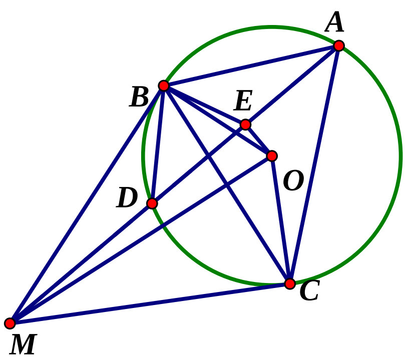
$\angle DCA = \angle CED$ (góc tiếp tuyến và dây cung bằng số đo góc nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\Delta ADC \backsim \Delta ACE$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AD.AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH.AO = AD.AE (đpcm).

Câu 3. Tuyển sinh vào 10 ĐẮK LẮK 2012-2013. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O (AB < AC). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. E là trung điểm đoạn AD. EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng $MB^2 = MA.MD$.



Lời giải:

Xét hai tam giác ΔMBA và ΔMDB có

$\angle BMD = \angle AMB$

$\angle MBD = \angle AMB$ (góc tiếp tuyến và dây cung bằng số đo góc nội tiếp)

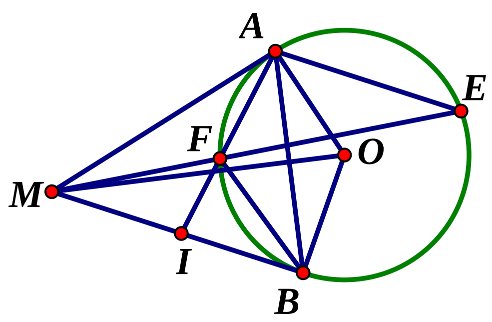
$\Rightarrow \Delta MBA \backsim \Delta MDB$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MA}{MB} \Rightarrow MB^2 = MA.MD$ (đpcm) .

Mức độ 3: Vận Dụng Thấp

Câu 1. Tuyển sinh vào 10 Trà Vinh 2015-2016. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn O, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng song song với MB, cắt đường tròn tại E; đoạn thẳng ME cắt đường tròn tại F. Hai đường thẳng AF và MB cắt nhau tại I. Chứng minh $IB^2 = IF.IA$

Lời giải:



Xét hai tam giác ΔBIF và ΔAIB có

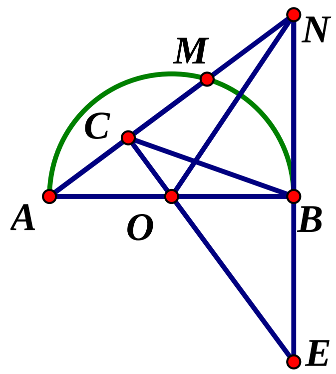
$\angle BIF = \angle AIB$

$\angle IAB = \angle IBF$ (góc tiếp tuyến và dây cung bằng số đo góc nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta BIF \backsim \Delta AIB$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IA.IF$ (đpcm) .

Câu 2. Tuyển sinh vào 10 Thái Bình 2015-2016. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B. Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.Chứng minh: tứ giác OCNB nội tiếp và AC.AN=AO.AB.



Lời giải:

+ Ta có OC vuông góc MA (đường kính qua trung điểm dây cung thì vuông góc dây cung)

Xét tứ giác OCNB có $\angle OCN = \angle OBN = 90^0$

Nên tứ giác OCNB nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)

+ Xét hai tam giác ΔANO và ΔABC có

$\angle ANO = \angle ABC$ (cùng chắn cung CO).

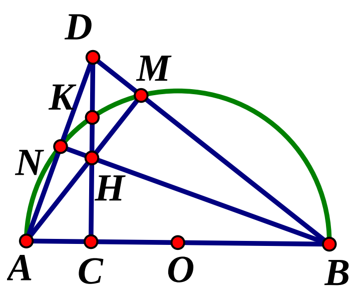
$\angle NAO = \angle BAC$

$\Rightarrow \Delta ANO \backsim \Delta ABC$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AO}{AC} \Rightarrow AC.AN = AO.AB.$ (đpcm) .

Câu 3 Tuyển sinh vào 10 Hà Nội 2015-2016. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

1) Chứng minh tứ giác ACMD là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh CA.CB=CH.CD.



Lời giải:

1) Xét tứ giác ACMD có $\angle ACD = \angle DMA = 90^0$

Nên tứ giác ACMD nội tiếp (đỉnh M, C cùng nhìn AD góc không đổi)

2) Xét hai tam giác vuông ΔHAC và ΔBDC có

$\angle HAC = \angle BDC$ (cùng phụ $\angle ABD$).

$\Rightarrow$ $\Delta HAC \backsim \Delta BDC$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CH}{CB} \Rightarrow CA.CB = CH.CD$ (đpcm) .

Mức độ 4: Vận Dụng Cao

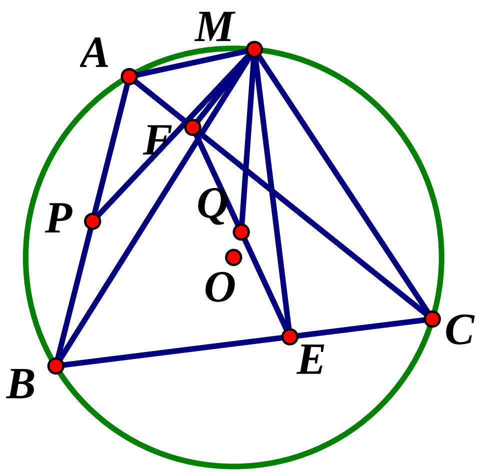
Câu 1. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O.Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC.Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC. P là trung điểm AB, Q là trung điểm FE.

1) Chứng minh tứ giác $MFEC$ nội tiếp.

2) Chứng minh $BM.EF = BA.EM$

3) Chứng minh $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

Lời giải:



1) Chứng minh tứ giác $MFEC$ nội tiếp:

E; F cùng nhìn đoạn thẳng CM góc 90^0 nên tứ giác $MFEC$ nội tiếp.

2) Chứng minh $BM.EF = BA.EM$

• Chứng minh $\Delta EFM \backsim \Delta BAM$:

Ta có góc $\angle ABM = \angle ACM$ (vì cùng chắn cung AM)

Do $MFEC$ nội tiếp nên góc $\angle ACM = \angle FEM$ (cùng chắn cung FM).

$\Rightarrow \angle ABM = \angle FEM$ (1)

Ta lại có góc $\angle AMB = \angle ACB$ (Cùng chắn cung AB).Do MFEC nội tiếp nên $\angle FME = \angle FCM$ (Cùng chắn cung FE). ⇒Góc $\angle AMB = \angle FME$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta EFM \backsim \Delta BAM$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{EM}{EF} \Rightarrow BM.EF = BA.EM$ (đpcm) .

3) Chứng minh $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

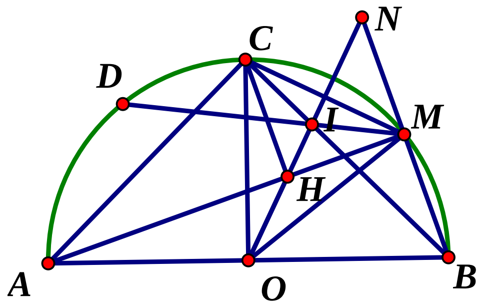
Ta có ΔEFM∽ΔABM (theo c/m trên)⇒ $\dfrac{AB}{FE} = \dfrac{AM}{MF}$ mà $AB = 2AP$; $FE = 2FQ$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{2AP}{2FQ} = \dfrac{AM}{MF} \Rightarrow \dfrac{AP}{FQ} = \dfrac{AM}{FM}$ và góc $\angle PAM = \angle MFQ$ (suy ra từ $\Delta EFM \backsim \Delta BAM$)

Vậy $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

Câu 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB,bán kính OC⊥ AB.Gọi M là 1 điểm trên cung BC.Kẻ đường cao CH của tam giác ACM.

1. Chứng minh $AOHC$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ ΔCHM vuông cân và OH là phân giác của góc COM.
3. Gọi giao điểm của OH với BC là I.MI cắt (O) tại D. Cmr: CDBM là hình thang cân.
4. BM cắt OH tại N.Chứng minh ΔBNI và ΔAMC đồng dạng,từ đó suy ra: BN.MC=IN.MA.



Lời giải:

1. Chứng minh $AOHC$ nội tiếp: học sinh tự chứng minh.

2. • Chứng minh ΔCHM vuông cân:

Do OC ⊥ AB trại trung điểm O $\Rightarrow Sd\,\overset{\frown}{AC} = Sd\,\overset{\frown}{CB} = 90^o$.

Ta lại có:

$\angle CMA = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{AC} = 45^o$.⇒ΔCHM vuông cân ở M.

• Chứng minh OH là phân giác của góc $\angle COM$:

Do ΔCHM vuông cân ở H $\Rightarrow CH = HM$; $CO = OB$ (bán kính);

OH chung ⇒$\Delta CHO = \Delta HOM$ $\Rightarrow \angle COH = \angle HOM$ ⇒ đpcm.

3. Chứng minh CDBM là hình thang cân:

Do ΔOCM cân ở O có OH là phân giác⇒OH là đường trung trực của CM mà I∈OH⇒ΔICM cân ở I $\Rightarrow \angle ICM = \angle IMC$ mà $\angle ICM = \angle MDB$ (cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow \angle IMC = \angle IDB$ hay $CM // DB$. Do ΔIDB cân ở I $\Rightarrow \angle IDB = \angle IBD$ và $\angle MBC = \angle MDC$ (cùng chắn cung CM) nên $\angle CDB = \angle MBD$ ⇒ CDBM là hình thang cân.

4. • Chứng minh $\Delta BNI \backsim \Delta AMC$:

Do OH là đường trung trực của CM và N∈OH ⇒ CN=NM.

Do $\angle AMB = 90^0$ $\Rightarrow \angle HMB = 90^0$ hay NM ⊥ AM

mà CH⊥AM ⇒ CH//NM.

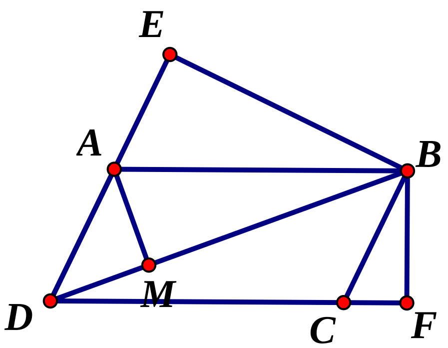
Có $\angle CMH = 45^o$ $\Rightarrow \angle NHM = 45^o \Rightarrow \Delta MNH$ vuông cân ở M vậy $CHMN$ là hình vuông⇒ $\angle INB = \angle CMA = 45^o$.

• Do $CMBD$ là thang cân $\Rightarrow CD = BM$ $\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BM}$

mà $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ $\Rightarrow AD = CM$ và $\angle CAM = \angle CBM$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CM}$)

$\Rightarrow \Delta INB = \Delta CMA$

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD\,(AC < BD)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của B lên các đường thẳng DA và DC. Chứng minh rằng: $DB^2 = DA.DE + DC.DF$



a) Phân tích tìm hình phụ

Giả sử lấy điểm M thuộc đoạn BD sao cho $DM.DB = DA.DE$ $\Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{DA}{DB}$, kết hợp với góc D chung để suy ra $\Delta MDA \backsim \Delta EDB$,

vì $\angle BED = 90^0 \Rightarrow \angle AMD = 90^0$ hay $AM \perp DB$.

Do đó điểm M cần tìm là hình chiếu của A lên DB.

b) Bài giải

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BD tại M, do $AC < BD$ nên các góc $\angle ADB$ và $\angle ABD$ đều nhọn nên M nằm giữa D và B , do đó $BD = DM + MB$

- Dễ chứng minh được $\Delta DAM \backsim \Delta DBE$ (g-g), suy ra

$$\frac{DM}{DE} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow DM.DB = DA.DE\,(1)$$

-Lại có ΔDBF∽ΔBAM (vì $\angle F = \angle M = 90^0$ và $\angle BDF = \angle ABM$ (so le trong)).

$$\Rightarrow \frac{BM}{DF} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow BM.AB = AB.DF\,(2)$$

- Cộng vế theo vế hệ thức (1) và (2) ta được: $DB^2 = DA.DE + DC.DF$ $\Rightarrow$ đpcm.

-----------///---------

Chủ đề 4: CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

1. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

Phương pháp 1:

Chứng minh hai đoạn thẳng là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

Phương pháp 2:

Sử dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Phương pháp 3:

Vận dụng tính chất hai cạnh bên của tam giác cân bằng nhau.

Phương pháp 4:

Vận dụng tính chất ba cạnh của tam giác đều bằng nhau.

Phương pháp 5:

Vận dụng sự bằng nhau của các cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

Phương pháp 6:

Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng một đoạn thẳng thứ ba.

Phương pháp 7:

Chứng minh hai đoạn thẳng là hai cạnh bên của hình thang cân.

Phương pháp 8:

Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau, hai dây căng hai cung bằng nhau thì bằng nhau.

Phương pháp 9:

Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Phương pháp 10:

Vận dụng định lí, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì nó sẽ đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

Phương pháp 11:

Vận dụng định nghĩa đường trung trực của đoạn thẳng, định nghĩa trung điểm của đoạn thẳng, định nghĩa đường trung tuyến của tam giác.

Phương pháp 12:

Chứng minh hai đoạn thẳng thẳng có cùng số đo.

Phương pháp 13:

Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba.

Phương pháp 14:

Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng tổng, hiệu, trung bình nhân,…, của hai đoạn thẳng bằng nhau từng đôi một.

Phương pháp 15:

Sử dụng tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền, tính chất cạnh đối diện với góc 30^0 của tam giác vuông.

Phương pháp 16:

Sử dụng tính chất đường phân giác của một góc.

Phương pháp 17:

Sử dụng tính chất của hai đoạn thẳng song song và chắn giữa bởi hai đường thẳng song song.

Phương pháp 18:

Chứng minh bằng phản chứng.

Phương pháp 19:

Sử dụng các đoạn thẳng bằng nhau cho trước rồi biến đổi.

Phương pháp 20:

Sử dụng định lí đường trung bình của tam giác (thuận và đảo).

Phương pháp 21:

Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác (tính chất của giao điểm ba đường phân giác của tam giác), tính chất của giao điểm ba đường trung trực.

Phương pháp 22:

Sử dụng bình phương của chúng bằng nhau (có thể sử dụng định lí Pitago, tam giác đồng dạng, hệ thức lượng trong tam giác, trong đường tròn để đưa về bình phương của chúng bằng nhau).

2. CÁC VÍ DỤ.

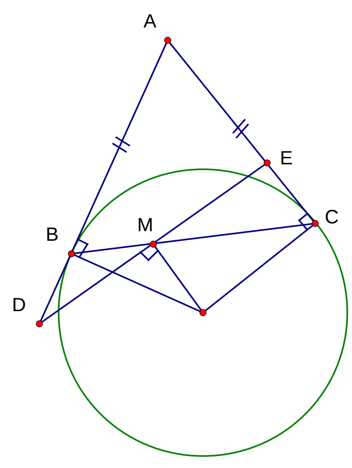
Mức độ 1: NB.

Câu 1: ΔABC cân tại A. Vẽ đường tròn $\left(O;\ R\right)$ tiếp xúc với AB, AC tại $B,\ C$. Đường thẳng qua điểm M trên BC vuông góc với OM cắt tia $AB,\ AC$ tại $D,\ E$.

a) Chứng minh 4 điểm O, B, D, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MD = ME$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{DBO} = \widehat{DMO} = 90^0$ (vì gt)

$\Rightarrow$ 2 điểm B, M thuộc đường tròn đường kính DO

$\Rightarrow$ đpcm

b) Chứng minh tương tự có 4 điểm O, C, E, M cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ $\widehat{MEO} = \widehat{MCO}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MO)

$\widehat{MBO} = \widehat{MDO}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MO)

Mà $\widehat{MBO} = \widehat{MCO}$ (vì ΔBOC cân tại O)

$\Rightarrow$ $\widehat{MEO} = \widehat{MDO}$ $\Rightarrow \Delta DOE$ cân tại O

Mà $MO \perp DE$ nên $MD = ME$ (đpcm).

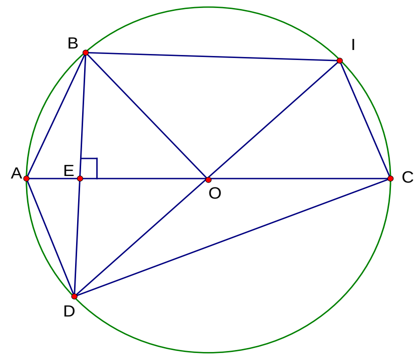
Câu 2: Cho đường tròn tâm O, đường kính $AC = 2R$. Từ một điểm E ở trên đoạn OA (E không trùng với A *và* O). Kẻ dây BD vuông góc với AC. Kẻ đường kính DI của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng: $AB = CI$.

b) Chứng minh rằng: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Tính diện tích của đa giác $ABICD$ theo R khi $OE = \frac{2R}{3}$.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh rằng: $AB = CI$.

Ta có: $BD \perp AC$ (gt)

$\widehat{DBI} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BD \perp BI$

Do đó: $AC \,//\, BI \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CI} \Rightarrow AB = CI$

b) Chứng minh rằng: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Vì $BD \perp AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$ nên $AB = AD$

Ta có: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + CD^2$

$= AD^2 + CD^2 = AC^2 = \left(2R\right)^2 = 4R^2$

c) Tính diện tích của đa giác $ABICD$ theo R khi $OE = \frac{2R}{3}$.

$$S_{ABICD} = S_{ABD} + S_{ABIC} = \frac{1}{2}.DE.AC + \frac{1}{2}.EB.\left(BI + AC\right)$$

* $OE = \frac{2R}{3} \Rightarrow AE = \frac{R}{3}$ và $EC = \frac{2R}{3} + R = \frac{5R}{3}$

* $DE^2 = AE.EC = \frac{R}{3}.\frac{5R}{3} = \frac{5R^2}{9} \Rightarrow DE = \frac{R\sqrt{5}}{3}$. Do đó: $EB = \frac{R\sqrt{5}}{3}$.

* $BI = AC - 2AE = 2R - 2.\frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$

Vậy: $S_{ABICD} = \frac{1}{2}.\frac{R\sqrt{5}}{3}.2R + \frac{1}{2}.\frac{R\sqrt{5}}{3}.\left(\frac{4R}{3} + 2R\right) = \frac{R\sqrt{5}}{6}.\frac{16R}{3} = \frac{8R^2\sqrt{5}}{9}$ (đvdt).

Câu 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Vẽ hình bình hành $BHCD$. Đường thẳng qua D và song song với BC cắt đường thẳng AH tại M.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $BM = CD$ và $\widehat{BAM} = \widehat{OAC}$.

3) Gọi K là trung điểm của BC, đường thẳng AK cắt OH tại G. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

HD: HS tự vẽ hình

1) Chứng minh các tứ giác $ABMD$, $AMDC$ nội tiếp $\Rightarrow A,B,C,D,M$ nằm trên cùng một đường tròn

2) Xét (O) có dây MD // BC $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MB}$ = sđ $\overset{\frown}{CD}$ $\Rightarrow$ $dây\ MB = dây\ CD$ hay $BM = CD$

+ Theo phần 1) và BC // MD $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{OAC}$.

3)Chứng minh OK là đường trung bình của tam giác AHD $\Rightarrow$ OK // AH và $OK = \dfrac{1}{2}AH$ hay $\dfrac{OK}{AH} = \dfrac{1}{2}$ $(*)$

+ Chứng minh tam giác OGK đồng dạng với tam giác HGA

$\Rightarrow \dfrac{OK}{AH} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{GK}{AG} \Rightarrow AG = 2GK$, từ đó suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC.

Mức độ 2: TH.

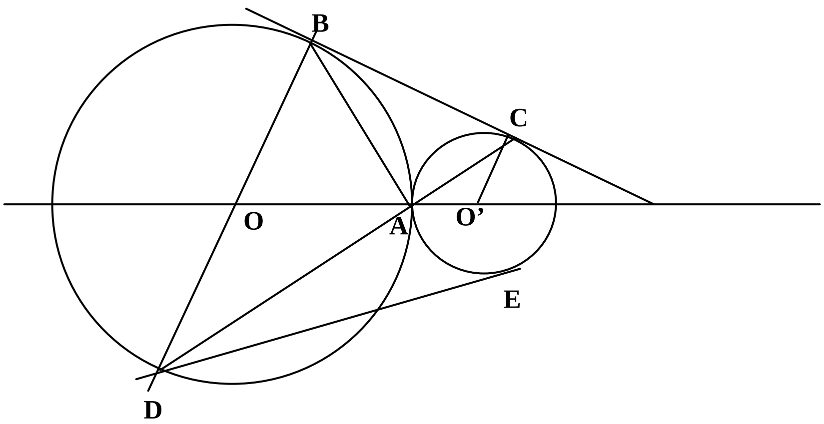
Câu 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài $BC, B \in (O)$, $C \in (O')$. Đường thẳng BO cắt (O) tại điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $CO'OB$ là một hình thang vuông.

b) Chứng minh rằng ba điểm A, C, D thẳng hàng.

c) Từ D kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O') (E là tiếp điểm). Chứng minh rằng $DB = DE$.

Hướng dẫn giải



a) Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $OB, O'C$ vuông góc với BC $\Rightarrow$ tứ giác $CO'OB$ là hình thang vuông.

b) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

Mặt khác, ta có góc $\widehat{BAD} = 90^0$ (nội tiếp nửa đường tròn)

Vậy ta có góc $\widehat{DAC} = 180^0$ nên 3 điểm D, A, C thẳng hàng.

c) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông DBC ta có $DB^2 = DA.DC$

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong đường tròn (chứng minh bằng tam giác đồng dạng) ta có $DE^2 = DA.DC \Rightarrow DB = DE$..

Câu 5: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A,B phân biệt. Đường thẳng OA cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai C,D. Đường thẳng O'A cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai E,F.

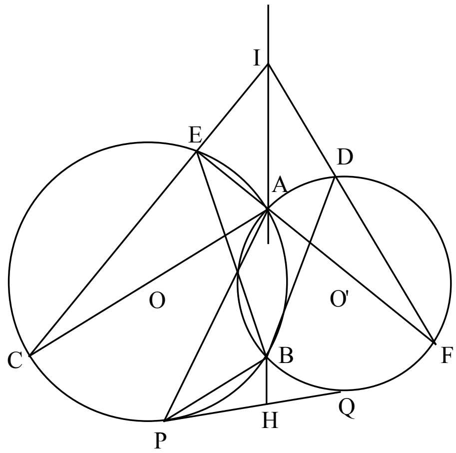
a) Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.

b) Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

c) Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và (O') ($P \in (O), Q \in (O')$).

Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{ABC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên B,C,F thẳng hàng. AB, CE và DF là 3 đường cao của tam giác ACF nên chúng đồng quy.

b) Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^0$ suy ra $BEIF$ nội tiếp đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của AB và PQ

Ta chứng minh được các tam giác AHP và PHB đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{HP}{HB} = \dfrac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA.HB$

Tương tự, $HQ^2 = HA.HB$. Vậy $HP = HQ$ hay H là trung điểm PQ..

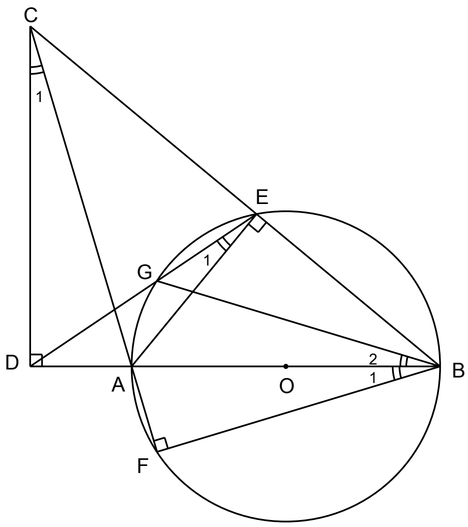
Câu 6: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, trên cùng một nửa đường tròn (O) lấy 2 điểm G *và* E (theo thứ tự A,G,E,B) sao cho tia EG cắt tia BA tại D. Đường thẳng vuông góc với BD tại D cắt BE tại C, đường thẳng CA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh tứ giác $DFBC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $BF = BG$

c) Chứng minh: $\dfrac{DA}{BA} = \dfrac{DG.DE}{BE.BC}$

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh tứ giác $DFBC$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AFB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

Ta có: $\widehat{CDB} = \widehat{CFB} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $DFBC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

b) Chứng minh: $BF = BG$

Ta có: $\widehat{AEB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AEC} = 90^0$

Ta có: $\widehat{AEC} + \widehat{ADC} = 180^0$

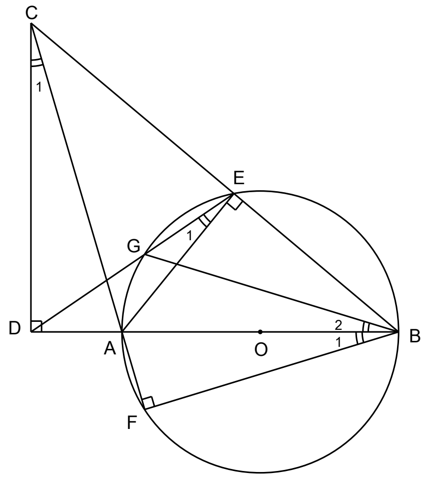
$\Rightarrow$ Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (vì nt cùng chắn cung DA)

Ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (vì nt cùng chắn cung DF của đường tròn đường kính BC)

Do đó: $\widehat{E_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \overset\frown{AG} = \overset\frown{AF} \Rightarrow \overset\frown{BF} = \overset\frown{BG} \Rightarrow BF = BG$

c) Chứng minh: $\dfrac{DA}{BA} = \dfrac{DG.DE}{BE.BC}$



Ta chứng minh được:

$\Delta DGB \backsim \Delta DAE \ (g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{DG}{DA} = \dfrac{DB}{DE} \Rightarrow DG.DE = DA.DB \ (1)$

$\Delta BEA \backsim \Delta BDC \ (g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow BE.BC = BA.BD \ (2)$

Từ (1) *và* (2) suy ra: $\dfrac{DG.DE}{BE.BC} = \dfrac{DA.DB}{BA.BD} = \dfrac{DA}{BA}$ (đpcm)

Mức độ 3: VDT.

Câu 7: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với $R > R'$ cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A.

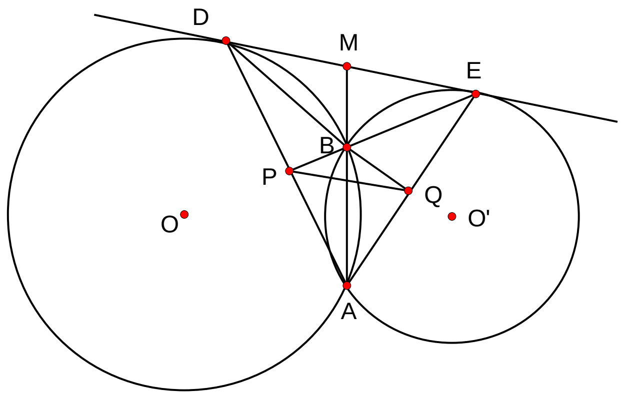
a) Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

b) Tia AB cắt DE tại M. Chứng minh M là trung điểm của DE.

c) Đường thẳng EB cắt DA tại P, đường thẳng DB cắt AE tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\widehat{DAB} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset\frown{DB}$ (góc nội tiếp) và $\widehat{BDE} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset\frown{DB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.



b) Xét hai tam giác DMB *và* AMD có:

$\widehat{DMA}$ chung, $\widehat{DAM} = \widehat{BDM}$ nên

$\Delta DMB \sim \Delta AMD \Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MA}{MD}$

hay $MD^2 = MA.MB$.

Tương tự ta cũng có: $\Delta EMB \sim \Delta AME$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MA}{ME}$ hay $ME^2 = MA.MB$.

Từ đó: $MD = ME$ hay M là trung điểm của DE.

c) Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{BDM}$, $\widehat{EAB} = \widehat{BEM}$

$\Rightarrow \widehat{PAQ} + \widehat{PBQ} = \widehat{DAB} + \widehat{EAB} + \widehat{PBQ} = \widehat{BDM} + \widehat{BEM} + \widehat{DBE} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $APBQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PAB}$. Kết hợp với $\widehat{PAB} = \widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB} = \widehat{BDM}$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB..

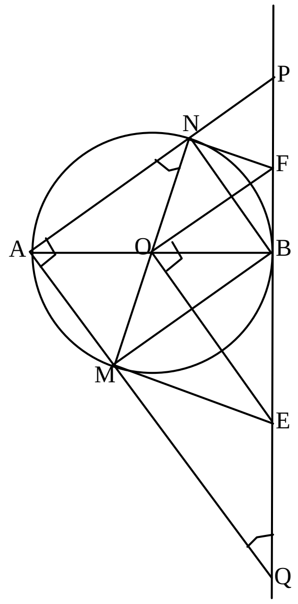
Câu 8: Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O;R)$ (M khác A, M *khác* B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF.

4) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.



Hướng dẫn giải

1) Tứ giác $AMBN$ có 4 góc vuông, vì là 4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

2) Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn cung AM)

và $\widehat{ABM} = \widehat{AQB}$ (góc có cạnh thẳng góc)

vậy $\widehat{ANM} = \widehat{AQB}$ nên $MNPQ$ nối tiếp.

3) OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

OF // AP nên OF là đường trung bình của tam giác ABP

Suy ra F là trung điểm của BP.

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP.

Xét 2 tam giác $\Delta NOF = \Delta OFB$ $(c-c-c)$ nên $\widehat{ONF} = 90^0$.

Tương tự ta có $\widehat{OME} = 90^0$ nên ME // NF vì cùng vuông góc với MN.

4)

$2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN = 2R.(PB + BQ) - AM.AN$

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra $\dfrac{AB}{QB}=\dfrac{BP}{BA}\Rightarrow AB^2=BP.QB$

Nên áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có $PB+BQ\ge 2\sqrt{PB.BQ}=2\sqrt{(2R)^2}=4R$

Ta có $AM.AN\le \dfrac{AM^2+AN^2}{2}=\dfrac{MN^2}{2}=2R^2$

Do đó, $2S_{MNPQ}\ge 2R.4R-2R^2=6R^2$. Suy ra $S_{MNPQ}\ge 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $AM=AN$ *và* $PQ=BP$ hay MN vuông góc AB..

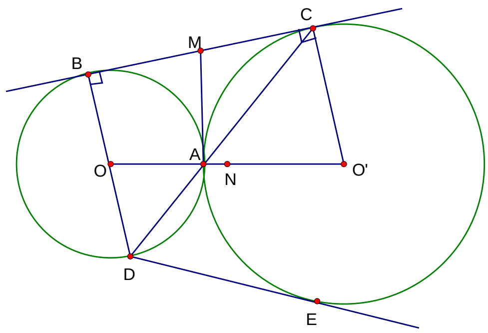
Câu 9: Cho hai đường tròn $\left(O;\ R\right)$ và $\left(O';\ R'\right)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC $(B,\ C$ thứ tự là các tiếp điểm thuộc $\left(O;\ R\right)$ và $\left(O';\ R'\right))$.

a) Chứng minh $\widehat{BAC}=90^0$.

b) Tính BC theo $R,\ R'$.

c) Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC và đường tròn $\left(O\right)$ $(D\ne A)$, vẽ tiếp tuyến DE với đường tròn $\left(O'\right)$ $(E\in\left(O'\right))$. Chứng minh $BD=DE$.

Hướng dẫn giải



a) Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong cắt BC tại M

Ta có $MB=MA=MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{A}=90^0$.

b) Giả sử $R'>R$. Lấy N trung điểm của OO'.

Ta có MN là đường trung bình của hình thang vuông $OBCO'$

$(OB\ //\ O'C;\ \widehat{B}=\widehat{C}=90^0)$ và tam giác AMN vuông tại A.

Có $MN=\dfrac{R+R'}{2};\ AN=\dfrac{R'-R}{2}$. Khi đó $MA^2=MN^2-AN^2=RR'$.

$\Rightarrow\ MA=\sqrt{RR'}$ mà $BC=2MA=2\sqrt{RR'}$

c) Ta có O,B,D thẳng hàng (vì $\widehat{BAD}=90^0;\ OA=OB=OD$)

ΔBDC có $\widehat{DBC}=90^0,\ BA\perp CD$, ta có: $BD^2=DA\ .\ DC$ $\left(1\right)$

$\Delta ADE\sim\Delta EDC$ $\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{DE}{DC}=\dfrac{DA}{DE}\ \Rightarrow\ DA\ .\ DC=DE^2$ $\left(2\right)$

$\left(1\right),\ \left(2\right)\Rightarrow BD=DE$ $\left(đpcm\right)$.

Mức độ 4: VDC.

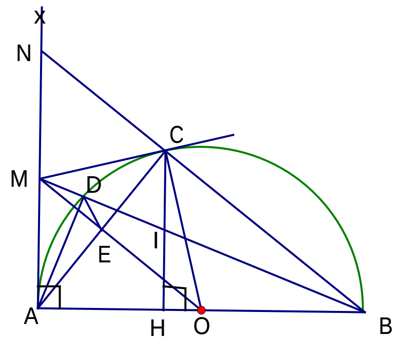
Câu 10: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn $\left(O\right)$ tại D (D khác B).

a) Chứng minh: $AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) $MA^2 = MD.MB$

c) Vẽ CH vuông góc với AB $(H \in AB)$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH.

Hướng dẫn giải



a) $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^0$ (1)

Lại có: $OA = OC = R$; $MA = MC$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra OM là đường trung trực của AC $\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^0$ (2).

Từ (1) *và* (2) suy ra $MADE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MA.

b) Xét ΔMAB vuông tại A có $AD \perp MB$, suy ra: $MA^2 = MB.MD$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

c) Kéo dài BC cắt Ax tại N, ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ACN} = 90^0$, suy ra ΔACN vuông tại C. Lại có $MC = MA$ nên suy ra được $MC = MN$, do đó $MA = MN$ (5).

Mặt khác ta có $CH // NA$ (cùng vuông góc với AB) nên theo định lí Ta-lét thì $\frac{IC}{MN} = \frac{IH}{MA}\left(= \frac{BI}{BM}\right)$ (6) với I là giao điểm của CH *và* MB.

Từ (5) *và* (6) suy ra $IC = IH$ hay MB đi qua trung điểm của CH..

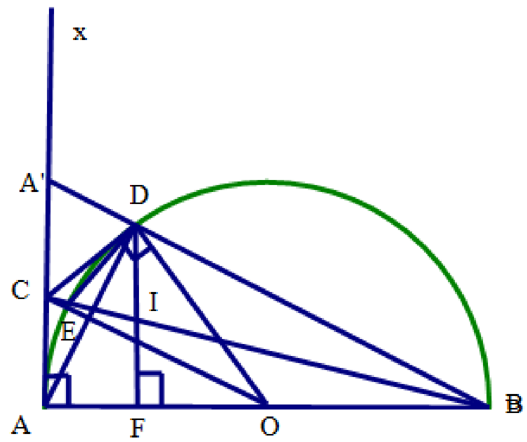
Câu 11: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, D là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn (D *khác* A *và* D *khác* B). Các tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) tại A *và* D cắt nhau tại C, BC cắt nửa đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Kẻ DF vuông góc với AB tại F.

a) Chứng minh: Tứ giác $OACD$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $CD^2 = CE.CB$

c) Chứng minh: Đường thẳng BC đi qua trung điểm của DF.

d) Giả sử $OC = 2R$, tính diện tích phần tam giác ACD nằm ngoài nửa đường tròn (O) theo R.



Hướng dẫn giải

a) Xét tứ giác $OACD$ có:

$\widehat{CAO}=90^0$ (CA là tiếp tuyến)

$\widehat{CDO}=90^0$ (CD là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{CAO}+\widehat{CDO}=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OACD$ nội tiếp

b) + Xét ΔCDE và ΔCBD có:

$\widehat{\text{DCE}}$ chung và $\widehat{CDE}=\widehat{CBD}\left(=\frac{1}{2}sd\widehat{DE}\right)$

$\Rightarrow \Delta CDE \backsim \Delta CBD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CD}{CB}=\frac{CE}{CD}\Rightarrow CD^2=CE.CB$

c) Tia BD cắt Ax tại A'. Gọi I là giao điểm của BC và DF

Ta có $\widehat{\text{ADB}}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{\text{ADA}'}=90^0$, suy ra $\Delta ADA'$ vuông tại D.

Lại có $CD=CA$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

nên suy ra được $CD=CA'$, do đó $CA=A'C$ (1).

Mặt khác ta có DF // AA' (cùng vuông góc với AB)

nên theo định lí Ta-lét thì $\frac{\text{ID}}{\text{CA}'}=\frac{\text{IF}}{\text{CA}}\left(=\frac{\text{BI}}{\text{BC}}\right)$ (2).

Từ (1) *và* (2) suy ra $ID=IF$

Vậy BC đi qua trung điểm của DF.

d) Tính $cos\widehat{\text{COD}}=\frac{OD}{0C}=\frac{1}{2}\Rightarrow \widehat{\text{COD}}=60^0$

$\Rightarrow \widehat{\text{AOD}}=120^0$

$S_{quat}=\frac{\pi.R^2.120}{360}=\frac{\pi R^2}{3}$ (đvdt)

Tính $CD=R\sqrt{3}$

$S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}.CD.DO=\frac{1}{2}.R\sqrt{3}.R=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$ (đvdt)

$S_{OACD}=2.S_{\Delta OCD}=\sqrt{3}R^2$ (đvdt)

Diện tích phần tam giác ACD nằm ngoài nửa đường tròn (O)

$S_{OACD}-S_{quat}=\sqrt{3}R^2-\frac{\pi R^2}{3}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)R^2$ (đvdt).

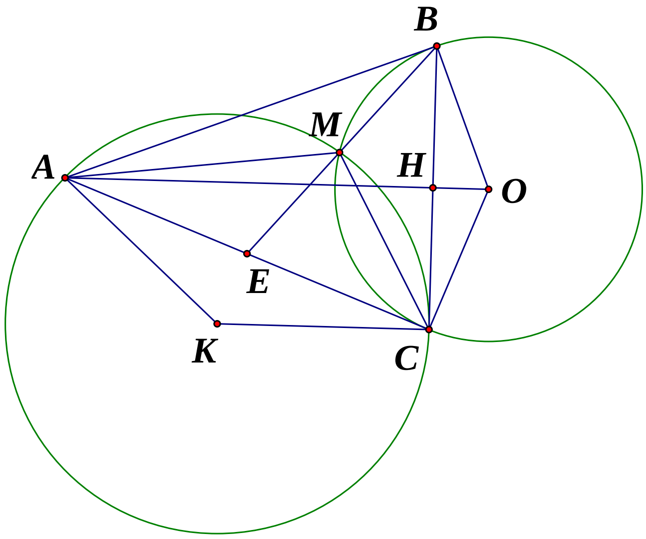
Câu 12: Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến $AB,\ AC$ với đường tròn (B,C là các tiếp điểm)

1) Chứng minh rằng $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Cho bán kính đường tròn (O) bằng 3cm, độ dài đoạn thẳng OA bằng 5cm. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

3) Gọi $\left(K\right)$ là đường tròn qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại C. Đường tròn $\left(K\right)$ và đường tròn (O) cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Chứng minh rằng đường thẳng BM đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Hướng dẫn giải



a) - Có $AB \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0$

- Có $AC \perp OC$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^0$

- Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên nội tiếp được trong đường tròn.

b) - AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AO là đường trung trực của BC. Gọi H là giao điểm của AO và BC, ta có $BC = 2BH$.

- ΔABO vuông tại B có BH là đường cao nên $OB^2 = OH.AO$

$\Rightarrow OH = \dfrac{OB^2}{AO} = \dfrac{9}{5}$ cm

- ΔOBH vuông tại $H \Rightarrow BH^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow BH = \dfrac{12}{5}$ cm

- Vậy $BC = 2BH = \dfrac{24}{5}$ cm

c) - Gọi E là giao điểm của BM và AC.

- ΔEMC và ΔECB có $\widehat{MEC} = \widehat{CEB}$ và $\widehat{MCE} = \widehat{EBC}$ (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến CA cùng chắn cung MC của đường tròn (O))

$\Rightarrow \Delta EMC \sim \Delta ECB \ \left(g-g\right) \Rightarrow EC^2 = EM.EB \ \left(*\right)$

- ΔEMA và ΔEAB có $\widehat{MEA} = \widehat{AEB} \ \left(a\right)$ và:

+ Có $\widehat{MAE} = \widehat{MCB} \ \left(3\right)$ (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến CB cùng chắn cung MC của đường tròn $\left(K\right)$)

+ Có $\widehat{MCB} = \widehat{ABE}$ (4) (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến BA cùng chắn cung MB của đường tròn (O))

+ Từ (3) $và$ $(4) \Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{ABE}$ (b)

- Từ (a) $và$ $(b) \Rightarrow \Delta EMA \sim \Delta EAB$ $(g-g) \Rightarrow EA^2 = EM.EB$ $(**)$

- Từ $(*)$ $và$ $(**) \Rightarrow EC^2 = EA^2 Þ EC = EA.$ Vậy BM đi qua trung điểm E của AC.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Mức độ 1: NB

Bài 1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q. Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Bài 3. Cho hình vuông ABCD, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho BI = BA. Đường thẳng đi qua I vuông góc với BD cắt AD tại E, AI cắt BE tại H. Chứng minh rằng $AE = ID$.

Mức độ 2: TH

Bài 1. Cho đường tròn (O; R) đường kính AC. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O') có đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB, qua M kẻ dây cung vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại D và E. Nối CD cắt đường tròn (O') tại I. Chứng minh MD = MI.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, A khác C). Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm.C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho DI = DB. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm.B. Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là điểm trên cung AB (C khác A và B). Vẽ $CH \perp AB (H \in AB)$. Vẽ đường tròn (C; CH) cắt đường tròn (O) tại D và E. DE cắt CH tại M. Chứng minh rằng MH = MC.

Mức độ 3: VDT

Bài 1. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MBcắt đường tròn (O) tại.C. MC cắt đường tròn (O) tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $MK = KB$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) từ điểm M bên ngoài đường tròn ta kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt đường tròn tại các điểm A, B và C, D biết AB = CD. Chứng minh rằng MA = MC.

Bài 3. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm *O* và $AB < AC$. Vẽ đường kính *AD* của đường tròn (*O*). Kẻ *BE* và *CF* vuông góc với *AD* (*E*, *F* thuộc *AD*). Kẻ *AH* vuông góc với *BC* (*H* thuộc *BC*). Gọi *M* là trung điểm của *B*C**.** Chứng minh *ME* = *MF*.

Mức độ 4: VDC

Bài 1. Cho tam giác ABC có AC = 2AB nội tiếp đường tròn (O; R). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại M. BM cắt đường tròn (O) tại.D. Chứng minh rằng: $CD = BD$

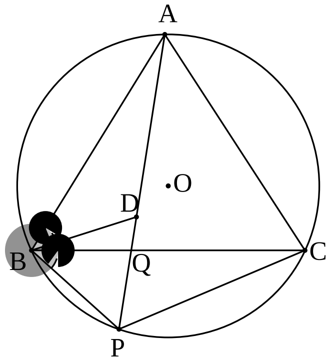
Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn K tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại S. SE, SF lần lượt cắt (O) tại M, N khác S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác.A. Gọi EN, FM lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F. Gọi GH cắt MN tại T. Chứng minh tam giác AST cân

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A vẽ đường tròn (O) đường kính H**C.** Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa Avẽ nửa đường tròn (O’) đường kính B**C.** Qua điểm E thuộc nửa đường tròn (O) kẻ EI vuông góc với BC cắt nửa đường tròn (O’) ở F. Gọi K là giao điểm của EH và BF. Chứng minh rằng CA = CK.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Mức độ 1: NB

Bài 1.

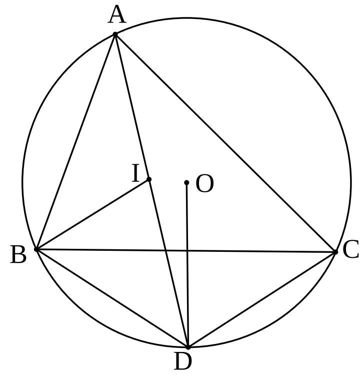


Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P.

Mặt khác, $\widehat{BPD} = \widehat{BPA} = \widehat{BCA} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O)).

Vậy nên tam giác PDB đều.

Bài 2.



Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A.

Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.

Mặt khác $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$

(Góc nội tiếp chắn cung CD) mà

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, $\widehat{IBC} = \widehat{IBA}$

(Tính chất phân giác) suy ra

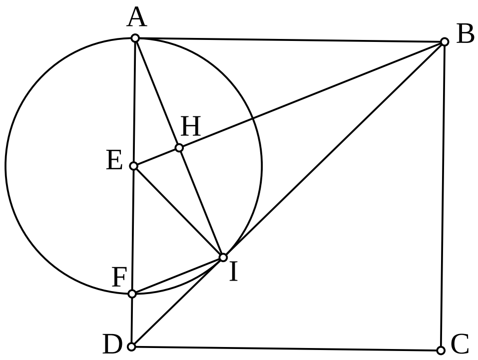
$\widehat{IBD} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$.

Nhưng $\widehat{BID} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$ (Tính chất góc ngoài).

Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

Nhận xét: Thông qua bài toán này ta có thêm tính chất: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là giao điểm của phân giác trong góc A với (O).

Bài 3.



Tam giác ABI cân tại B nên

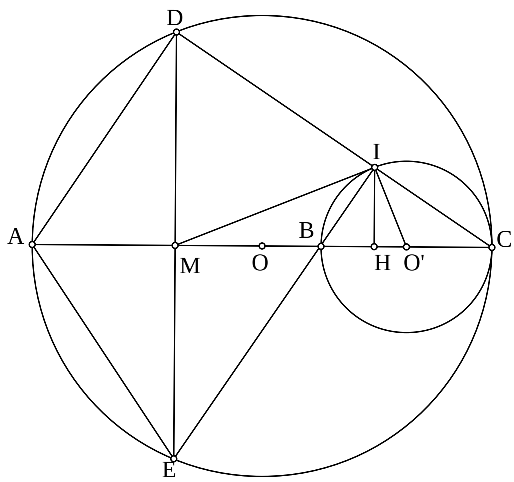
$\widehat{BAI} = \widehat{BIA}$ suy ra $\widehat{EAI} = \widehat{EIA}$ hay EA = EI (1).

Xét ΔDIE vuông cân đỉnh I do đó IE = ID (2).

Từ (1) và (2) suy ra AE = ID (đpcm).

Mức độ 2: TH

Bài 1.



Đường kính ACvuông góc

với dây DE tại M $\Rightarrow MD = ME$.

Tứ giác ADBE có MD = ME

MA = MB(gt), $AB \perp DE$

$\Rightarrow$ ADBE là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nhau).

Ta có $\widehat{BIC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nủa đường tròn (O'))

$\widehat{ADC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow BI \perp CD$ và $AD \perp DC$ nên AD // BI, mà BE // AD

$\Rightarrow$ E, B, I thẳng hàng (tiên đề Ơclit).

ΔDIE có IM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Rightarrow$ MI = MD.

Bài 2.

Ta có

$.\ \widehat{DBK} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DA} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AK}\right);.\ \text{sđ}\,\widehat{DIB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{KC}\right)$

Vì $\text{sđ}\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DA}$ và ΔDBI cân tại D

nên $\text{sđ}\overset{\frown}{KC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AK}$. Suy ra $AK = CK$

hay ΔKAC cân tại K (đpcm).

Bài 3.

Dựng đường kính HN của đường tròn (C) cắt đường tròn (O) tại K khi đó ta có

CN = CH = HK và

MC.MK = MH.MN (=MD.ME)

$\Rightarrow$ MC.MK = (HC – MC). (HC + MC)

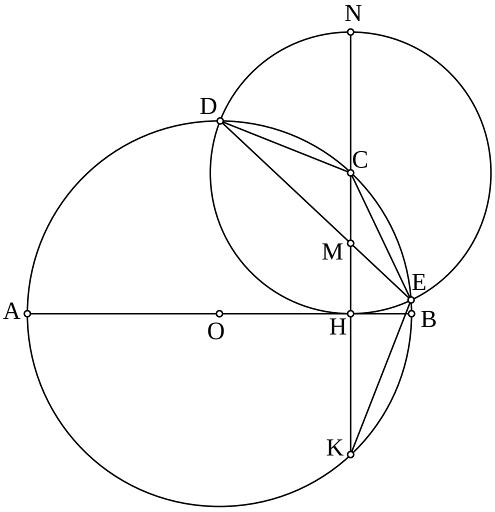
$\Leftrightarrow$ MC.MK $= HC^2 - MC^2$

$\Leftrightarrow MC(MC + MK) = HC^2$

Hay $\Leftrightarrow MC(MC + MK) = HC^2$

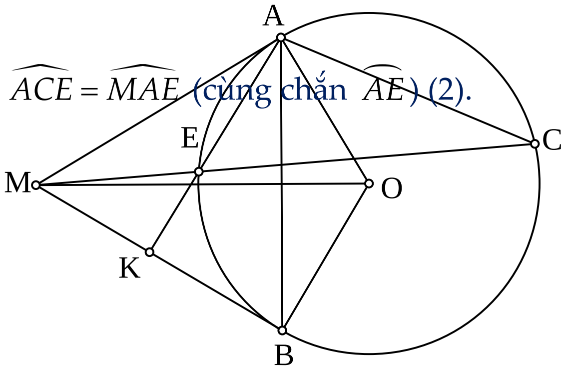
Nên $\Leftrightarrow MC.2HC = HC^2 \Leftrightarrow HC = 2MC$

là điều phải chứng minh.



Mức độ 3: VDT

Bài 1.



Do $MB//AC$ nên $\widehat{BMC} = \widehat{ACM}$ (1), ta lại có $\widehat{ACM} = \widehat{ACE} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta KME \sim \Delta KAM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MK}{AK} = \frac{EK}{MK}$ hay $MK^2 = AK.EK$ (3).

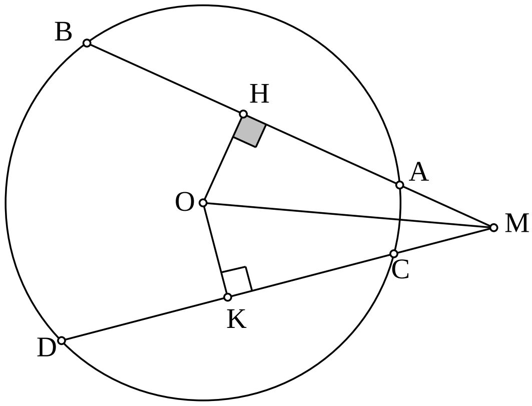
Ta thấy $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$).

Từ đó $\Delta EBK \sim \Delta BAK$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{EK}{BK}$ hay $BK^2 = AK.EK$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $MK^2 = KB^2$ nghĩa là $MK = MB$ (đpcm).

Bài 2.



Vẽ $OH \perp AB\left(H \in AB\right)$, $OK \perp CD\left(K \in CD\right)$.

Ta có AB = CD (gt), nên

OH = OK (định lý liên hệ dây cung và khoảng cách đến tâm) và H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD (định lý đường kính vuông góc dây cung)

$\Rightarrow$ AH = CK.

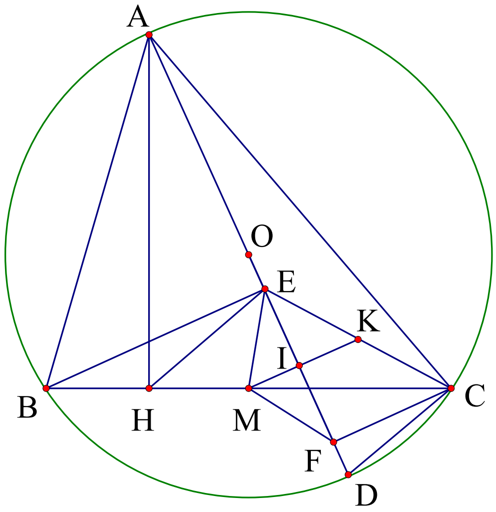
Xét ΔOHM $\left(\widehat{OHM} = 90^0\right)$ có OM (cạnh chung) và OH = OK,

do đó $\Delta OHM = \Delta OKM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MH = MK$.

Ta có $MH - AH = MK - CK \Rightarrow MA = MC$.

Bài 3.



Theo bài có $\widehat{AEB} = \widehat{AHB} = 90^0$.

Suy ra bốn điểm *A*, *B*, *H*, *E* cùng thuộc một đường tròn.

Tứ giác ABHE nội tiếp đường tròn $\Rightarrow$ $\widehat{BAE} = \widehat{EHC}$

Mặt khác, $\widehat{BCD} = \widehat{BAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{EHC}$

suy ra *HE // CD.*

Gọi *K* là trung điểm của *EC, I* là giao điểm của *MK* với *ED.*

Khi đó *MK* là đường trung bình của ΔBCE

$\Rightarrow MK \,//\, BE$; mà $BE \perp AD$ (gt)

$\Rightarrow MK \perp AD$ hay $MK \perp EF$ (3)

Lại có $CF \perp AD$ (gt) $\Rightarrow MK \,//\, CF$ hay $KI \,//\, CF$.

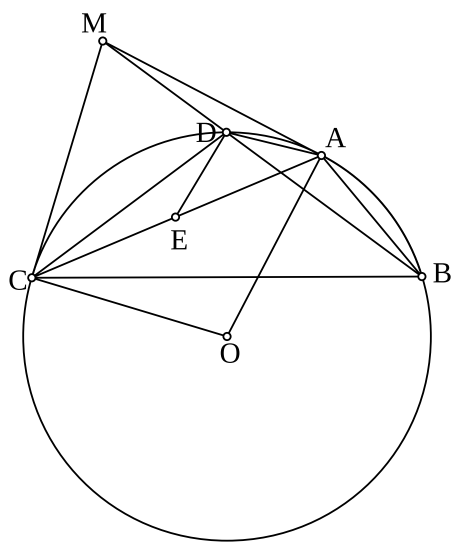
ΔECF có $KI \,//\, CF$, $KE = KC$ nên $IE = IF$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra *MK* là đường trung trực của *EF*

$\Rightarrow ME = MF$

Mức độ 4: VDC

Bài 1.



Xét ΔMAD và ΔMBA có $\widehat{AMB}$ chung;

$\widehat{MAD} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \Delta MAD \# \Delta MBA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{MD}{MA}$.

Ta có $MA = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MA} = \dfrac{MD}{MC}$.

Lập luận tương tự, ta có $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{CD}{BC}$.

Suy ra $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BC} \Rightarrow AD.BC = AB.CD$.

Dựng điểm $E \in AC$ sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ADB}$

ΔDAB và ΔDEC có $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ (cách dựng), $\widehat{ABD} = \widehat{ECD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \Delta DAB \backsim \Delta DEC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow AB.DC = EC.BD$ (1).

Do $\widehat{EDC} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ADE}$, nên $\Delta DAE \backsim \Delta DBC$ (g.g)

$\Rightarrow AD.BC = BD.AE$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AB.CD + AD.BC = BD\left(AE + EC\right) = BD.AC$.

Ta có $\begin{cases} AD.BC = AB.CD \\ AD.BC + AB.CD = AC.BD \end{cases} \Rightarrow 2AB.CD = AC.BD$.

Mà $AC = 2AB$ (gt) $\Rightarrow 2AB.CD = 2AB.BD \Rightarrow CD = BD$.

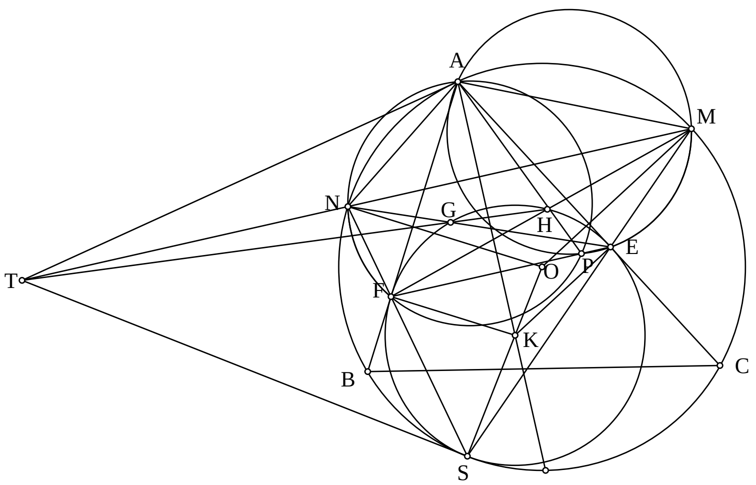
Bài 2.

Phân tích

+ Để chứng minh AMPN là hình bình hành ta chứng minh các cặp cạnh đối song song dựa vào các góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây cung.

+ Để chứng minh TA = TS ta nghỉ đến việc chứng minh TA, TS là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Cách giải



Ta thấy $\widehat{APF} = 180 - \widehat{ANS} = \widehat{AMS} = 180 - \widehat{APE}$

suy ra F, P, E thẳng hàng.

Ta có $\widehat{APM} = \widehat{AEM}$ góc nội tiếp chắn cung AM, $\widehat{AEM} = \widehat{SEC}$ (đối đỉnh)

Vì AC là tiếp tuyến của đường tròn (K) nên $\widehat{SEC} = \widehat{EFS}$ (Tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây).

Mà $\widehat{EFS} = \widehat{PAN}$ do tứ giác ANFP nội tiếp.

Vậy $\widehat{APM} = \widehat{PAN} \Rightarrow AN // PM$.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AM // PN \Rightarrow ANPM$ là hình bình hành.

+ Các tam giác SKF, SON cân có chung đỉnh S nên đồng dạng suy ra KF // ON

tương tự KE // OM suy ra $\frac{SF}{SN} = \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SM}$ suy ra MN // EF.

Từ đó $\widehat{HGE} = \widehat{HFE} = \widehat{HMN}$ suy ra tứ giác MNGH nội tiếp.

Giả sử TS cắt (O) và (K) lần lượt tại S_1, S_2

thì $TS.TS_1 = TM.TN = TH.TG = TS.TS_2$

suy ra $TS_1 = TS_2$ suy ra $S_1 \equiv S_2 \equiv S$.

Vậy TS là tiếp tuyến của (O).

Tứ giác ANPM là hình bình hành nên AP và MN cắt nhau tại trung điểm I mỗi đường.

Ta có theo tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung:

$\widehat{IAM} = \widehat{PES} = \widehat{FST} = \widehat{NAS}$. Ta lại có $\widehat{AMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ASN}$.

Vậy $\Delta AIM \sim \Delta ANS$ suy ra $AM.SN = AI.AS$.

Tương tự $AN.SM = AI.SN = AM.SN$.

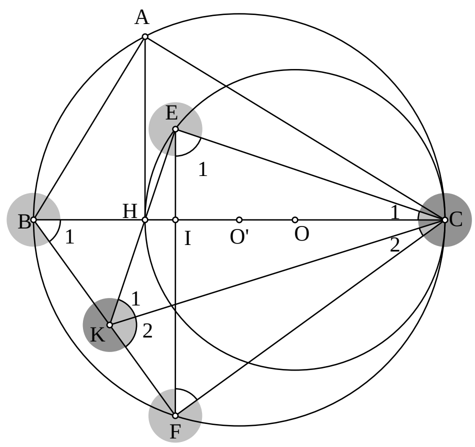
Từ đó theo tính chất tiếp tuyến do TS tiếp xúc với (O)

suy ra $\frac{TM}{TN} = \frac{SM^2}{SN^2} = \frac{AM^2}{AN^2}$.

Vậy TA tiếp xúc với (O). Suy ra TA = TS.

Bài 3.

Phân tích:



Ta có $CA^2 = CB.CH$

nên để chứng minh $CA = CK$,

ta sẽ chứng minh $CK^2 = CB.CH$.

Điều này làm ta nghĩ đến chứng minh $\Delta CKH \sim \Delta CBK$,

do đó cần chứng minh $\widehat{K_1} = \widehat{B_1}$.

Xét góc phụ với hai góc trên, cần chứng minh

$\widehat{ECK} = \widehat{BCF}$.

Muốn vậy cần chứng minh $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Chỉ cần chứng minh hai góc phụ với chúng là $\widehat{E_1}$ và $\widehat{K_2}$ bằng nhau (do $CEKF$ là tứ giác nội tiếp).

Cách giải

Tứ giác $CEKF$ có: $\hat{E} + \hat{F} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{K_1}$.

Do đó hai góc phụ với chúng bằng nhau là $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Cùng cộng thêm $\widehat{BCK}$, ta được $\widehat{ECK} = \widehat{BCF}$.

Do đó hai góc phụ với chúng bằng nhau là $\widehat{K_1} = \widehat{B_1}$.

$\Delta CKH \sim \Delta CBK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{CH}{CK} \Rightarrow CK^2 = CB.CH$ (1).

Theo hệ thức lượng trong tam giác ABCvuông tại A ta có:

CA^2= C**B.** CH (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CA = CK$.

Chủ đề 5: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

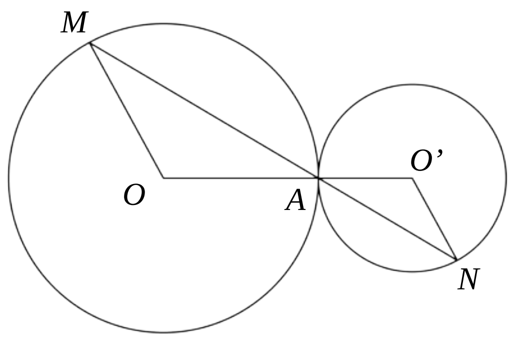
- Dựng mối quan hệ về góc: sole bằng nhau, đồng vị bằng nhau, trong cùng phía bù nhau,…
- Dựng mối quan hệ bắc cầu: cùng vuông góc hoặc song song với đường thứ ba.
- Áp dụng định lý đảo của định lý Talet.
- Áp dụng tính chất của các tứ giác đặt biệt, đường trung bình của tam giác.
- Dùng tính chất hai dây chắn giữa hai cung bằng nhau của một đường tròn.

2. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: Nhận biết

Câu 1. Cho hai đường tròn (O), (O') có bán kính lần lượt là R, R' ($R > R'$) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Qua A kẻ cát tuyến cắt hai đường tròn (O), (O') lần lượt tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng: $OM // O'N$.

Lời giải



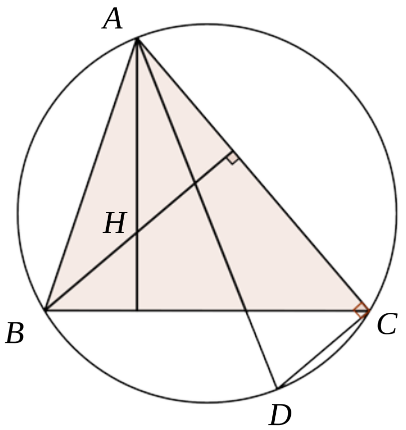
Ta có:

- $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$ (do tam giác OAM cân)
- $\widehat{OAM} = \widehat{O'AN}$ (đối đỉnh)
- $\widehat{O'AN} = \widehat{O'NA}$(do tam giác $O'AN$ cân)

Vậy $\widehat{OMA} = \widehat{O'NA}$(sole trong) nên $OM // O'N$.

Câu 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm tam giác và D là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh $BH // CD$.

Lời giải



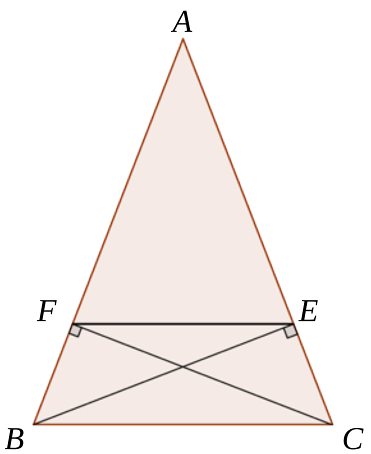
Ta có:

- $BH \perp AC$ (do H là trực tâm của tam giác)
- $DC \perp AC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BH // CD$.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ hai đường cao BE, CF của tam giác. Chứng minh rằng: $EF // BC$.

Lời giải



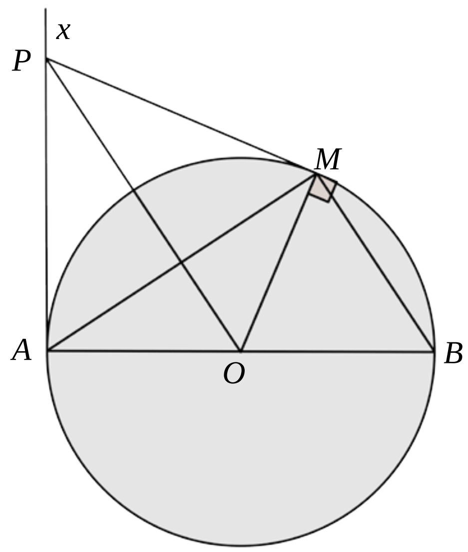
Xét tam giác BFC và CEB, có: $\begin{cases} \widehat{F} = \widehat{E} = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{C} \left(\Delta ABC \text{ cân} \right) \\ BC \text{ chung} \end{cases}$ nên hai tam giác bằng nhau.

Vậy $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{CE}{CA} \Rightarrow EF // BC$.

Mức độ 2: Thông hiểu

Câu 1. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB, kẻ tiếp tuyến Ax và trên đó lấy điểm P sao cho $AP > R$. Dựng tiếp tuyến PM (M là tiếp điểm). Chứng minh $BM // OP$.

Lời giải



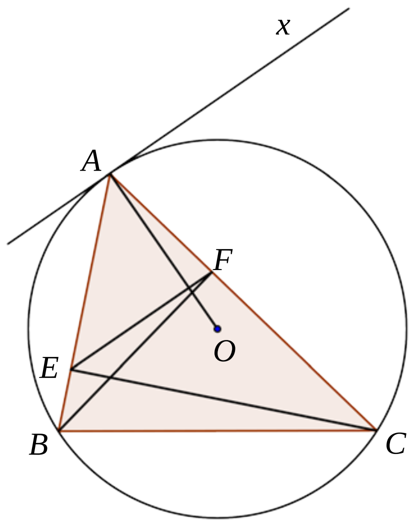
Ta có:

- $AM \perp PO$ (tính chất hai tiếp tuyến xuất phát từ 1 điểm nằm ngoài đường tròn)
- $AM \perp MB$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow OP//BM$ (cùng vuông góc với đường AM)

Câu 2. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ C, B của tam giác ABC. Chứng minh $EF // d$ với d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.

Lời giải



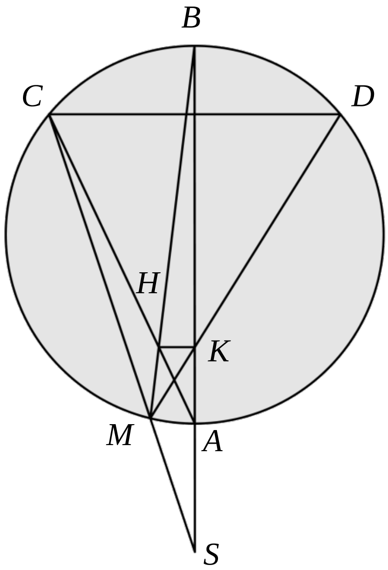
Ta có: $EFCB$ là tứ giác nội tiếp vì $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$ (do BF, CE là đường cao)

- $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)
- $\widehat{ABC} = \widehat{AFE}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác $EFCB$ nội tiếp)

$\widehat{xAC} = \widehat{AFE}$ (so le trong) nên $Ax//EF$.

Câu 3. Cho đường tròn (O), hai điểm C, D thuộc đường tròn, lấy B là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$. Kẻ đường kính BA, trên tia BA lấy điểm S ngoài đường tròn, SC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M, DM cắt BA tại K, BM cắt AC tại H. Chứng minh: $HK // CD$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{BD}$) nên tứ giác $HKAM$ nội tiếp.

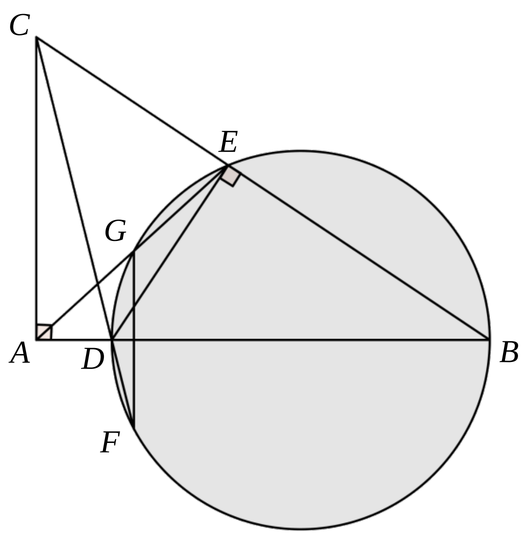
- $\widehat{HKM} = \widehat{HAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HM}$)
- $\widehat{HAM} = \widehat{CAM} = \widehat{CDM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CM}$)

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{CDM}$ (đồng vị) nên $HK // CD$.

Mức độ 3: VDT

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, lấy điểm D nằm giữa A, B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E, các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm F, G. Chứng minh: $AC // FG$.

Lời giải



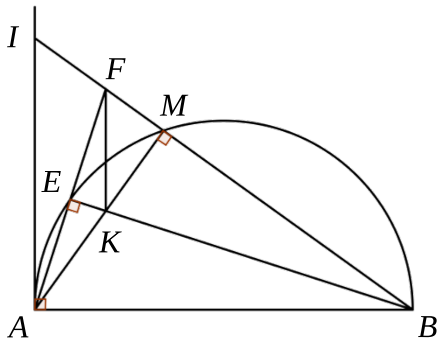
Ta có: $\widehat{CAD} = \widehat{CED} = 90°$ nên tứ giác $ADEC$ nội tiếp.

- $\widehat{DFG} = \widehat{DEG}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DG}$)
- $\widehat{DEG} = \widehat{DEA} = \widehat{DCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \widehat{DFG} = \widehat{DCA}$ (sole trong) nên $FG // AC$.

Câu 2. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M bất kỳ nằm trên nửa đường tròn (khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I, tia phân giác góc $\widehat{IAM}$ cắt nửa đường tròn tại E, cắt BM tại F, tia BE cắt K. Chứng minh: $FK // AI$.

Lời giải

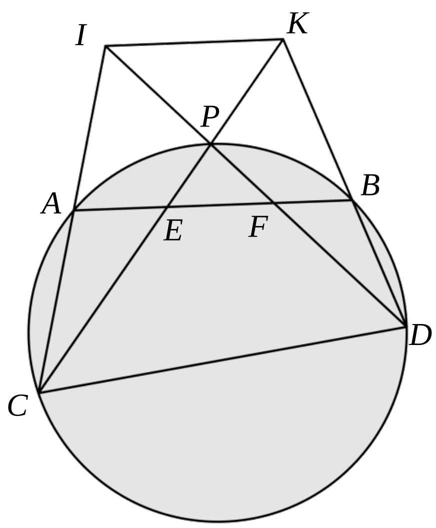


Xét tam giác FAB có $AM \perp BF$, $BE \perp AF$ nên K là trực tâm của tam giác.

Ta có: $\begin{cases} AI \perp AB \text{ (gt)} \\ FK \perp AB \text{ (cmt)} \end{cases}$ nên $FK // AI$.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là trung điểm cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (phần không chứ C, D). Hai dây PC, PD lần lượt cắt AB tại E, F. Các dây AC, PD cắt nhau tại I. Các dây BD, PC cắt nhau tại K. Chứng minh $\widehat{CID} = \widehat{CKD}$ và $IK // AB$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{IDK} = \widehat{ICK}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{PB}$) nên tứ giác $CDKI$ nội tiếp.

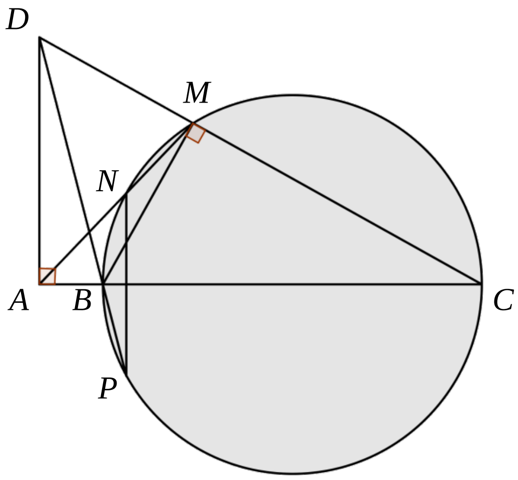
- $\widehat{KEB}=\frac{1}{2}\left(\text{sd}\overset{\frown}{PB}+\text{sd}\overset{\frown}{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\text{sd}\overset{\frown}{PA}+\text{sd}\overset{\frown}{AC}\right)=\widehat{PDC}$
- $\widehat{PDC}=\widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{IC}$)

$\Rightarrow \widehat{IKE}=\widehat{KEB}$ (sole trong) nên $AB//IK$.

Mức độ 4: VDC

Câu 1. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường thẳng d qua A và vuông góc AC. Vẽ đường tròn đường kính BC và lấy điểm một điểm M bất kỳ, tia CM cắt d tại D, tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai là N, tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai là P. Chứng minh: $AD//NP$.

Lời giải



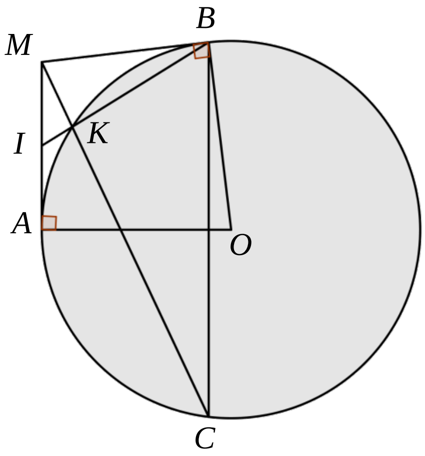
Ta có: $\widehat{DAB}=\widehat{DMB}=90^\circ$ nên tứ giác $ABMD$ nội tiếp.

- $\widehat{BPN}=\widehat{BMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BN}$)
- $\widehat{BMN}=\widehat{BDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{BPN}=\widehat{BDA}$ (so le trong) nên $NP//AD$.

Câu 2. Cho đường tròn (O). Trên đó lấy điểm A cố định và kẻ tiếp tuyến Ax tại A. Lấy M tùy ý trên Ax, kẻ tiếp tuyến BM với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm MA và K là giao điểm thứ hai của BI với đường tròn (O). Tia MK cắt (O) tại C. Chứng minh: $BC//MA$.

Lời giải



Ta có: $IM^2 = IA^2 = IK.IB$ nên $\dfrac{IM}{IK} = \dfrac{IB}{IM}$

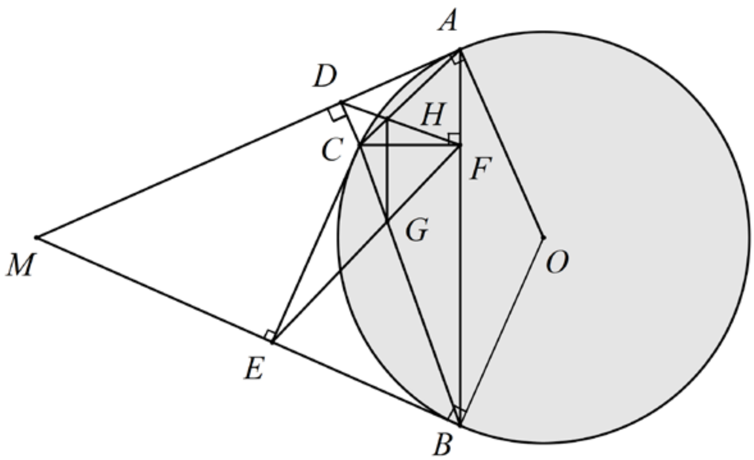
Mà $\hat{I}$ chung nên hai tam giác ΔIMK, ΔMBK đồng dạng với nhau. Suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{MBK}$.

Ta lại có: $\widehat{MBK} = \widehat{BCK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BK}$)

$\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{BCK}$ (sole trong) nên $AM // BC$.

Câu 3. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn, trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ lấy điểm C. Từ C lần lượt hạ vuông góc lên MA, MB, AB tại D, E, F. Gọi H là giao điểm của AC, DF và G là giao điểm của BC, EF. Chứng minh tứ giác $CHFG$ nội tiếp và $HG//AB$.

Lời giải



Ta có:

Tứ giác $ADCF$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90°$ nên là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $BECF$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$ nên là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{HFC} = \widehat{DAC} = \widehat{ABC} = 90° - \widehat{FCG}$ và $\widehat{GFC} = \widehat{EBC} = \widehat{CAB} = 90° - \widehat{FCH}$

Do đó, $\widehat{HFG} + \widehat{HCG} = 180°$ nên tứ giác $HCGF$ nội tiếp đường tròn.

Ta có: $\widehat{CHG} = \widehat{CFG} = \widehat{CBE} = \widehat{CAB}$

Suy ra: $HG//AB$ (do có $\widehat{CHG}=\widehat{CAB}$ ở vị trí sole trong).

Chủ đề 6: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

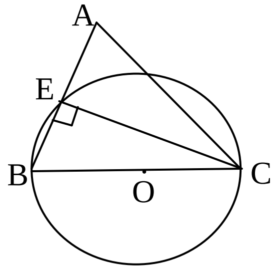
I. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

1. Tính chất của hai tia phân giác của hai góc kề bù.
2. Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành một góc bằng 90 độ
3. Tổng của hai góc phụ nhau bằng 90 độ
4. Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng thứ ba
5. Tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.
6. Định nghĩa ba đường cao trong tam giác, định nghĩa đường trung trực của đoạn thẳng.
7. Định lý Pitago đảo.
8. Tính chất đường kính của một đường tròn đi qua trung điểm của một dây cung.
9. Tính chất tiếp tuyến của đường tròn.
10. Tiếp tuyến chung và đường nối tâm của hai đường tròn, dây cung chung và đường nối
    tâm của hai đường tròn.
11. Sử dụng hai góc kề bù bằng nhau.
12. Sử dụng chứng minh một tam giác bằng một tam giác vuông
13. Sử dụng tính chất tam giác cân
14. Sử dụng tính chất giao điểm ba đường cao của tam giác
15. Sử dụng phép quay góc vuông hoặc góc quay vuông
16. Chứng ming phản chứng

II. CÁC VÍ DỤ.

MỨC ĐỘ 1: NHẬN BIẾT.

Câu 1: Cho tam giác ABC nhọn, dựng đường tròn tâm O đường kính BC, cắt AB tại E. Chứng minh $CE \perp AB$.

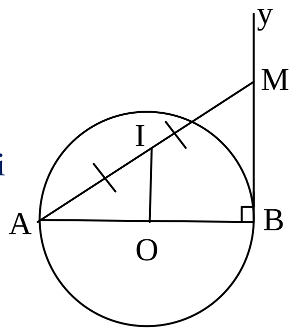


Hướng dẫn giải

Vì $\angle BEC$ là góc nội tiếp chắn đường kính BC nên $\angle BEC = 90^0$.

Do đó $CE \perp AB$.

Câu 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, kẻ tiếp tuyến By. Lấy điểm M thuộc By. Gọi I là trung điểm của AM. Chứng minh rằng $IO \perp AB$.

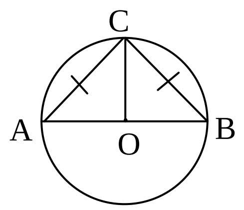


Hướng dẫn giải

Dễ thấy IO là đường trung bình trong tam giác AMB (đoạn nối trung điểm của hai cạnh bên) nên $IO \,//\, MB$. Lại có $MB \perp AB$ vì MB là tiếp tuyến của (O), từ đó $IO \perp AB$.

Câu 3: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, lấy $C \in (O)$ sao cho $CA = CB$. Chứng minh rằng $CO \perp AB$.

Hướng dẫn giải

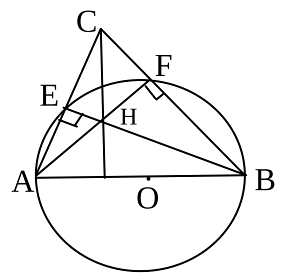


Dễ thấy O là trung điểm của AB nên CO là đường trung tuyến trong tam giác AB**C.** Lại có $CA = CB$ nên tam giác ABC cân tại C, khi đó đường trung tuyến CO cũng là đường cao, hay $CO \perp AB$.

MỨC ĐỘ 2: THÔNG HIỂU.

Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC, đường tròn đường kính AB cắt AC, BC lần lượt tại E, F. Gọi H là giao điểm giữa AF và BE. Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

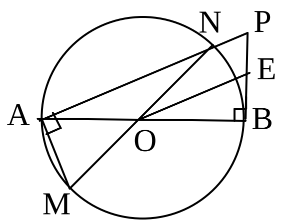
Hướng dẫn giải



Vì $\angle AEB, \angle AEB$ là các góc nội tiếp chắn đường kính AB nên $\angle AEB = 90^0, \angle AEB = 90^0$. Suy ra H là giao điểm của 2 đường cao AF và BE nên là trực tâm của tam giác ABC, do đó CH là đường cao còn lại và $CH \perp AB$..

Câu 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB và MN. Tiếp tuyến tại B cắt AN tại P, gọi E là trung điểm của BP. Chứng minh rằng $OE \perp AM$.

Hướng dẫn giải

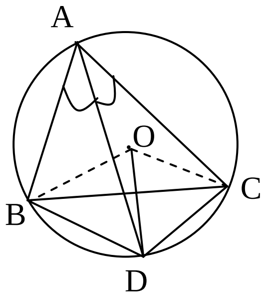


Dễ thấy OE là đường trung bình trong tam giác ABP (đoạn nối trung điểm của hai cạnh bên) nên $OE // AP$. Vì $\angle MAN$ là góc nội tiếp chắn đường kính MN nên $\angle MAN = 90^0$ hay $AP \perp AM$.

Từ đó $OE \perp AM$..

Câu 6: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường phân giác $\angle BAC$ cắt (O) tại **D.** Chứng minh rằng $OD \perp BC$.

Hướng dẫn giải



Vì $\angle BAD = \angle DAC$ nên $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}$, suy ra DB = D**C.** Lại có

OB = OC nên OD là đường trung trực của đoạn BC hay $OD \perp BC$.

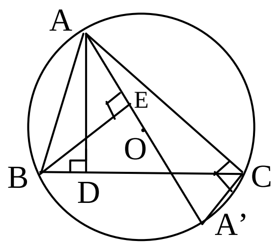
MỨC ĐỘ 3: VẬN DỤNG THẤP.

Câu 7: Cho tam giác ABC nhọn $(AB < BC)$, nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD và đường kính AA’, gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ B lên AA’.

a) Chứng minh tứ giác ADBE nội tiếp.

b) Chứng minh $DE \perp AC$.

Hướng dẫn giải



a) Vì đỉnh E và D cùng nhìn cạnh AB dưới một góc bằng nhau $\left(= 90^0\right)$

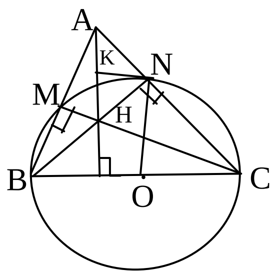
nên tứ giác ADBE nội tiếp.

b) Do tứ giác ADBE nội tiếp nên $\angle EDC = \angle BAE$ (cùng bù với góc $\angle BDE$), mà $\angle DCA' = \angle BAE$ (cùng chắn cung A’B) nên $\angle EDC = \angle DCA'$. Do đó DE song song A’C (cặp góc so le trong bằng nhau).

Lại có $\angle A'CA$ là góc nội tiếp chắn đường kính nên $\angle A'CA = 90^\circ$ hay $A'C \perp AC$. Từ đó $DE \perp AC$..

Câu 8: Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi H là giao điểm của BN và CM, K là trung điểm của AH. Chứng minh rằng $KN \perp ON$.

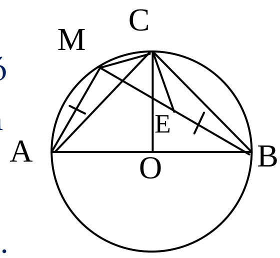
Hướng dẫn giải



Vì $\angle CMB, \angle BNC$ là các góc nội tiếp chắn đường kính BC nên $\angle CMB = 90^0, \angle BNC = 90^0$. Suy ra H là giao điểm của 2 đường cao CM và BN nên là trực tâm của ΔABC, do đó AH là đường cao còn lại hay $AH \perp BC$. Vì NK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AH trong ΔAHN vuông tại N nên KN = KH hay ΔKHN cân tại K, do đó $\angle KNH = \angle KHN$, lại có $\angle KHN = \angle NCB$ (cùng phụ với $\angle HAN$) nên $\angle KNH = \angle NCB$ (1). Hơn nữa $\angle HNO = \angle HBO$ (ΔBON cân tại O) (2).Từ (1), (2) ta có $\angle KNO = \angle KNH + \angle HNO = \angle NCB + \angle HBO = 90^o$. Vậy $KN \perp ON$..

Câu 9: Cho đường tròn (O) đường kính AB, bán kính $CO \perp AB$, M thuộc cung nhỏ AC (M khác A và C). Trên đoạn BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh $MC \perp CE$.

Hướng dẫn giải



Vì $CO \perp AB$ nên C là điểm chính giữa cung AB và CA = C**B.** Từ đó xét ΔAMC và ΔBEC có AM = BE (gt), $\angle MAC = \angle EBC$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$)

CA = CB (cmt) nên $\Delta AMC = \Delta BEC$ (c-g-c). Suy ra $\angle MCA = \angle ECB$.

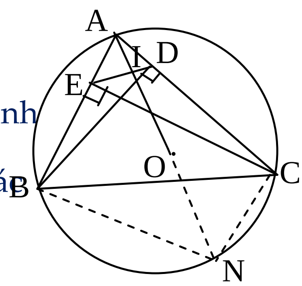
Khi đó $\angle MCE = \angle MCA + \angle ACE = \angle ECB + \angle ACE = \angle ACB = 90^o$

(góc nội tiếp chắn đường kính AB), vậy $MC \perp CE$.

MỨC ĐỘ 4: VẬN DỤNG CAO.

Câu 10: Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC < BC)$ nội tiếp đường tròn (O), có hai đường cao BD và CE. Chứng minh $OA \perp ED$.

Hướng dẫn giải



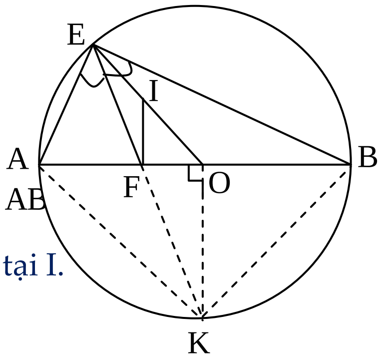
Kẻ thêm đường kính AN và gọi I là giao điểm của OA và E**D.** Vì đỉnh và D cùng nhìn cạnh BC dưới một góc bằng nhau $(=90^0)$ nên tứ giác BEDC nội tiếp, từ đó $\angle AED = \angle DCB$ vì cùng bù với góc $\angle BED$.

Lại có $\angle EAI = \angle BCN$, khi đó $\angle AED + \angle EAI = \angle DCB + \angle BCN = \angle ACN = 90^o$

nên $\angle AIE = 90^o$ hay $OA \perp ED$.

Câu 11: Cho đường tròn (O) đường kính AB và E là điểm bất kì nằm trên (O), E khác A và. **B.** Đường phân giác $\angle AEB$ cắt đoạn AB tại F. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh $IF \perp AB$.

Hướng dẫn giải



Giả sử EF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

Vì $\angle AEK = \angle BEK$ nên $\overset{\frown}{KA} = \overset{\frown}{KB}$, suy ra KA = K**B.** Lại có OA = OB nên OK là đường trung trực của đoạn AB hay $OK \perp AB$

Vì I thuộc đường trung trực đoạn EF nên IE = IF tức ΔIEF cân tại I.

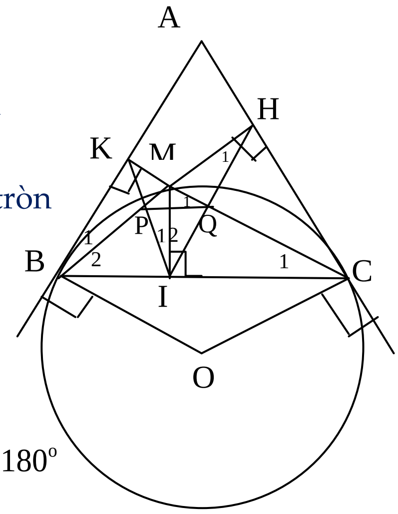
Do đó $\angle IFE = \angle IEF$, lại có $\angle OKE = \angle IEF$ (ΔOEK cân tại O)

nên $\angle IFE = \angle OKE$ là cặp góc đồng vị bằng nhau. Suy ra IF // OK,

từ đó $IF \perp AB$.

Câu 12: Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì không đi qua tâm. Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại. **A.** Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, A**B.** Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q. Chứng minh $PQ \perp MI$.

Hướng dẫn giải



Vì các tứ giác BKMI, CHMI có tổng hai góc đối bằng 180 nên là các tứ giác nội tiếp. Ta có $\angle I_1 = \angle B_1 \left(\frac{1}{2}\text{sd }\overset{\frown}{KM}\right)$ trong đường tròn ngoại tiếp BKMI, mà $\angle B_1 = \angle C_1 \left(\frac{1}{2}\text{sd }\overset{\frown}{BM}\right)$ nên $\angle I_1 = \angle C_1$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\angle I_2 = \angle B_2$. Từ đó

$\angle PMQ + \angle PIQ = \angle PMQ + \angle I_1 + \angle I_2 = \angle PMQ + \angle C_1 + \angle B_2 = 180^o$

nên tứ giác PMQI nội tiếp. Suy ra $\angle Q_1 = \angle I_1$ mà $\angle I_1 = \angle C_1$ nên

$\angle Q_1 = \angle C_1$, do đó PQ // BC (cặp góc đồng vị bằng nhau). Theo giả thuyết $BC \perp MI$ nên $PQ \perp MI$.

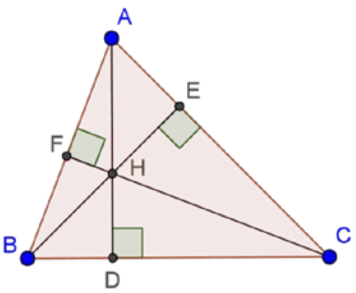
Chủ đề 7: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

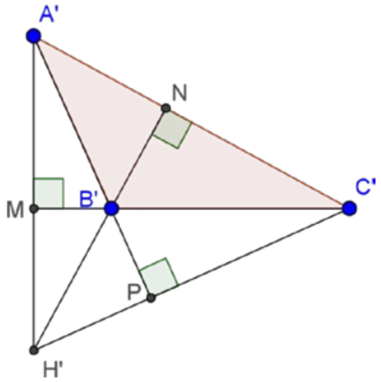
1. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

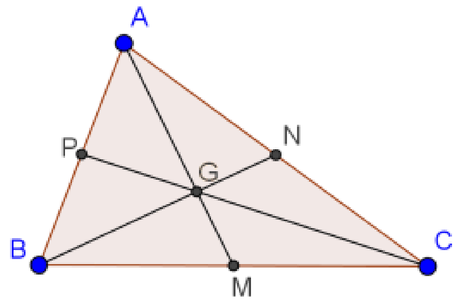
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

Chứng minh các đường thẳng đồng quy

- Áp dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.
- Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng còn lại đi qua điểm đó.
- Dùng định lý đảo của định lý Talet.





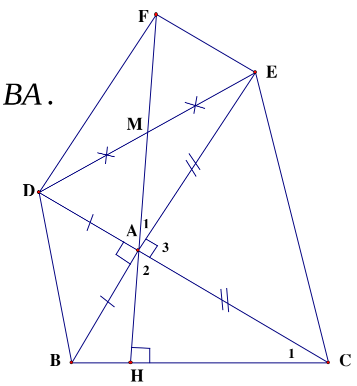


2. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB.

Câu 1: Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, đường cao AH. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABD, ACE ($\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^\circ$). Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng H, A, M thẳng hàng.

<u>*Giải*</u>



Dựng hình bình hành $AEFD$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AF (t/c hình bình hành) và $EF = DA = BA$.

Mặt khác $EA = CA$ (gt); $\widehat{AEF} = \widehat{CAB}$ (Cùng bù với $\widehat{DAE}$).

$\Rightarrow \Delta EFA = \Delta ABC$ (c – g – c).

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (Hai góc tương ứng).

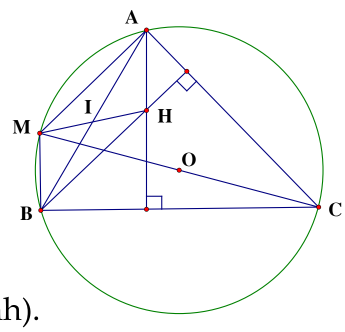
Mà $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 180^\circ$ hay $\widehat{FAH} = 180^\circ \Rightarrow M$, A, H thẳng hàng.

Câu 2: Cho ΔABC có trực tâm H nội tiếp (O) đường kính CM, gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng H, I, M thẳng hàng.

<u>*Giải*</u>



$MB \perp BC$, $AH \perp BC$ (suy từ giả thiết).

$\Rightarrow MB // AH$.

Mà $MA // BH$ (cùng vuông góc với AC).

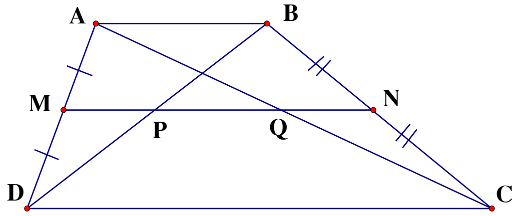
$\Rightarrow AMBH$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AB$ cắt MH tại trung điểm I của AB và MH (t/c hình bình hành).

Suy ra H, I, M thẳng hàng.

Câu 3: Chứng minh rằng: các trung điểm của hai cạnh bên và hai đường chéo của một hình thang luôn thẳng hàng.

Giải



Giả sử hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$

và M, N, P, Q thứ tự là trung điểm

của AD, BC, BD, AC.

Cần chứng minh M, N, P, Q thẳng hàng.

Từ (gt) $\Rightarrow MN$, MP, MQ thứ tự là đường

trung bình của hình thang $ABCD$, ΔABD, ΔACD.

$\Rightarrow MN//AB$; $MP//AB$; $MQ//CD$ hay $MQ//AB$.

$\Rightarrow M$, N, P, Q thẳng hàng (theo tiên đề Ơclít).

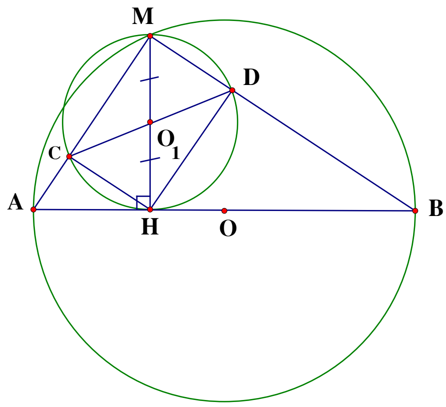
Mức độ 2: TH.

Câu 4: Cho (O) đường kính AB. Điểm M chuyển động trên (O), $M \neq A; M \neq B$. Kẻ MH vuông góc với AB. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính MH cắt đường thẳng MA và MB tại C và D. Chứng minh rằng:

a) C, D, O_1 thẳng hàng.

b) $ABCD$ nội tiếp.

Giải



a) Ta có :

$\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)).

$\Rightarrow \widehat{CMD} = 90^\circ$.

$\Rightarrow CD$ là đường kính của (O_1).

Suy ra C, D, O_1 thẳng hàng.

b) $MCHD$ là hình chữ nhật nội tiếp (O_1).

$\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MHD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$).

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{B} \Rightarrow \widehat{MCD} + \widehat{ACD} = \widehat{B} + \widehat{ACD} = 180^\circ$.

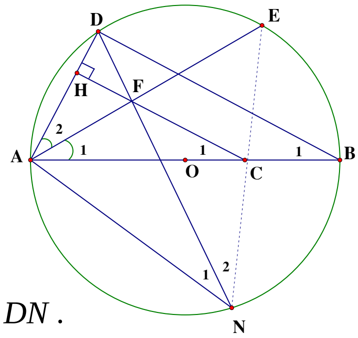
Vậy $ABCD$ nội tiếp.

Câu 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy điểm D bất kỳ (khác A, B). Lấy điểm C bất kỳ trong đoạn AB, kẻ $CH \perp AD$ $(H \in AD)$. Phân giác của $\widehat{BAD}$ cắt (O) tại E, cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt (O) tại N. Chứng minh N, C, E thẳng hàng.

Giải

(gt) $\Rightarrow HC//DB$ (cùng vuông góc với AD).

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (2 góc đồng vị).



Mà $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{N_1}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AFCN$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{FC}$).

Hay $\widehat{A_1} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt).

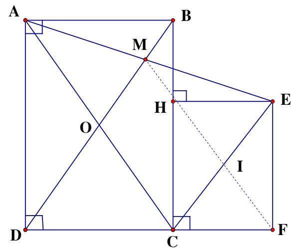
$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{DNE} = \widehat{FNE}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DE}$).

$\Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{FNE}$ mà NC và NE cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ DN.

Suy ra 2 tia NC và NE trùng nhau $\Rightarrow N$, C, E thẳng hàng.

Câu 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm 2 đường chéo. Điểm M trên đoạn OB, lấy E đối xứng với A qua M; H là hình chiếu của điểm E trên BC, vẽ hình chữ nhật $EHCF$. Chứng minh M, H, F thẳng hàng.

Giải



Gọi I là giao điểm của HF và CE.

$\Rightarrow H, I, F$ thẳng hàng $(*)$ (t/c hình chữ nhật).

Cần chứng minh: M, I, F thẳng hàng.

$MA = ME = \frac{1}{2}AE$ (gt) và $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ (t/c hình chữ nhật).

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của ΔACE.

$\Rightarrow OM // CE \Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{ICF}$ (2 góc đồng vị).

Mà $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ và $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ (vì ΔOCD cân tại O, ΔICF cân tại I, t/c hình chữ nhật).

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{IFC} \Rightarrow IF // AC$ mà $IM // AC$ (do IM là đường trung bình ΔACE).

$\Rightarrow M$, I, F thẳng hàng (tiên đề Ơclít).

Kết hợp với $(*)$ ta có: M, H, F thẳng hàng.

Mức độ 3: VDT.

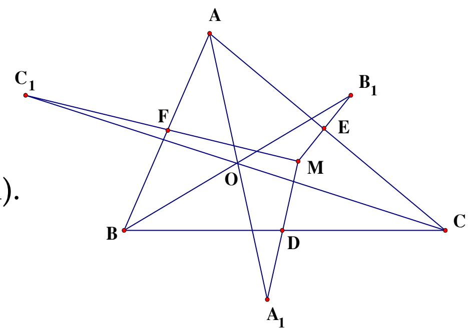
Câu 7: Cho ΔABC và điểm M bất kỳ trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi O là giao điểm của BB_1 và CC_1. Chứng minh các điểm A, O, A_1 thẳng hàng.

Giải

Gọi D, E, F thứ tự là trung điểm BC, CA, AB.

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔABC và ΔMB_1C_1 (suy từ giả thiết).

$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B_1C_1$ và $EF // BC // B_1C_1$.



$\Rightarrow BC // B_1C_1$ và $BC = B_1C_1$.

$\Rightarrow BCB_1C_1$ là hình bình hành.

$\Rightarrow O$ là trung điểm của BB_1 và CC_1 (t/c hình bình hành).

+ Tương tự ta có:

ABA_1B_1 là hình bình hành.

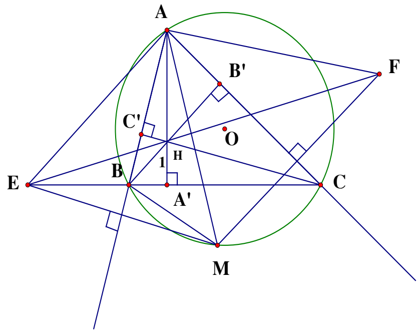
$\Rightarrow AA_1$ cắt BB_1 tại O là trung điểm của BB_1 và AA_1.

Suy ra A, O, A_1 thẳng hàng.

Câu 8: Cho ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O), điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC. E, F thứ tự là các điểm đối xứng của M qua AB, AC, gọi H là trực tâm ΔABC.

Chứng minh rằng E, H, F thẳng hàng.

Giải



Gọi B' là giao điểm của BH và AC;

A' là giao điểm của AH và BC.

Tứ giác $HA'CB'$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{A'CB'} = \widehat{BCA} = \widehat{BMA} = \widehat{BEA}$. (t/c đối xứng trục)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHBE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EHB} = \widehat{EAB} = \widehat{MAB}$.

Tương tự ta có: $\widehat{A'HC} = \widehat{ABC}$, $\widehat{CHF} = \widehat{MAC}$.

$\Rightarrow \widehat{EHB} + \widehat{H} + \widehat{A'HC} + \widehat{CHF} = \widehat{MAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{MAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^{\circ}$.

$\widehat{EHF} = 180^{\circ} \Rightarrow E$, H, F thẳng hàng.

Câu 9: Cho ΔABC nhọn, các đường cao AH, BD và CE. Gọi M, N, P, Q thứ tự là hình chiếu của H trên AB, BD, CE và AC. Chứng minh M, N, P, Q thẳng hàng.

Giải

+ Từ (gt) $\Rightarrow MH//CE$; $NH//AC \Rightarrow \dfrac{BM}{BE} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BN}{BD}$ (định lý Talét).

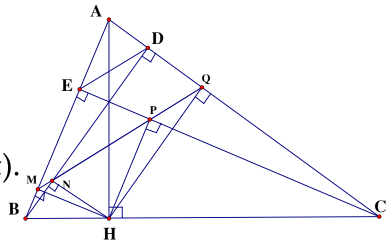
$\Rightarrow MN//ED$ (1) (định ký Talét đảo).

+ Chứng minh tương tự ta có: $PQ//ED$ (2).

+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông HAC và HAB ta có:

$AH^2 = AQ.AC = AM.AB \Rightarrow \dfrac{AQ}{AM} = \dfrac{AB}{AC}$ mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$ (vì $\Delta DAB \backsim \Delta EAC$ (g.g)).

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{AM} = \dfrac{AD}{AE}$ hay $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{AM}{AE} \Rightarrow MQ//ED$. (định lý Talét đảo)



Kết hợp với (1), (2) ta có:

M, N, Q thẳng hàng và M, P, Q thẳng hàng (tiên đề Ơclít).

Do đó M, N, P, Q thẳng hàng.

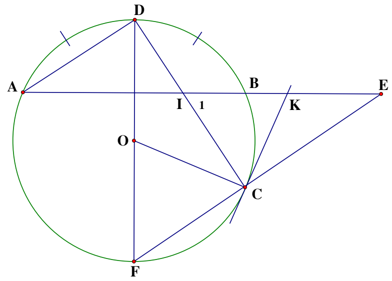
Mức độ 4: VDC.

Câu 10: Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy I thuộc đoạn AB sao cho $IA > IB$. Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ AB, DI cắt (O) tại điểm thứ hai C. Tiếp tuyến với (O) tại C cắt AB tại K. Lấy điểm E sao cho $KE = KI = \dfrac{1}{2}IE$, EC cắt (O) tại F.

Chứng minh rằng D, O, F thẳng hàng.

Giải

Ta có $\widehat{I_1} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{BC} + sđ\,\overset{\frown}{AD}\right)$. Mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$ (gt).



$\Rightarrow \widehat{I_1} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{BC} + sđ\,\overset{\frown}{DB}\right) = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{DBC}$.

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{ICK} = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{DBC}$ $\Rightarrow \Delta KIC$ cân tại $K \Rightarrow KI = KC$.

mà $KI = KE = \frac{1}{2}IE$ (gt).

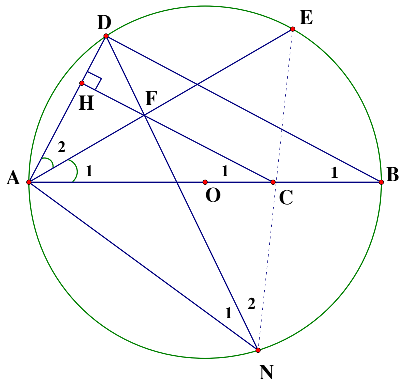
$\Rightarrow KC = IK = KE = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \Delta CIE$ vuông tại C.

$\Rightarrow \widehat{DCF} = 90^o \Rightarrow DF$ là đường kính của (O).

Suy ra D, O, F thẳng hàng.

Câu 11: Cho (O) đường kính AB. Trên (O) lấy điểm D bất kỳ (khác A, B). Lấy điểm bất kỳ trong đoạn AB, kẻ $CH \perp AD$ $(H \in AD)$. Phân giác của $\widehat{BAD}$ cắt (O) tại E, cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt (O) tại N. Chứng minh N, C, E thẳng hàng.

Giải



(gt) $\Rightarrow HC // DB$ (cùng vuông góc với AD)

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (2 góc đồng vị).

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$) $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_1}$.

Suy ra tứ giác $AFCN$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_2}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{FC}$).

Hay $\widehat{A_1} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt).

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{DNE} = \widehat{FNE}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DE}$).

$\Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{FNE}$ mà NC và NE cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ DN.

Suy ra 2 tia NC và NE trùng nhau nên N, C, E thẳng hàng.

Câu 12: Cho ΔABC, đường tròn bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với tia AB tại N. Kẻ đường kính MN. Trên tia đối của tia AB lấy điểm K sao cho $AK = BN$. Chứng minh rằng K, C, M thẳng hàng.

Giải

Gọi I, J theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, góc B của ΔABC.

(I) tiếp xúc với BC và AC thứ tự tại P và H.

(J) tiếp xúc với BC và BA thứ tự tại Q và K'.

Ta có:

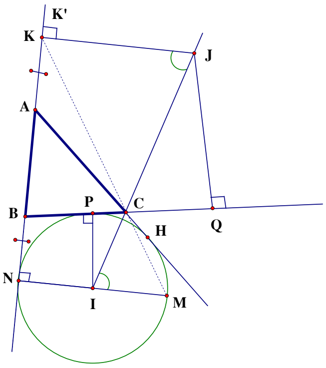
$CA+CB-AB=CA+CP+PB-AB$

$=CA+CH\ +NB-AB=AH\ +\ NB\ -\ AB=\ AN+NB-AB=2NB$ (t/c tiếp tuyến)

$\Rightarrow CA+CB-AB-2NB$.

Tương tự ta có: $CA+CB-AB\ =\ 2AK'$

$\Rightarrow AK=AK'=BN\Rightarrow K'\equiv K$



Mặt khác ΔPIC đồng dạng ΔQJC (g.g). Nên $\dfrac{IC}{JC}=\dfrac{IP}{JQ}=\dfrac{IM}{JK}$

mà $\widehat{CIM}=\widehat{CJK}$ (2 góc so le trong của $MN//JK$)

$\Rightarrow \Delta ICM$ đồng dạng ΔJCK (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ICM}=\widehat{JCK}$. Suy ra 2 tia CK và CM đối nhau.

Vậy K, C, M thẳng hàng.

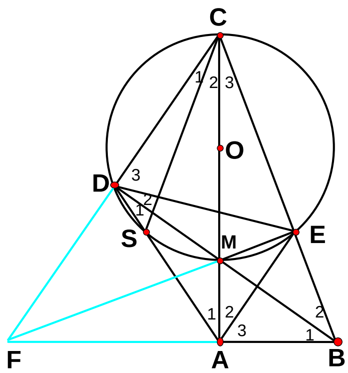
3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Mức độ 1: NB.

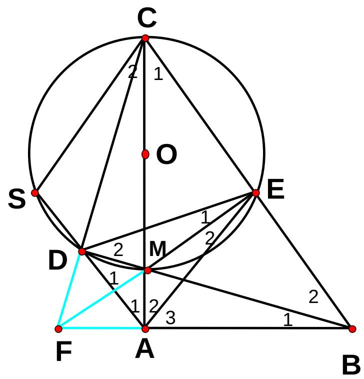
Câu 13: Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại. D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Lời giải:



Hình a



Hình b

1. Ta có ∠CAB = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠MDC = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠CDB = 90^0 như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1=\angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1=\angle C_3$ => $\overset{\frown}{SM}=\overset{\frown}{EM}$ => $\angle C_2=\angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

TH2 *(Hình b)*

$\angle ABC = \angle CME$ (cùng phụ $\angle ACB$); $\angle ABC = \angle CDS$ (cùng bù $\angle ADC$) => $\angle CME = \angle CDS$

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle SCM = \angle ECM$ => CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có $BA \perp CM$; $CD \perp BM$; $ME \perp BC$ như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\angle MEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $\angle MEB = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\angle MAB = 90^0$; $\angle MEB = 90^0$ => $\angle MAB + \angle MEB = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

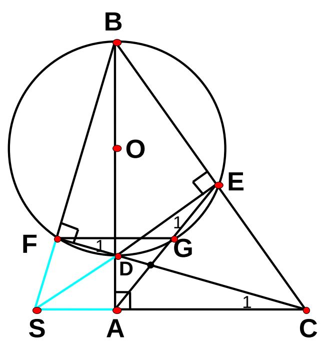
=> $\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Câu 14: Cho tam giác ABC vuông ở.A. và một điểm D nằm giữa A và.B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G. Chứng minh:

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Lời giải:



1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có $\angle BAC = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle DEB = \angle BAC = 90^0$; lại có $\angle ABC$ là góc chung => $\Delta DEB \sim \Delta CAB$.

2. Theo trên $\angle DEB = 90^0$ => $\angle DEC = 90^0$ (vì hai góc kề bù); $\angle BAC = 90^0$ (vì ΔABC vuông tại A) hay $\angle DAC = 90^0$ => $\angle DEC + \angle DAC = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp.

* $\angle BAC = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DFB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle BFC = 90^0$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => $\angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1$ => $\angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

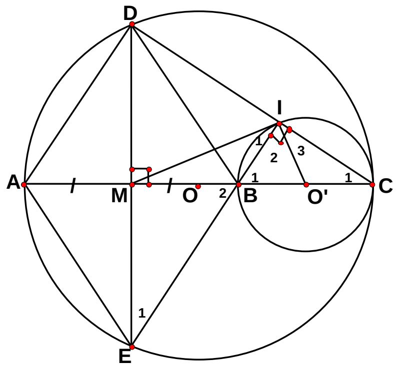
Câu 15: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và. D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội

Lời giải:



1. ∠BIC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠BID = 90^0 (vì là hai góc kề bù); DE ⊥ AB tại M => ∠BMD = 90^0

=> ∠BID + ∠BMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

Chủ đề 8: CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

1. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

Cách 1. Lợi dụng định lí về các đường đồng quy trong tam giác

- Sử dụng định lí ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm
- Sử dụng định lí ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.
- Sử dụng các định lí: 1.Ba đường phân giác của tam giác đồng quy tại một điểm.
- Giao điểm của hai đường phân giác ngoài nằm trên đường phân giác trong của góc thứ ba.
- Sử dụng định lí ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm.

Cách 2. Sử dụng tính chất các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường của của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

Cách 3. Lùi về quen thuộc, chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc giao điểm của hai đường nằm trên đường thẳng thứ ba.

2. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB

Câu 1. Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Giải:

Áp dụng tính chất: Trong một tam giác, ba đường trung tuyến cùng đi qua một điểm.

Trong tam giác ABC có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên AD, BE, CF cùn đi qua một điểm.

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Giải:

Áp dụng tính chất: Trong một tam giác, ba đường cao cùng đi qua một điểm.

Trong tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF nên AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Câu 3. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Giải:

Áp dụng tính chất: Trong một tam giác, ba đường phân giác cùng đi qua một điểm.

Trong tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF nên AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Mức độ 2: TH

Câu 1. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Chứng minh AH, BM, CN đồng quy.

Giải:

Vì ΔABC cân tại A có đường cao AH nên AH cũng là đường trung tuyến của ΔABC.

M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB nên BM, CN là các đường trung tuyến của ΔABC.

Vậy ba đường trung tuyến AH, BM, CN đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao BH, CK $(H \in AC, K \in AB)$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM, BH, CK đồng quy.

Giải:

Vì ΔABC cân tại A có đường trung tuyến AM nên AM cũng là đường cao của ΔABC.

Vì tam giác có ba đường cao cùng đi qua một điểm, do đó ba đường cao AM, BH, CK đồng quy.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi BD, CE lần lượt là đường phân giác trong của góc B và góc C $(D \in AC, E \in AB)$. Chứng minh AH, BD, CE đồng quy.

Giải:

Vì ΔABC cân tại A có đường cao AH nên AH cũng là đường phân giác của ΔABC.

Vì tam giác có ba đường phân giác cùng đi qua một điểm, do đó ba đường phân giác AH, BD, CE đồng quy.

Mức độ 3: VDT

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE. N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng:

a) $EMFN$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, EF, MN đồng quy.

Giải:

a) Tứ giác $AECF$ có $AE \parallel CF, AE = CF$ nên tứ giác $AECF$ là hình bình hành. Suy ra $AF \parallel CE$.

Chứng minh tương tự, $BF \parallel DE$

Tứ giác $EMFN$ có $EM \parallel FN, EN \parallel FM$ nên là hình bình hành.

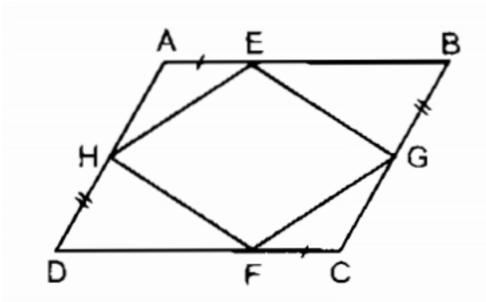
b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Ta sẽ chứng minh MN cũng đi qua O.

$AECF$ là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của EF

$EMFN$ là hình bình hành nên đường chéo MN đi qua trung điểm O của EF.

Vậy AC, EF, MN đồng quy tại O.

Câu 2. Trên hình vẽ bên, cho $ABCD$ là hình bình hành.



Chứng minh rằng:

a) $EFGH$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, BD, EF, GH đồng quy.

Giải:

a) Chứng minh rằng $EG = HF; EH = GF$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Tứ giác $AECF$ có $AE = CF, AE$€ CF nên là hình bình hành.

Suy ra O là trung điểm của AC, EF.

$ABCD$ là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của BD.

$EGHF$ là hình bình hành, O là trung điểm của EF nên O là trung điểm của GH.

Vậy AC, BD, EF, GH đồng quy tại O.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm E trên cạnh AB, lấy điểm F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$. Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, EF đồng quy.

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hãy chứng minh $AECF$ là hình bình hành để suy ra ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

a) Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF cùng cắt nhau tại một điểm.

Giải:

a) Tứ giác $DEBF$ là hình bình hành. Học sinh tự chứng minh.

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$, ta có O là trung điểm của BD.

Theo câu a), $DEBF$ là hình bình hành nên trung điểm O của BD cũng là trung điểm của EF.

Vậy AC, BD, CF cùng cắt nhau tại điểm O.

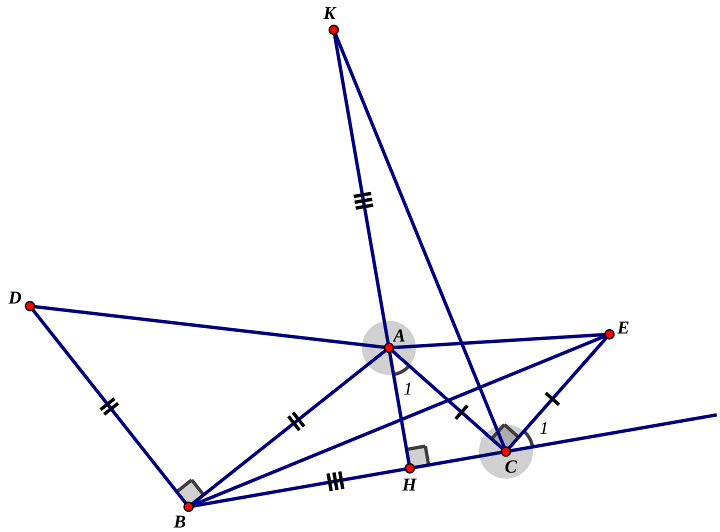
Mức độ 4: VDC

Bài 1. Cho ΔABC với đường cao AH. Vẽ ra phía ngoài ΔABC các tam giác, ACE vuông cân tại C và ABD vuông cân tại B.Trên tia đối của tia AH lấy điểm K sao cho $AK = BC$ Chứng minh rằng

1) $BE \perp CK$.

2) Ba đường thẳng AH, BE, CD đồng quy tại một điểm.

Giải:



Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{KAC}$

Xét ΔBCE và ΔKAC có:

$BC = KA(\text{gt})$

$CE = AC$ (ΔACE vuông cân tại C)

$\widehat{BCE} = \widehat{KAC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BCE = \Delta KAC\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{KCA}$

Mặt khác: $\widehat{KCA} + \widehat{ECK} = 90° \Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{ECK} = 90°$

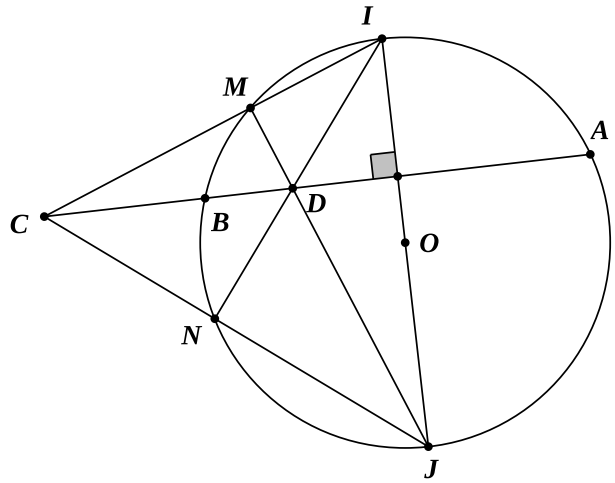
Vậy $BE \perp KC$.

b) Chứng minh tương tự: $DC \perp KB$

tam giác KBC có ba đường cao $KH \perp BC, BE \perp KC, CD \perp KB$

Vậy ba đường thẳng AH, BE, CD đồng quy tại một điểm.

Bài 2. Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tuyến CBA. Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N. Chứng minh rằng IN, JM, AB đồng quy tại một điểm D.



M thuộc đường tròn đường kính IJ nên $\widehat{JMI} = 90°$ hay $JM \perp CI$

Tương tự $IN \perp CJ$

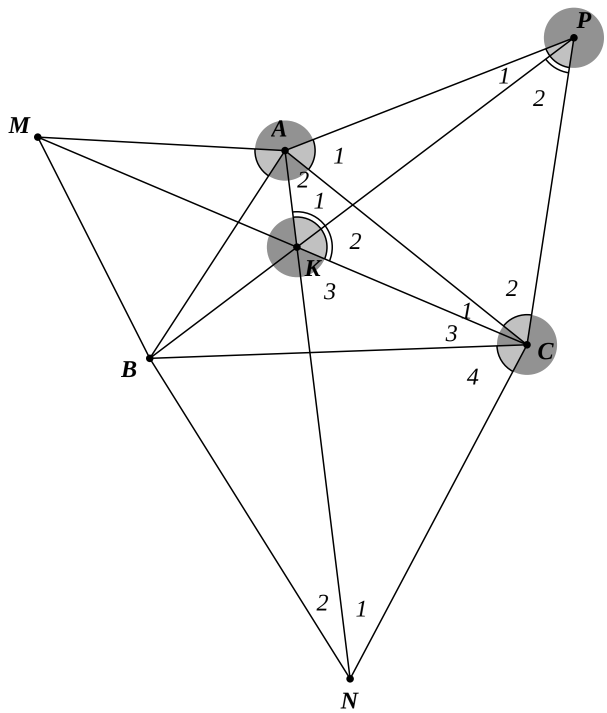
Tam giác CIJ có 3 đường cao CA, JM, IN đồng quy tại D

Vậy IN, JM, AB đồng quy tại một điểm D.

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ $(AB < CD)$. Gọi E là giao điểm hai cạnh bên AD và BC, F là trung điểm của AB. Chứng minh AC, BD, EF đồng quy.

Cho tam giác ABC, dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng MC, NA, PB đồng quy.

Giải:



Dễ thấy $\Delta AMC = \Delta ABP\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{P_1}$

Trong ΔAPC, có: $\widehat{A_1} + \widehat{C_2} + \widehat{P_1} + \widehat{P_2} = 180°$ mà $\widehat{C_1} = \widehat{P_1}$

Trong ΔPCK, có: $\widehat{C_1}+\widehat{C_2}+\widehat{K_2}+\widehat{P_2}=180^\circ \Rightarrow 60^\circ+\left(\widehat{C_1}+\widehat{P_2}\right)+\widehat{K_2}=180^\circ \Rightarrow \widehat{K_2}=60^\circ$

Tương tự: $\Delta ABN=\Delta MBC \Rightarrow \widehat{N_1}=\widehat{C_3}$ mà $\widehat{N_1}+\widehat{N_2}=60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{N_2}+\widehat{C_3}=60^\circ$ mà $\widehat{C_4}=60^\circ$

$\Rightarrow \Delta NKC$ có $\widehat{N_2}+\widehat{C_3}+\widehat{C_4}+\widehat{K_3}=180^\circ \Rightarrow \widehat{K_3}=60^\circ$

Chứng minh tương tự: $\widehat{K_1}=60^\circ$

Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{K_1}=\widehat{K_2}=\widehat{K_3}=60^\circ \Rightarrow \widehat{K_1}+\widehat{K_2}+\widehat{K_3}=180^\circ$

$\Rightarrow A,K,N$ thẳng hàng

Vậy AN,MC,BP đồng quy.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Mức độ 1: NB

Câu 1. Cho tam giác MNP có ba đường trung tuyến MD,NE,PF. Chứng minh rằng MD, NE, PF đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác MNP có ba đường cao MD,NE,PF. Chứng minh rằng MD, NE, PF đồng quy.

Câu 3. Cho tam giác MNP có ba đường phân giác MD,NE,PF. Chứng minh rằng MD, NE, PF đồng quy.

Mức độ 2: TH

Bài 2. Cho ΔABC cân tại B. Tia phân giác của góc B cắt đường trung tuyến AC tại K. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,BC. Chứng minh BK,AJ,CI đồng quy.

Bài 3. Cho hai đường thẳng a,b cắt nhau tại O, trên đường thẳng a, lấy ba điểm A,B,C sao cho $OA=AB=BC$, trên đường kia ta lấy ba điểm L,M,N sao cho $LO=OM=MN$. Chứng minh rằng AL,BN,CM đồng quy tại một điểm.

Bài 4. Cho ΔABC với đường cao AH. Vẽ các điểm D,E sao cho AB,AC thứ tự là các đường trung trực của đoạn HD,HE. Gọi M,N lần lượt là giao điểm của DE vớ AB,AC. Chứng minh rằng, ba đường thẳng AH,BN,CM đồng quy tại một điểm.

Bài 5. Cho ΔABC với điểm M nằm trong tam giác. Gọi H,K,L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC,CA,AB. Các đường thẳng h,l,k lần lượt qua A,B,C và vuông góc với KL,LH,HK. Chứng minh rằng, ba đường thẳng h,l,k đồng quy tại một điểm.

Mức độ 3: VDT

Bài 2. Cho $\Delta ABC(AB<AC)$ phân giác AD. Vẽ các tia $Cx//AD$ cắt đường trung trực cạnh AC tại E, $By//AD$ cắt đường trung trực cạnh AB tại F. Chứng minh rằng:

1) $\Delta ABF \sim \Delta ACE$;

2) AD,BE,CF đồng quy tại điểm G.

Bài 3. Cho ΔABC nhọn không cân tại A với đường cao AH. Vẽ $HM \perp AB, HN \perp AC$. Kẻ $HE//AC, HF//AB$. Chứng minh rằng EF, MN, BC đồng quy tại một điểm.

Mức độ 4: VDC

Bài 1. Ở bên ngoài ΔABC, vẽ các tam giác đều ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm.(Tứ giác nội tiếp)

Bài 2. Cho ΔABC với trung tuyến AM .Trên các cạnh AC, AB thứ tự lấy các điểm D, E sao cho $AB = 3AE, AC = 3AD$. Chứng minh rằng, AM, BD, CE đồng quy tại một điểm.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$, người ta kẻ hai đường thẳng song song với đường chéo AC cắt cạnh BA, BC lần lượt tại G, H. Cắt các cạnh DA, DC thứ tự tại E, F. Chứng minh rằng GE, HF, BD đồng quy tại một điểm.

Bài 4. Cho ΔABC với trực tâm H và A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm các đường trung trực của các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm.

Bài 5. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi A', B', C' là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB. Qua H, vẽ đường thẳng d bất kì. Chứng minh rằng: Các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của ΔABC đồng quy tại một điểm trên (O).

Chủ đề 9: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

Phương pháp 1:

Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) bằng bán kính R.

(Phương pháp này thường được dung khi chưa biết giao điểm của (d) và (O))

Phương pháp 2:

Nếu biết đường thẳng (d) và (O) có một giao điểm A→ Ta chỉ cần chứng minh minh $OA \perp d$.

3. Phương pháp 3: Phương pháp trùng khít

Để chứng minh một đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (O) ta dựng đường thẳng (d′) là tiếp tuyến của (O) sau đó chứng minh (d) và (d′) trùng nhau. Do đó (d) là tiếp tuyến của (O).

2. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB.

Câu 1: Chọn đúng sai trong các câu sau: đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O; 6cm) nếu

a) Khoảng cách từ O đến a là OH = 6cm.

b) Đường thẳng a cắt đường tròn (O; 6cm) tại hai điểm phân biệt.

c) Đường thẳng a đi qua điểm C thuộc đường tròn (O; 6m).

d) Đường thẳng a vuông góc với OH tại H; H thuộc đường tròn (O; 6cm).

Câu 2: Cho tam giác ABC có AB=3, AC=4, BC=5. Vẽ đường tròn (B;BA). Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

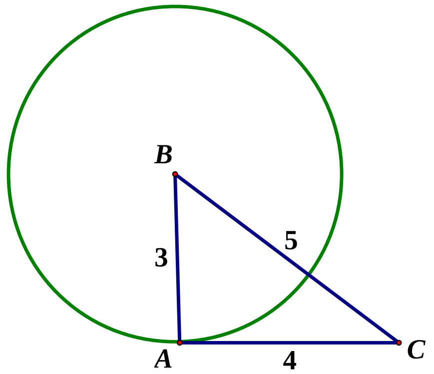
Hướng dẫn giải

Ta có: $BC^2 = 5^2 = 25; AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25; \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$\Rightarrow AB \perp AC$

Suy ra: AC là tiếp tuyến của (B;BA)



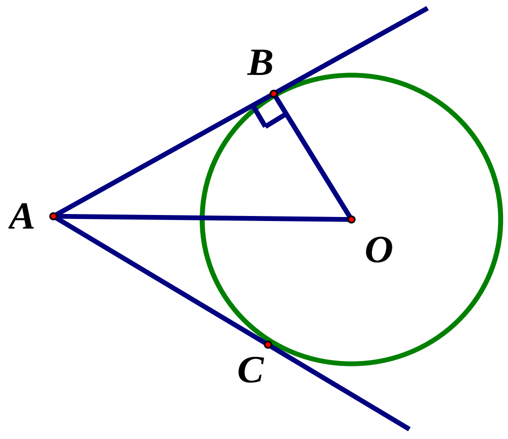
Câu 3: Cho hình vẽ, có $\widehat{BAC} = 60^0$; AO=10cm. Chọn đáp án đúng của:

a) Độ dài bán kính OB là:

A. $5\sqrt{3}$.   B. 5   C. $2\sqrt{3}$.   D. một đáp án khác

b) Độ dài tiếp tuyến AB là:

A. $4\sqrt{3}$.   C. 7.   B. $5\sqrt{3}$.   D. một đáp án khác.



Mức độ 2: TH.

Câu 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Ax, By là 2 tia tiếp tuyến của (O) (Ax, By cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Trên Ax lấy điểm C, trên By lấy điểm D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$. Chứng minh rằng: CD tiếp xúc với đường tròn (O).

Hướng dẫn giải

Từ C vẽ tiếp tuyến CD′ của đường tròn (O) (D′ thuộc By) tiếp xúc với (O) tại tiếp điểm H.

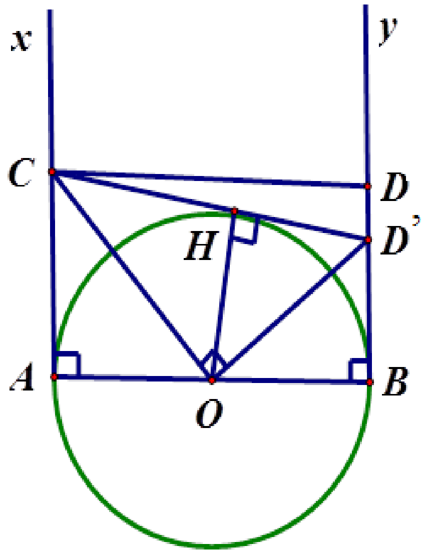
Ta có: OC là phân giác của $\widehat{AOH}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

Và OD′ là phân giác của góc BOH.

Mà hai góc AOH và BOH là hai góc kề bù nên ∠ OCD′ = 90^0.

$\Rightarrow$ ta có ∠ COD′ = ∠COD= 90^0. mà D, D′ đều thuộc By nên suy ra $D' \equiv D$.

Vì CD′ là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow$ CD cũng là tiếp tuyến của (O).



.

Câu 5: Cho đường tròn (O; 3cm) và điểm A trên đường tròn. Qua A kẻ tiếp tuyến Ax, trên đó lấy đó lấy điểm B sao cho AB=OA.

a) Tính độ dài đoạn OB;

b) Gọi I là trung điểm của đoạn OB, AI cắt đường tròn (O) ở C. Tứ giác CBAO là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn giải

a) $OB = 2\sqrt{3}\,cm$

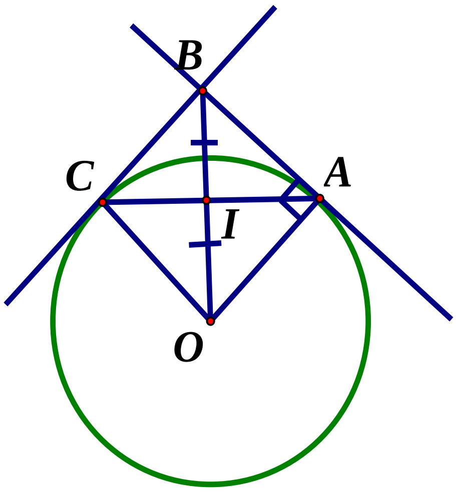
b) Ta có: $OB \perp AC$

ΔAOC cân tại O

$\Rightarrow \square OABC$ là hình vuông.

c) Theo câu b tứ giác OABC là hình vuông $\Rightarrow OC \perp BC$

$\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của (O)



.

Câu 6: Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm. C.

a) Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn

b) Cho bán kính của đường tròn bằng 15cm, AB=24cm. Tính độ dài OC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $OC \perp AB$ $\Rightarrow$ OC là đi qua trung điểm của AB.

$\Rightarrow$OC là đường cao đồng thời là trung tuyến của ΔABC.

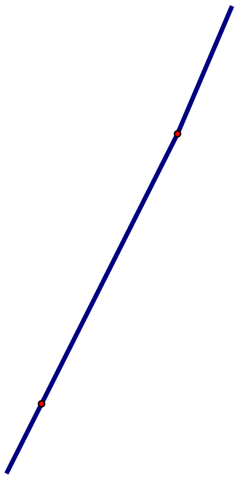
$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACO} = \widehat{BCO} \\ AC = CB \end{cases} \Rightarrow \Delta AOC = \Delta BOC\left(c-g-c\right)$$

$\Rightarrow OB \perp BC$

$\Rightarrow$Bc là tiếp tuyến của (O)

b) OC=22,5cm



Mức độ 3: VDT.

Câu 7: Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và F. BF và CE cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm AI. Chứng minh: MF là tiếp tuyến của (O).

Hướng dẫn giải

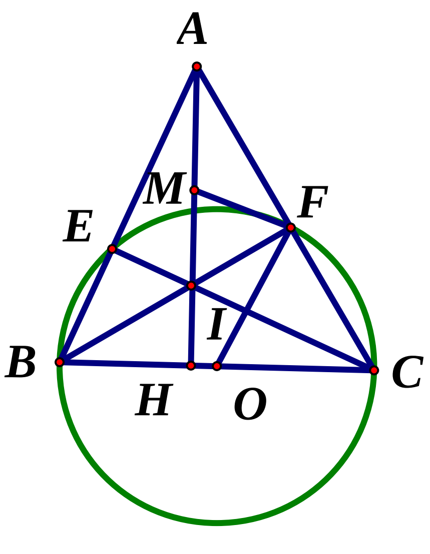
Ta chứng minh được I là trực tâm của tam giác ABC.

Trong tam giác vuông AFI có FM là trung tuyến nên MF = MA = MI, suy ra tam giác MFA cân tại M, suy ra $\widehat{AFM} = \widehat{MAF}$.

Ta có: $\widehat{OFC} = \widehat{FCO}$ (Tam giác OCF cân tại O).

Từ đó: $\widehat{AFM} + \widehat{OFC} = \widehat{MAF} + \widehat{OCF} = 90^o$. Suy ra. $\widehat{MFO} = 90^0$

Vậy $OF \perp FM, F \in (O)$ nên MF là tiếp tuyến của (O)



.

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính BH cắt AB tại D, đường tròn đường kính CH cắt AC tại E. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến chung của (I) và (J).

Hướng dẫn giải

Để chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn tâm I đường kính BH ta chứng minh $ID \perp DE$ hay $\angle$ DOE = 90^o

Vì D, E lần lượt thuộc đường tròn đường kính BH và HC nên ta có:. $\angle$BDH =$\angle$CEH = 90^0

→ tứ giác ADHE là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH và DE, khi đó ta có OD = OH = OE = OA.

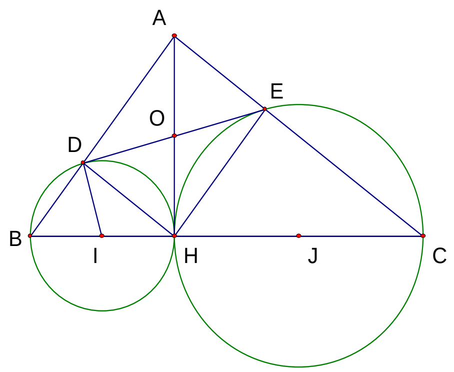
→ ΔODH cân tại O ⇔$\angle$ODH = $\angle$OHD

Ta cũng có ΔIDH cân tại I ⇔$\angle$IDH = $\angle$IHD.

→ $\angle$IDO = 90^0 ⇔ ID ⊥ DE

Ta có $ID \perp DE, D \in (I)$ → DE tiếp xúc với (I) tại. D.

Chứng minh tương tự ta cũng có DE tiếp xúc với (J) tại E.



.

Câu 9: Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ID, IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm của AH.

Tam giác ADH vuông tại D có DO là trung tuyến nên ta có: $DO = \frac{AH}{2} = OA = OH$

Tam giác AEH vuông tại E có EO là trung tuyến nên ta có: $EO = \frac{AH}{2} = OA = OH$.

⇒ OA = OD = OE, do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

Tam giác OAD cân tại O) ⇒$\angle$ODA = $\angle$OAD (1)

ΔBDC vuông tại D có DI là trung tuyến ⇒ $DI = \frac{BC}{2} = IC$, ⇒ tam giác ICD cân tại I,

⇒ $\angle$ IDC = $\angle$DCI (2)

H là giao điểm hai đường cao BD và CE

⇒ H là trực tâm của ΔABC,

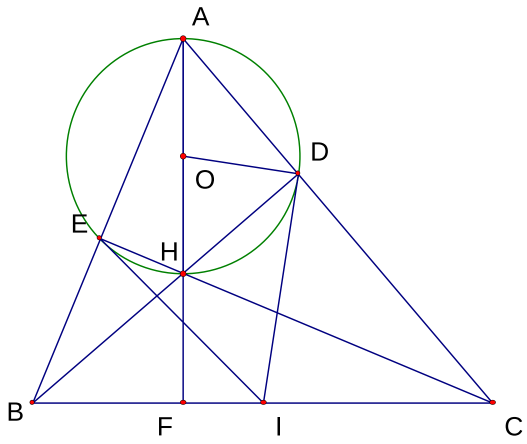
$\Rightarrow AH \perp BC$ tại F. (3) Khi đó $\angle \widehat{OAD} + \widehat{ICD} = 90^o$ (2)

Từ (1), (2) và (3) ta có

$\angle ODA + \angle IDC = \angle OAD + \angle ICD = 90^0$

Ta có $OD \perp DI, D \in (O) \Rightarrow$ ID tiếp xúc với (O) tại. D.

Chứng minh tương tự ta cũng có IE tiếp xúc với (O) tại E. (DPCM)



Mức độ 4: VDC.

Câu 10: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB= 2R, dây cung AC. Gọi M là điểm chính giữa cung AC. Đường thẳng kẻ từ C song song với BM cắt tia AM ở K và cắt tia OM ở D. OD cắt AC tại H.

1. Chứng minh tứ giác CKMH nội tiếp.
2. Chứng minh CD = MB và DM = CB.
3. Xác định vị trí điểm C trên nửa đường tròn (O) để AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn.

4. Trong trường hợp AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O), tính diện tích phần tam giác ADC ở ngoài đường tròn (O) theo R.

Hướng dẫn giải

1. $\widehat{H} + \widehat{K} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác CKMH nội tiếp.

2. tứ giác DMBC là hình bình hành.

3. ΔADC có AK $\perp$ CD và DH $\perp$ AC nên M là trực tâm tam giác. Suy ra: CM $\perp$ AD

Vậy $AD \perp AB$ $\Leftrightarrow$ CM // AB $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BC}$.

Mà $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MC}$ nên $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BC} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BC} = 60^0$.

4. Tính diện tích phần tam giác ADC ở ngoài (O) theo R:

Gọi S là diện tích phần tam giác ADC ở ngoài đường tròn (O).

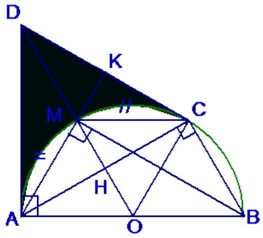
S_1 là diện tích tứ giác AOCD.

S_2 là diện tích hình quạt góc ở tâm AOC.

Ta có: $S = S_1 - S_2$ * Tính S_1:

AD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{BC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AOD} = 60^0$.

Do đó: AD = AO. tg 60^0 = $R\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ S_{ADO} = $\frac{1}{2}AD.AO = \frac{1}{2}.R\sqrt{3}.R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$



$\Delta AOD = \Delta COD$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $S_{AOD} = S_{COD}$ $\Rightarrow$ $S_{AOCD} = 2\,S_{ADO} = 2.\,\frac{R^2\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$.

∗ Tính S_2:

$\overset{\frown}{AC} = 120^0$ $\Rightarrow$ $S_{\text{quạt AOC}} = \frac{\pi R^2.120^0}{360^0} = \frac{\pi R^2}{3}$

∗ Tính S:

$S = S_1 - S_2 = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{3R^2\sqrt{3} - \pi R^2}{3} = \frac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ (đvdt)

.

Câu 11: Cho tam giác nhọn ABC có ∠B = 45^0. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1. Chứng minh AE = EB.

2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Hướng dẫn giải

1. ∠AEC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠AEB = 90^0 (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết ∠ABE = 45^0

=> ΔAEB là tam giác vuông cân tại E => EA = EB.

2. Gọi K là trung điểm của HE (1); I là trung điểm của HB => IK là đường trung bình của tam giác HBE => IK // BE mà ∠AEC = 90^0 nên BE ⊥ HE tại E => IK ⊥ HE tại K (2).

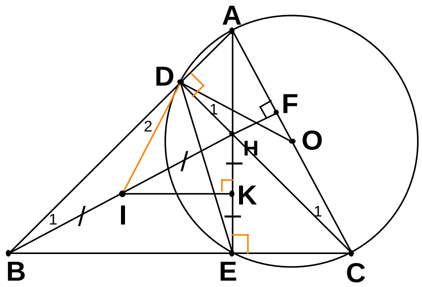
Từ (1) và (2) => IK là trung trực của HE. Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE => IE = IH mà I là trung điểm của BH => IE = IB.

∠ ADC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠BDH = 90^0 (kề bù ∠ADC) => tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) => ID = 1/2 BH hay ID = IB => IE = IB = ID => I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có ΔODC cân tại O (vì OD và OC là bán kính) => ∠D_1 = ∠C_1. (3)

ΔIBD cân tại I (vì ID và IB là bán kính) => ∠D_2 = ∠B_1. (4)



Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC => H là trực tâm của tam giác ABC => BH cũng là đường cao của tam giác ABC => BH ⊥ AC tại F => ΔAEB có ∠AFB = 90^0.

Theo trên ΔADC có ∠ADC = 90^0 => ∠B_1 = ∠C_1 (cùng phụ ∠BAC) (5).

Từ (3), (4), (5) =>∠D_1 = ∠D_2 mà ∠D_2 +∠IDH =∠BDC = 90^0=> ∠D_1 +∠IDH = 90^0 = ∠IDO => OD ⊥ ID tại D => OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

.

Câu 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại. D. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với phân giác góc ODC, đường này cắt CD tại M. Chứng minh rằng đường thẳng d qua M song song với AB luôn tiếp xúc với (O) khi C thay đổi.

Hướng dẫn giải

Ta thấy rằng đường thẳng d và (O) chưa có giao điểm nào, do đó ta dùng cách 1 để giải bài toán này.

Vẽ $OH \perp d\left(H \in d\right)$ Ta cần chứng minh OH = OC.

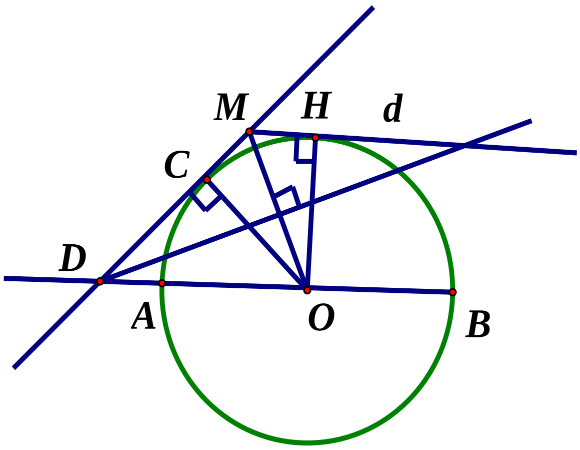
Ta có tam giác DMO cân tại D $\Rightarrow \widehat{DMO} = \widehat{DOM}$

Mà $\widehat{HMO} = \widehat{DOM}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{DMO} = \widehat{HMO}$

Từ đó ta có: $\Delta CMO = \Delta HMO$

$\Rightarrow$ OH = OC. Vậy d là tiếp tuyến của (O) khi C thay đổi.



Chủ đề 10: CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH TOÁN ĐỘ DÀI CẠNH, ĐỘ LỚN GÓC, DIỆN TÍCH HÌNH

1. PHƯƠNG PHÁP.

1. Tổng ba góc của tam giác, góc ngoài của tam giác, tổng các góc của tứ giác.

2. Tính chất tam giác cân, tam giác vuông cân, tam giác đều.

□Tam giác cân: ΔABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C}=\dfrac{180^0-\widehat{A}}{2}$

□Tam giác vuông cân: ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow \begin{cases} AB=AC=\dfrac{BC}{\sqrt{2}} \\ \widehat{B}=\widehat{C}=45^0 \end{cases}$

□Tam giác đều: ΔABC đều $\Rightarrow \begin{cases} AH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \\ S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ với AH là đường cao của tam giác.

3. Tính chất các tứ giác đặc biệt: hình thang, hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

4. Tính chất trọng tâm của tam giác, đường trung bình của tam giác, đường trung bình của hình thang.

5. Định lí Ta-lét, hệ quả của định lí Ta-lét.

6. Tính chất phân giác, phân giác ngoài của tam giác.

7. Tam giác đồng dạng, tam giác bằng nhau.

□**Chú ý:**

□Tỉ số ***chu vi*** của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

□Tỉ số ***hai đường cao*** tương ứng của hai tam giác đồng dạng thì bằng tỉ số đồng dạng.

□Tỉ số ***hai đường trung tuyến*** tương ứng của hai tam giác đồng dạng thì bằng tỉ số đồng dạng.

□Tỉ số ***hai đường phân giác*** tương ứng của hai tam giác đồng dạng thì bằng tỉ số đồng dạng.

□Tỉ số ***hai diện tích tương ứng*** của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

8. Hệ thức cạnh, đường cao, hình chiếu trong tam giác vuông.

ΔABC vuông tại A, đường cao $AH \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = BH.BC; AC^2 = CH.BC \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ AH^2 = BH.CH \\ AB.AC = BC.AH \\ \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \end{cases}$

9. Hệ thức cạnh và góc trong tam giác vuông

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow \begin{cases} AB = BC.\sin C = BC.\cos B \\ AB = AC.\tan C = AC.\cot B \end{cases}$

10. Diện tích đa giác

☐Hình chữ nhật: $S = ab$ (a, b là cạnh của hình chữ nhật)

☐Tam giác vuông: $S = \dfrac{ab}{2}$ (a,b là cạnhgóc vuông)

☐Tam giác thường: $S = \dfrac{ah}{2}$ (với a: cạnh; h:chiều cao tương ứng với cạnh a)

☐Hình thang: $S = \dfrac{(a+b)h}{2}$ (với a, b: đáy; h: chiều cao)

☐Hình bình hành: $S = ah$ (a: cạnh; h: chiều cao ứng với a)

☐Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \dfrac{d_1.d_2}{2}$ (với d_1, d_2 là hai đường chéo)

11. Công thức tính độ dài đường tròn, độ dài cung tròn

☐Công thức tính độ dài đường tròn: $C = 2\pi R$ (R: Bán kính đường tròn)

☐Độ dài cung tròn: $l = \dfrac{\pi Rn}{180}$ (n: số đo độ cung tròn)

12. Công thức tính diện tích hình tròn, hình quạt tròn

☐Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$

☐Diện tích hình quạt tròn: $S_q = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 2: THÔNG HIỂU

Câu 1: Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp.
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\dfrac{1}{2}$BC và DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4. Tính độ dài đoạn thẳng DE biết $DH = 2cm; AH = 6cm$.

Hướng dẫn giải

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp.

□Xét tứ giác $CEHD$, ta có: $\widehat{CEH} = 90^0$; $\widehat{CDH} = 90$.

$\Rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 90^0$.

Do đó, tứ giác $CEHD$ nội tiếp.

2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có: $\widehat{BEA} = \widehat{BDA} = 90^0 \Rightarrow$ E và D cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Chứng minh $ED = \frac{1}{2}BC$ và DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

+ Tam giác ABC cân tại A nên D là trung điểm BC $\Rightarrow$ ED là đường trung tuyến của tam giác vuông BEC $\Rightarrow ED = \frac{1}{2}BC$.

+ Ta có $ED = \frac{1}{2}BC \Rightarrow DE = DB \Rightarrow \Delta DBE$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{E_3} = \widehat{B_1}$ (1).

+ Dễ thấy: ΔAOE cân tại $O \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (2)

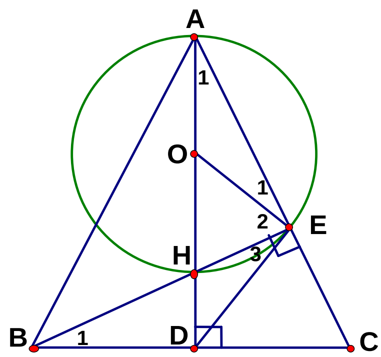
Mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (do cùng phụ với $\widehat{BCA}$) (3)

Từ (1) (2) và (3), ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{E_3} \Rightarrow \widehat{E_2} + \widehat{E_3} = \widehat{E_2} + \widehat{E_1} = 90^0$.

Do đó: $\widehat{DEO} = 90^0$. Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4. Tính độ dài đoạn thẳng DE biết $DH = 2cm; AH = 6cm$.

Theo giả thiết $AH = 6cm \Rightarrow OH = OE = 3$ cm.; $DH = 2cm \Rightarrow OD = 5$ cm. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Rightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow ED = 4cm.$



Câu 2: Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O),với P và Q là 2 tiếp điểm.Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ.Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O).Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1. Chứng minh $APOQ$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $KA^2 = KN.KP$.

3. Kẻ đường kính QS của đường tròn (O).Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc $\widehat{PNM}$.

4. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK.Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

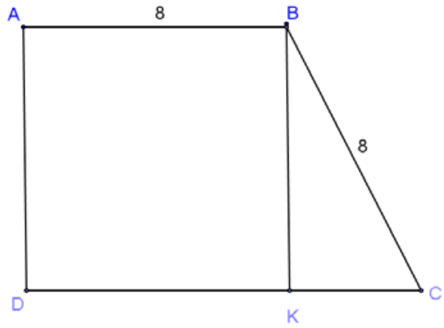
Hướng dẫn giải

1. Xét tứ giác APOQ có

$\widehat{APO}=90^0$ (Do AP là tiếp tuyến của (O) ở P)

$\widehat{AQO}=90^0$ (Do AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)

$\Rightarrow \widehat{APO}+\widehat{AQO}=180^0$,mà hai góc này là 2 góc đối nên tứ giác APOQ là tứ giác nội tiếp



2. Xét Δ AKN và Δ PAK có $\widehat{AKP}$ là góc chung

$\widehat{APN}=\widehat{AMP}$ (Góc nt……cùng chắn cung NP)

Mà $\widehat{NAK}=\widehat{AMP}$ (so le trong của PM //AQ

$AKN \sim PKA\ (gg) \Rightarrow \dfrac{AK}{PK}=\dfrac{NK}{AK} \Rightarrow AK^2=NK.KP$ (đpcm)

3. Kẻ đường kính QS của đường tròn (O)

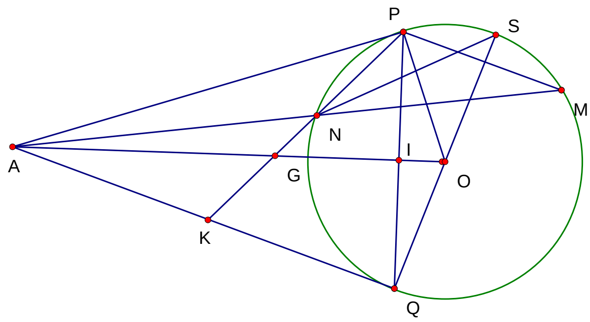
Ta có AQ $\perp$ QS (AQ là tt của (O) ở Q)

Mà PM//AQ (gt) nên PM $\perp$ QS

Đường kính QS $\perp$ PM nên QS đi qua điểm chính giữa của cung PM nhỏ

$sd\,\widehat{PS}=sd\,\widehat{SM} \Rightarrow \widehat{PNS}=\widehat{SNM}$ (hai góc nt chắn 2 cung bằng nhau)

Hay NS là tia phân giác của góc PNM.



5. Chứng minh được Δ AQO vuông ở Q, có QG $\perp$ AO(theo Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$OQ^2=OI.OA \Rightarrow OI=\frac{OQ^2}{OA}=\frac{R^2}{3R}=\frac{1}{3}R$$

$$\Rightarrow AI=OA-OI=3R-\frac{1}{3}R=\frac{8}{3}R$$

Do Δ KNQ ~Δ KQP (gg)$\Rightarrow KQ^2=KN.KP$ mà $AK^2=NK.KP$ nên AK=KQ

Vậy Δ APQ có các trung tuyến AI và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm.

$$\Rightarrow AG=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}.\frac{8}{3}R=\frac{16}{9}R$$

Câu 3: Cho hình thang vuông $ABCD$ $\left(\widehat{A}=\widehat{D}=90^0\right)$ có $AB=BC=8, CD=12$. Tính số đo các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ của hình thang $ABCD$.

Hướng dẫn giải

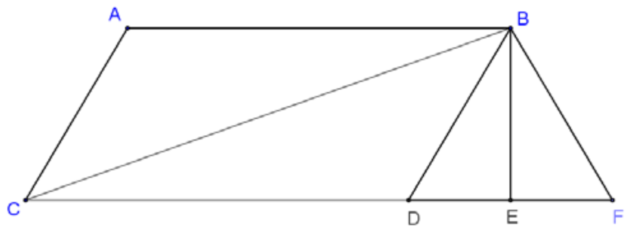
□Kẻ $BK \perp CD\ (K \in CD)$.

Ta có: $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{K} = 90^0$ nên tứ giác $ABKD$ là hình chữ nhật $DK = AB = 8$. Mà $CD = 12$ suy ra $CK = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^0$. Từ đó ta tính được $\widehat{ABC} = 120^0$.

Mức độ 3: VẬN DỤNG

Câu 4: Cho hình thang cân $ABCD\,(AB \parallel CD)$ có $\widehat{C} = 60^0$, DB là tia phân giác của $\widehat{ADC}$. Biết $AB = 4$, tính chu vi và diện tích hình thang $ABCD$.

Hướng dẫn giải



Ta có: DB là tia phân giác của $\widehat{ADC}$ $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BDC}$. Mà $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong)

Do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow AD = 4$.

Kẻ $BE \parallel AD\,(E \in CD)$. Suy ra $ABED$ là hình thoi $\Rightarrow AB = BE = ED = DA = 4$.

Tam giác BEC đều $\Rightarrow CE = EB = BC = 4$. Từ đó tính được chu vi hình thang $ABCD$ là 20.

Diện tích hình thang là $12\sqrt{3}\,(dvdt)$.

Câu 5: Cho tam giác ABC$(AB < AC)$ có ba góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi H là giao điểm của BE và CF. D là giao điểm của AH và BC.

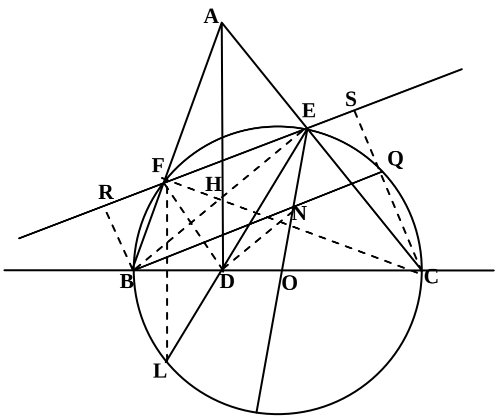
a. Chứng minh: $AD \perp BC$ và $AH.AD = AE.AC$.

b. Chứng minh $EFDO$ là tứ giác nội tiếp

c. Trên tia đối của tia DE lấy điểm L sao cho $DL = DF$. Tính số đo góc BLC.

Hướng dẫn giải

a. Do $FC \perp AB, BE \perp AC \Rightarrow$ H trực tâm $\Rightarrow AH \perp BC$



Ta có tứ giác HDCE nội tiếp

Xét 2 tam giác đồng dạng EAH và DAC (2 tam giác vuông có $\widehat{A}$ chung)

$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AH.AD = AE.AC$ (đpcm)

b. Do AD là phân giác của $\widehat{FDE}$

nên $\widehat{FDE} = 2\widehat{FBE} = 2\widehat{FCE} = \widehat{FOE}$

Vậy tứ giác EFDO nội tiếp (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EF}$).

c. Vì AD là phân giác $\widehat{FDE}$

$\Rightarrow$ DB là phân giác $\widehat{FDL}$

$\Rightarrow$ F, L đối xứng qua BC $\Rightarrow L \in$ đường tròn tâm O

Vậy $\widehat{BLC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O $\Rightarrow \widehat{BLC} = 90^0$.

Câu 6: Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và **B.** Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua điểm E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d1, d2 lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh AMEI là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và góc $\widehat{MIN} = 90^0$.

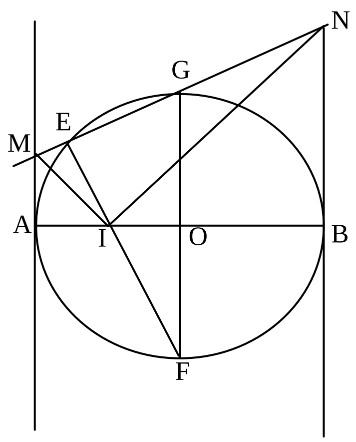
c. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.

d. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a. Xét tứ giác MAIE có 2 góc vuông là $\widehat{A}$, và $\widehat{E}$ (đối nhau) nên chúng nội tiếp trong đường tròn đường kính MI.

b. Tương tự ta có tứ giác ENBI nội tiếp đường tròn đường kính IN. Vậy góc $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (vì cùng chắn $\widehat{EI}$)



Tương tự $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ (vì cùng chắn $\widehat{EI}$)

Mà góc $\widehat{EAI} + \widehat{EBI} = 90^0$ (ΔEAD vuông tại E) $\Rightarrow$ $\widehat{MIN} = 180^0 - \left(\widehat{EMI} + \widehat{ENI}\right) = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

c. Xét 2 tam giác vuông MAI và IBN. Ta có $\widehat{NIB} = \widehat{IMA}$ (góc có cạnh thẳng góc)

$\Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta IBN$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{IB} = \dfrac{AI}{BN} \Leftrightarrow AM.BN = AI.BI$ (1)

d. Gọi G là điểm đối xứng của F qua A**B.** Ta có $AM + BN = 2OG\,(2)$ (Vì tứ giác AMNB là hình thang và cạnh OG là cạnh trung bình của AM và BN)

Ta có: $AI = \dfrac{R}{2}, BI = \dfrac{3R}{2}$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AM + BN = 2R và AM.BN = $\dfrac{3R^2}{4}$

Vậy AM, BN là nghiệm của phương trình $X^2 - 2RX + \dfrac{3R^2}{4} = 0 \Rightarrow AM = \dfrac{R}{2}$ hay $BN = \dfrac{3R}{2}$.

Vậy ta có 2 tam giác vuông cân là MAI cân tại A và NBI cân tại B

$\Rightarrow MI = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ và $NI = \dfrac{3R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3R}{\sqrt{2}}$

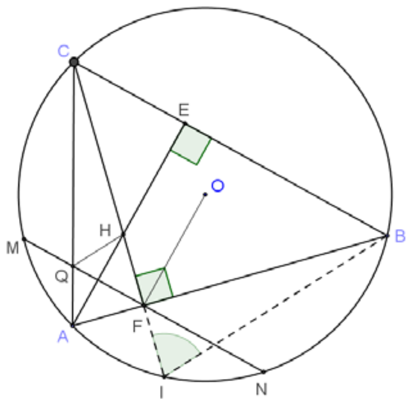
$\Rightarrow S_{(MIN)} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{R}{\sqrt{2}}.\dfrac{3R}{\sqrt{2}} = \dfrac{3R^2}{4}$.

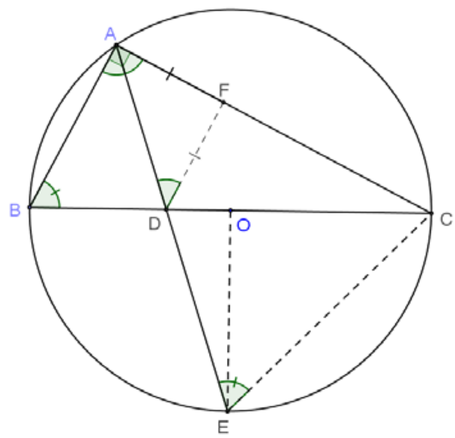
Mức độ 4: VẬN DỤNG CAO

Câu 7: Cho ΔABC nhọn có $\widehat{A}=70^0$ $(CA<CB)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AE, CF cắt nhau tại H. Vẽ đường thẳng d vuông góc với OF tại F, d cắt CA tại Q. Tính số đo của $\widehat{FHQ}$.

Hướng dẫn giải

- Gọi giao điểm của d và (O) là M, N (M thuộc cung AC không chứa B), CF kéo dài cắt (O) tại I, BI cắt MN tại K.
- Theo bài toán con bướm ta chứng minh được F là trung điểm KQ.
- Chứng minh H và I đối xứng nhau qua AB nên $HKIQ$ là hình bình hành.
- Suy ra $\widehat{FHQ}=\widehat{FIK}$ mà $\widehat{FIK}=\widehat{CAB}=70^0$. Vậy $\widehat{FHQ}=70^0$.





Câu 8: Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính $BC=10cm$. Lấy $A\in(O)$ sao cho $AB=6cm$. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt (O) tại E. Tính độ dài AD, AE.

Hướng dẫn giải

- Ta có: $\widehat{BAC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
- ΔABC vuông tại A suy ra $AC=8cm$.
- Tính DB, DC:

Có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ (tính chất phân giác)

$\Rightarrow \dfrac{DB}{DC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \dfrac{DB}{3}=\dfrac{DC}{4}=\dfrac{DB+DC}{7}=\dfrac{10}{7}$.

$\Rightarrow DB=\dfrac{30}{7}; DC=\dfrac{40}{7}$

Từ $\dfrac{DF}{AB}=\dfrac{DC}{BC}$ tính được $DF=\dfrac{30}{7}$.

Rồi suy ra $AD=DF.\sqrt{2}=\dfrac{24\sqrt{2}}{7}$.

Ta có: $\Delta ADB \backsim \Delta ACE$ và $\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}$, ta tính được $A=7\sqrt{2}$.

Câu 9: Cho tam giác ΔABC, M là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi $A^{'}=AM\cap BC$, $B^{'}=BM\cap AC$, $C^{'}=CM\cap AB$. Tính $\frac{AM}{AA^{'}}+\frac{BM}{BB^{'}}+\frac{CM}{CC^{'}}$.

Hướng dẫn giải

□ Kẻ AH và MK cùng vuông góc với BC $(H,K\in BC)$.

□ Ta có: $\left.\begin{array}{l}\frac{A^{'}M}{A^{'}A}=\frac{MK}{AH}\\ \frac{MK}{AH}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{A^{'}M}{A^{'}A}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

□ Tương tự: $\frac{B^{'}M}{B^{'}B}=\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}};\frac{C^{'}M}{C^{'}C}=\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}$.

$\Rightarrow \frac{A^{'}M}{AA^{'}}+\frac{B^{'}M}{BB^{'}}+\frac{C^{'}M}{CC^{'}}=1$

□ Mặt khác: $\frac{AM}{AA^{'}}+\frac{BM}{BB^{'}}+\frac{CM}{CC^{'}}=\frac{AA^{'}-A^{'}M}{AA^{'}}+\frac{BB^{'}-B^{'}M}{BB^{'}}+\frac{CC^{'}-C^{'}M}{CC^{'}}$

$=1-\frac{A^{'}M}{AA^{'}}+1-\frac{B^{'}M}{BB^{'}}+1-\frac{C^{'}M}{CC^{'}}=2$.

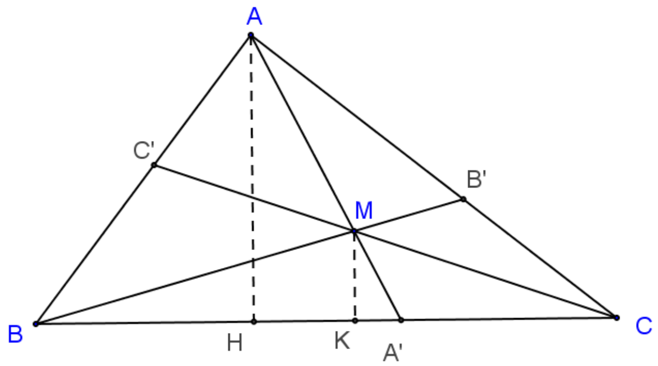
3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

LOẠI 1: TÍNH SỐ ĐO GÓC

Bài 1. Cho hình thang ABCD có $\hat{A}=\hat{D}=90$, $AB=AD=\frac{1}{2}CD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB, qua M kẻ tia Mx vuông góc với MD, Mx cắt BC tại N. Tính số đo của các góc $\widehat{MDN}$ và $\widehat{MND}$.

Bài 2. Cho ΔABC đều, trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM=CN$. Trung trực của đoạn MN cắt tia phân giác của $\widehat{BAC}$ tại I. Tính số đo của $\widehat{AIC}$.

Bài 3. Cho $(O;R)$ và tam giác ABC nội tiếp đường tròn, gọi BE, CF là các đường cao của ΔABC. Cho biết $EF=\frac{R\sqrt{3}}{2}$, tính số đo của $\widehat{BAC}$.



LOẠI 2: TÍNH ĐỘ DÀI VÀ DIỆN TÍCH

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại M. Đường tròn đường kính MC cắt tia BM tại điểm thứ hai là H, AB cắt CH tại **D.** Biết $AB=3$ và $CD=4\sqrt{5}$. Tính độ dài B**C.**

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội đường tròn (O;R) đường kính AC.Gọi AC cắt BD tại E,, gọi K,M là chân đường vuông góc kẻ từ A và C xuống BD (biết K thuộc đoạn BE, $K \neq B; K \neq E$).Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

1.Cứng minh tứ giác AKPD nội tiếp

2.Chứng minh $KP \perp PM$.

3. Biết $\widehat{ABD} = 60^0$ và $AK = x$ .Tính BD theo R và x.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} = 60^0$, $BC = 10cm$. Đường tròn tâm O, đường kính BC cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại D, E. Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi dây DE và $\overset{\frown}{DE}$.

LOẠI 3: TÍNH CÁC TỈ SỐ

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$, E là điểm thuộc cạnh CD. Tia AE cắt BC tại F, vẽ tia Ax vuông góc với AE cắt CD tại K. Gọi I là trung điểm của KF. Tính tỉ số $\frac{ID}{CF}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{A} = 60^0$ và $AB < AC$. Vẽ các đường cao BF, CF của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, K là trung điểm của EF. Tính tỉ số $\frac{AK}{AI}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC lần lượt cắt (O) tại A', B', C'. Tính $\frac{AA'}{AD} + \frac{BB'}{BE} + \frac{CC'}{CF}$.

Chủ đề 11: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

I. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.

1. Sử dụng tam giác đồng dạng, tam giác bằng nhau.

2. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

3. Tính chất của các hình cơ bản như : đường tròn, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi...

4. Dựng hình phụ.

5. …

II. CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB

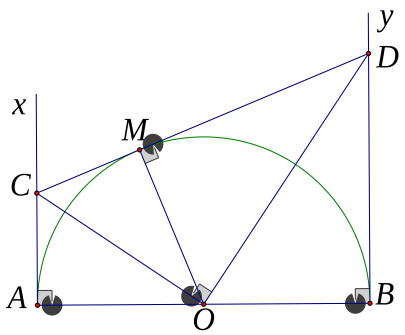
Câu 1. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D.

a) Chứng minh $AC + BD = CD$.

b) Chứng minh $\widehat{COD} = 90°$.

c) Chứng minh $AC.BD = \dfrac{AB^2}{4}$.

Hướng dẫn giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CA = CM$, $DB = DM$ $\Rightarrow AC + BD = CM + DM$.
Mà $CM + DM = CD \Rightarrow AC + BD = CD$

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có : OC là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$, OD là tia phân giác của góc $\widehat{BOM}$, mà $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ là hai góc kề bù $\Rightarrow \widehat{COD} = 90°$.

c) Theo trên $\widehat{COD} = 90°$ nên tam giác COD vuông tại O có $OM \perp CD$ (OM là tiếp tuyến). áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OM^2 = CM.DM$.

Mà $OM = R$, $CA = CM$, $DB = DM \Rightarrow AC.BD = R^2 \Rightarrow AC.BD = \dfrac{AB^2}{4}$.

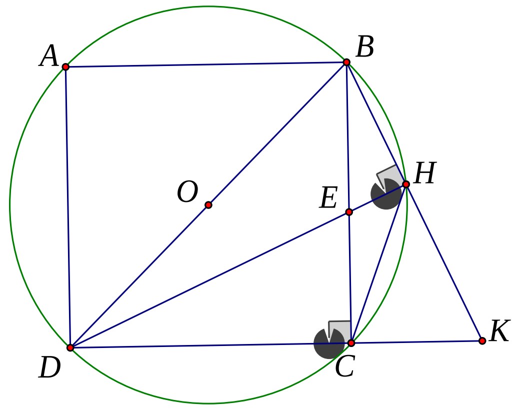
Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

a) Chứng minh $BHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính góc CHK.

c) Chứng minh $KC.KD = KH.KB$

Hướng dẫn giải



a) Theo giả thiết $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{BCD}=90^\circ$, $BH \perp DE$ tại H nên $\widehat{BHD}=90^\circ$. Như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90° nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD suy ra $BHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) $BHCD$ là tứ giác nội tiếp $\widehat{BDC}+\widehat{BHC}=180^\circ \ (1)$

$\widehat{BHK}$ là góc bẹt nên $\widehat{KHC}+\widehat{BHC}=180^\circ \ (2)$

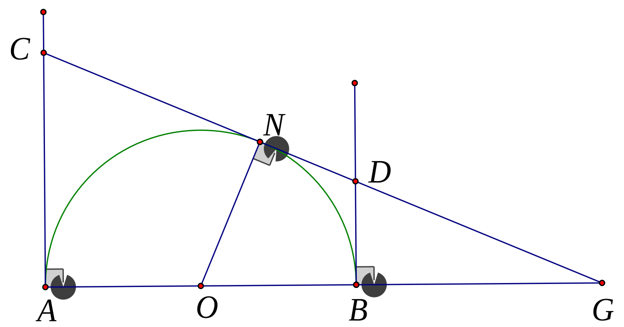
Từ $(1),(2) \Rightarrow \widehat{CHK}=\widehat{BDC}$ mà $\widehat{BDC}=45^\circ$ (vì $ABCD$ là hình vuông) $\widehat{CHK}=45^\circ$.

c) Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\widehat{CHK}=\widehat{BDC}=45^\circ$, $\widehat{K}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta KHC \sim \Delta KDB \Rightarrow \dfrac{KC}{KB}=\dfrac{KH}{KD} \Rightarrow KC.KD=KH.KB$

Câu 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm G (khác với điểm B). Từ các điểm G, A, B kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O). Tiếp tuyến kẻ từ G cắt hai tiếp tuyến kẻ từ A và B lần lượt tại C và D. Gọi N là tiếp điểm của tiếp tuyến qua G với đường tròn (O). Chứng minh rằng $\dfrac{CN}{CG}=\dfrac{DN}{DG}$.

Hướng dẫn giải



Ta có : $BD \perp AG, AC \perp AG \Rightarrow BD // AC \Rightarrow \Delta GBD \sim \Delta GAC \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{CG}=\dfrac{DB}{DG}$

Mặt khác $CA=CN, DB=DN$ (Tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm)

$\Rightarrow \dfrac{CN}{CG}=\dfrac{DN}{DG}$

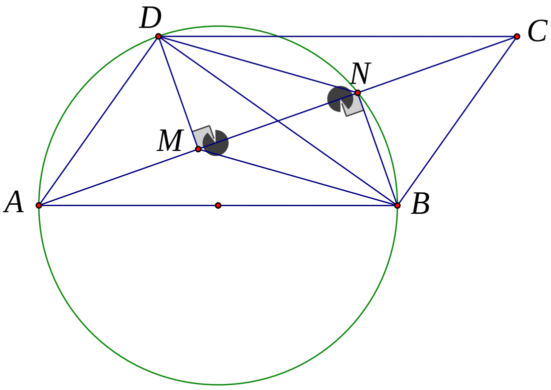
Mức độ 2: TH

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC.

a) Chứng minh tứ giác $CBMD$ nội tiếp được

b) Chứng minh rằng : $DB.DC = DN.AC$.

Hướng dẫn giải



a) Góc $\widehat{ADB} = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mà $AD//BC \Rightarrow DB \perp BC$.

Xét tứ giác $DMBC$ có $\widehat{DMC} = \widehat{DBC} = 90°$ nên nội tiếp.

b) Ta có $\Delta DBN \sim \Delta CAD$ (g.g)

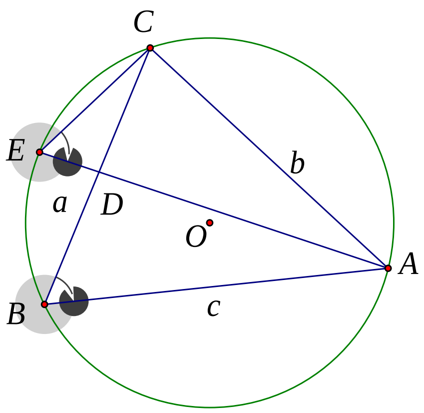
Vì $\widehat{DAC} = \widehat{\mathrm{DBN}}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{DN}$)

$\widehat{BDN} = \widehat{BAN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BN}$) $= \widehat{DCA}$

$\Rightarrow \frac{DN}{\mathrm{DC}} = \frac{DB}{AC} \Rightarrow DB.DC = DN.AC$

Câu 2. Cho tam giác ABC nội tiếp tròn tâm O có độ dài các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. E là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC, AE cắt cạnh BC tại D. Chứng minh : $AD^2 = AB.AC - DB.DC$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (Do $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EC}$)

Và $\widehat{AEC} = \widehat{DBA}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên $\Delta BAD \sim \Delta EAC$

$\Rightarrow \dfrac{BA}{AD}=\dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AE.AD\ (1)$

Ta có $\widehat{ADC}=\widehat{BDC}$ và $\widehat{CAD}=\widehat{DBE}$

(2 góc nội tiếp cùng chắn cung CE) nên $\Delta ACD \sim \Delta BDE$

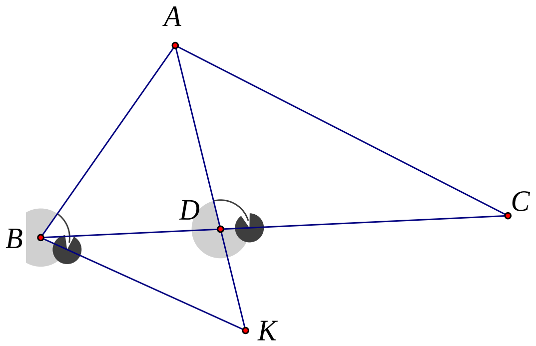
$\Rightarrow \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{DB}{DE} \Rightarrow AD.DE = DB.DC$

$AD(AE-AD)=DB.DC$

Hay $AD^2 = AD.AE - DB.DC = AB.AC - DB.DC$ (do (1))

Câu 3. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng: $AD^2 = AB.AC - BD.CD$.

Hướng dẫn giải



Trên AD lấy điểm k sao cho: $\widehat{ABK}=\widehat{ADC}$. Dễ thấy $AD = AK - DK$.

$\widehat{ABK}=\widehat{ADC}$; $\widehat{BAK}=\widehat{CAK}$

$\Rightarrow \Delta ABK \sim \Delta ADC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AC}{AD} \Rightarrow AK.AD = AB.AC$ (1)

$\widehat{BDK}=\widehat{ADC}$, $\widehat{BKD}=\widehat{ACD}$ (do $\Delta ABK \sim \Delta ADC$)

$\Rightarrow \Delta BDK \sim \Delta ADC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DK}{DC} \Rightarrow DK.AD = BD.DC$ (2)

Trừ vế theo vế (1) và (2), ta được: $AK.AD - DK.AD = AB.AC - BD.DC$

Hay: $AD^2 = AB.AC - BD.DC$ (đpcm)

Mức độ 3: VDT

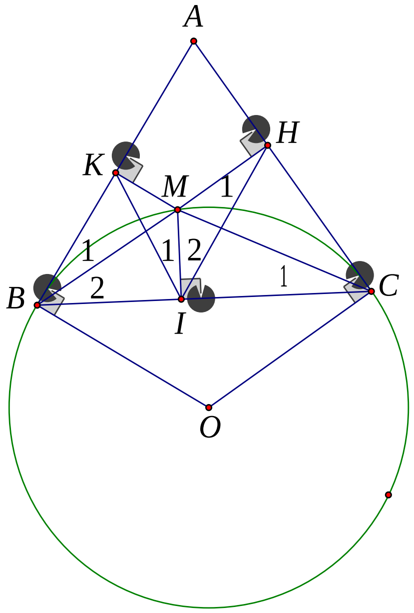
Câu 1. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì $BC < 2R$. Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB.

a) Chứng minh tam giác ABC cân.

b) Các tứ giác $BIMK$, $CIMH$ nội tiếp.

c) Chứng minh $MI^2 = MH.MK$.

Hướng dẫn giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

b) Theo giả thiết $MI \perp BC \Rightarrow \widehat{MIB} = 90°$; $MK \perp AB \Rightarrow \widehat{MKB} = 90°$.

$\Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{MKB} = 180°$ mà đây là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác $BIMK$ nội tiếp.

(Chứng minh tứ giác** $CIMH$ **nội tiếp tương tự tứ giác** $BIMK$ **)

c) Theo trên tứ giác $BIMK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KMI} + \widehat{KBI} = 180°$, tứ giác $CIMH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMI} + \widehat{HCI} = 180°$ .Mà $\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{HCI}$ (vì tam giác ABC cân tại A) $\Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{HMI}$ (1)

Theo trên tứ giác $BIMK$ nội tiếp $\widehat{B_1} = \widehat{I_1}$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác $CIMH$ nội tiếp $\widehat{H_1} = \widehat{C_1}$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ $(= \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BM}$) $\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{H_1}$ (2).

Từ $(1),(2) \Rightarrow \Delta MKI \sim \Delta MIH \Rightarrow \frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI} \Rightarrow MI^2 = MH.MK$

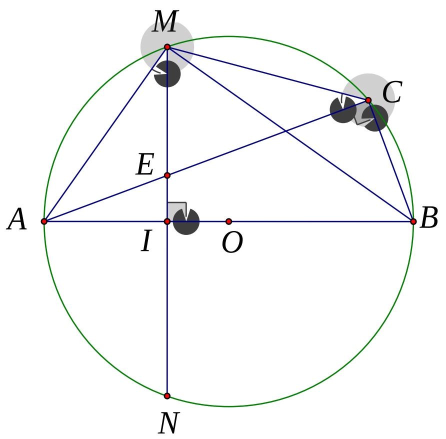
Câu 2. Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $\Delta AME \sim \Delta ACM$ và $AM^2 = AE.AC$.

c) Chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{EIB}=90^\circ$ (giả thiết)

$\widehat{ECB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Kết luận: Tứ giác $IECB$ là tứ giác nội tiếp

b) Ta có : sđ $\overset\frown{AM}$ = sđ $\overset\frown{AN}$, $\widehat{AME}=\widehat{ACM}$

Góc $\widehat{A}$ chung, suy ra $\Delta AME \sim \Delta ACM$.

Do đó : $\dfrac{AC}{AM}=\dfrac{AM}{AE} \Leftrightarrow AM^2 = AE.AC$.

c) MI là đường cao của tam giác vuông MAB nên $MI^2 = AI.IB$

Trừ từng vế của hệ thức ở câu b) với hệ thức trên

Ta có: $AE.AC - AI.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$.

Câu 3. Cho đường tròn (O) có tâm O, đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB > AC$. Từ A, vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Từ H, vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB, F thuộc AC).

a) Chứng minh rằng $AEHF$ là hình chữ nhật và OA vuông góc với EF.

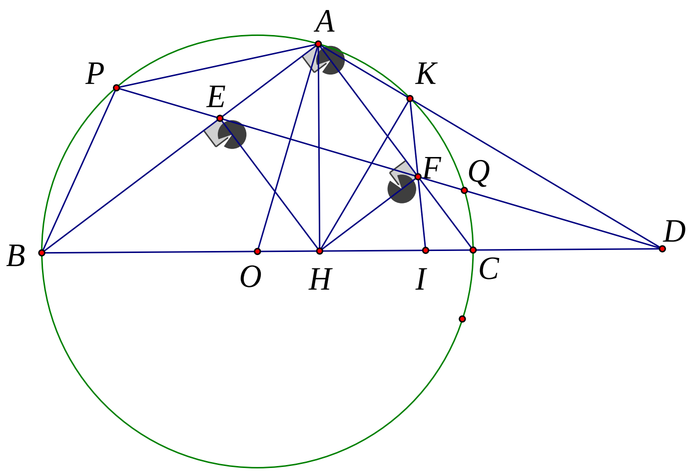
b) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P và Q (E nằm giữa P và F).

Chứng minh $AP^2 = AE.AB$. Suy ra APH là tam giác cân

c) Gọi D là giao điểm của PQ và BC; K là giao điểm của AD và đường tròn (O) (K khác A). Chứng minh $AEFK$ là một tứ giác nội tiếp.

d) Gọi I là giao điểm của KF và BC. Chứng minh $IH^2 = IC.ID$.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông

Góc $\widehat{HAF}=\widehat{EFA}$ (vì $AEHF$ là hình chữ nhật)

Góc $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$ (vì $OA=OC$)

Do đó: góc .$\widehat{OAC}+\widehat{AFE}=90° \Rightarrow OA\perp EF$.

b) $OA\perp PQ \Rightarrow \overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{AQ}$

Do đó: $\Delta APE \sim \Delta ABP$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AE}{AP}\Rightarrow AP^2=AE.AB$

Ta có : $AH^2=AE.AB$ (hệ thức lượng ΔHAB vuông tại H, có HE là chiều cao)

$\Rightarrow AP=AH \Rightarrow \Delta APH$ cân tại A.

c) $\Delta DCF \sim \Delta DEB\,(g.g)\Rightarrow DE.DF=DC.DB$

$DC.DB=DK.DA$ (Phương tích điểm D) $\Rightarrow DE.DF=DK.DA$

Do đó $\Delta DFK \sim \Delta DAE \Rightarrow \widehat{DKF}=\widehat{DEA} \Rightarrow$ tứ giác $AEFK$ nội tiếp

d) Góc $\widehat{ICF}=\widehat{AEF}=\widehat{DKF}\Rightarrow \Delta ICF \sim IKD\,(g.g)$ suy ra $IC.ID=IF.IK$

$\widehat{IKH}=\widehat{FAH}=\widehat{FHI}\Rightarrow \Delta IFH \sim IHK\,(g.g)$ suy ra $IH^2=IF.IK$

Vậy $IH^2=IC.ID$.

Mức độ 4: VDC

Câu 1. Cho tam giác MNP cân tại M có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Tiếp tuyến tại N và P của đường tròn lần lượt cắt tia MP và tia MN tại E và D.

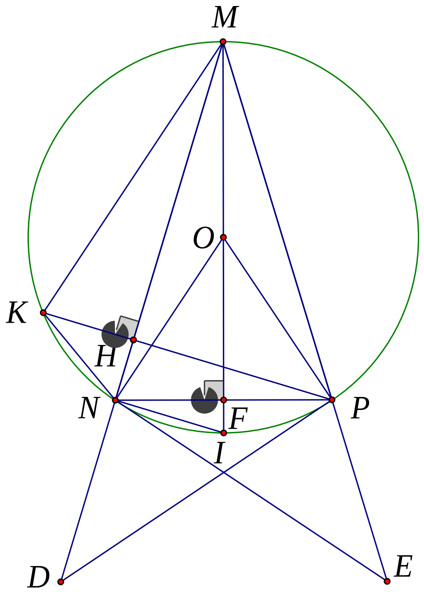
a) Chứng minh : $NE^2=EP.EM$.

b) Chứng minh tứ giác $DEPN$ là tứ giác nội tiếp.

c) Qua P kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt đường tròn (O) tại K (K không trùng với P).

Chứng minh rằng: $MN^2 + NK^2 = 4R^2$.

Hướng dẫn giải



a) $\Delta NEM \sim \Delta PEN$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{NE}{EP} = \frac{ME}{NE} \Rightarrow NE^2 = ME.PE$

b) $\widehat{MNP} = \widehat{MPN}$ (do tam giác MNP cân tại M)

$\widehat{PNE} = \widehat{NPD}\ (= \widehat{NMP}\ ) \Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{DPE}$.

Hai điểm N, P cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ DE và cùng nhìn DE dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $DNPE$ nội tiếp.

c) ΔMPF đồng dạng ΔMIP (g.g)

$\Rightarrow \frac{MP}{MF} = \frac{MI}{MP} \Rightarrow MP^2 = MF.MI (1)$.

$\Delta MNI \sim \Delta NIF$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{NI}{MI} = \frac{\text{IF}}{NI} \Rightarrow NI^2 = MI.\text{IF}\ (2)$

Từ (1) và (2) : $MP^2 + NI^2 = MI(MF + IF) = MI^2 = 4R^2\ (3)$

$\widehat{NMI} = \widehat{KPN}$ (*cùng phụ* $\widehat{HNP}$) $\Rightarrow \widehat{KPN} = \widehat{NPI} \Rightarrow NK = NI\ (4)$

Do tam giác MNP cân tại $M \Rightarrow MN = MP\ (5)$

Từ (3), (4), (5) suy ra điều phải chứng minh.

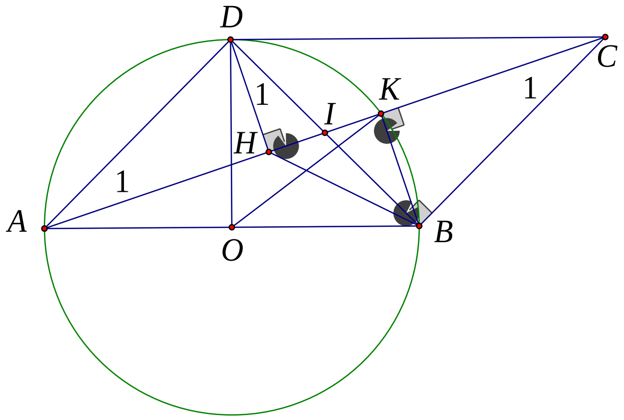
Câu 2. Cho tam giác vuông cân $ADB\ (DA = DB)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC, K là giao điểm của AC với đường tròn (O). Chứng minh rằng :

a) $HBCD$ là một tứ giác nội tiếp.

b) $\widehat{DOK} = 2.\widehat{BDH}$.

c) $CK.CA = 2.BD^2$.

Hướng dẫn giải



a) $DH \perp AC$ (gt) $\widehat{DHC} = 90°$

$\begin{cases} BD \perp AD \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90°$

Hai đỉnh H, B cùng nhìn đoạn DC dưới một góc không đổi bằng $90° \Rightarrow \square HBCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính DC.

b) $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} (= \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BH}$ của đường tròn đường kính DC)

$\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong, do $AD//BC$) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_1}$

$\widehat{DOK} = 2\widehat{A_1}$ (Góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DK}$ của (O)) $\Rightarrow \widehat{DOK} = 2\widehat{D_1} = 2\widehat{BDH}$.

c) $\widehat{AKB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{DHA} = 90°$, $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (c/m trên)

$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta CKB$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AH = CK$

$AD = BD$ (ΔADB cân), $AD = BC$ (c/m trên) $\Rightarrow AD = BD = BC$

Gọi $I = AC \cap BD$. Xét ΔADB vuông tại D, đường cao DH.

Ta có : $BD^2 = AD^2 = AH.AI = CK.AI$ (hệ thức tam giác vuông) (1)

Tương tự : $BD^2 = BC^2 = CK.CI$ (2)

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được:

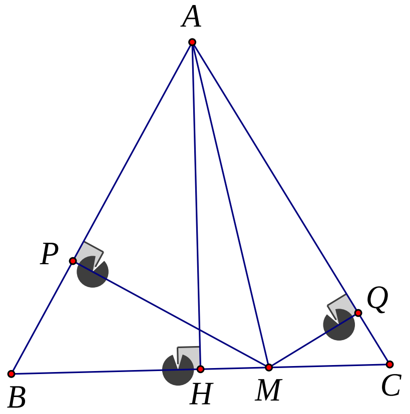
$CK.AI + CK.CI = 2BD^2 \Rightarrow CK(AI + CI) = 2BD^2 \Rightarrow CK.CA = 2BD^2$ (đpcm)

Câu 3. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B, C, H), từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh $APMQ$ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Chứng minh rằng $MP + MQ = AH$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $MP \perp AB \Rightarrow \widehat{APM} = 90^\circ$, $MQ \perp AC \Rightarrow \widehat{AQM} = 90^\circ$ như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90° nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính $AM \Rightarrow APMQ$ là tứ giác nội tiếp.

Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APMQ$ nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APMQ$ là trung điểm của AM.

b) Tam giác ABC có AH là đường cao $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$.

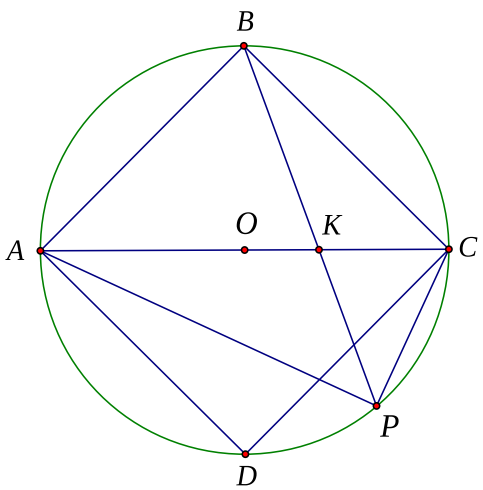
Tam giác ABM có MP là đường cao $\Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MP$.

Tam giác ACM có MQ là đường cao $\Rightarrow S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.MQ$.

Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB.MP + \frac{1}{2}AC.MQ = \frac{1}{2}BC.AH \Rightarrow AB.MP + AC.MQ = BC.AH$.

Mà $AB = BC = CA$ (vì tam giác ABC đều) $MP + MQ = AH$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi P là một điểm trên cung nhỏ CD. Chứng minh rằng: $PA + PC = \sqrt{2}PB$



Hướng dẫn giải

Gọi K là giao điểm của PB và AC

$\widehat{PCK} = \widehat{PBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AP).

$\widehat{CPK} = \widehat{APB}$ (hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau).

$\Rightarrow \Delta PCK \sim \Delta PBA\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{CK}{AB}$ (1)

$\widehat{PAK} = \widehat{PBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CP).

$\widehat{APK} = \widehat{CPB}$ (hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

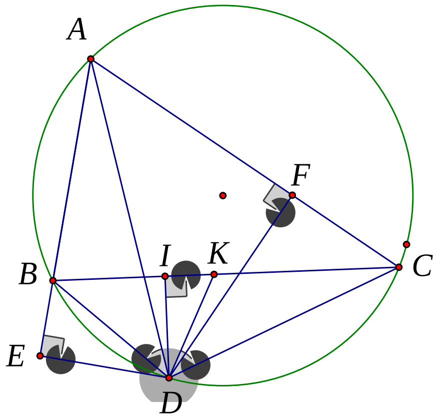
$\Rightarrow \Delta PAK \sim \Delta PBC\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{AK}{BC}$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2), ta được: $\dfrac{PA}{PB} + \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{AK}{BC} + \dfrac{CK}{AB} = \dfrac{AK + CK}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{2}$

Hay : $PA + PC = \sqrt{2}PB$ (đpcm)

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. D là một điểm trên cung BC không chứa đỉnh A. Gọi I, E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BC, AB, AC. Chứng minh rằng : $\dfrac{BC}{DI} = \dfrac{AB}{DE} + \dfrac{AC}{DF}$.

Hướng dẫn giải



Lấy K trên cạnh BC sao cho: $\widehat{CDK} = \widehat{ADB}$

Ta có $\widehat{CDK} = \widehat{ADB}$ (cách vẽ)

$\widehat{DCK} = \widehat{DAB}$ (góc nội tiếp chắn cung BD)

$\Delta CDK \sim \Delta ADB\,(g.g)$

Mà DI, DE thứ tự là hai đường cao của ΔCDK và ΔADB nên:

$\Rightarrow \dfrac{CK}{AB} = \dfrac{DI}{DE} \Rightarrow \dfrac{CK}{DI} = \dfrac{AB}{DE}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{BDK} = \widehat{BDA} + \widehat{ADK}$; $\widehat{ADC} = \widehat{ADK} + \widehat{CDK}$ và do : $\widehat{CDK} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{ADC}$

Lại có : $\widehat{BDK} = \widehat{ADC}$; $\widehat{CBK} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp chắn cung CD)

$\Rightarrow \Delta DBK \sim \Delta DAC\,(g.g)$

Mà DI, DF thứ tự là hai đường cao tương ứng của ΔDBK và ΔDAC nên:

$\Rightarrow \dfrac{BK}{AC} = \dfrac{DI}{DF} \Rightarrow \dfrac{BK}{DI} = \dfrac{AC}{DF}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được: $\dfrac{CK}{DI} + \dfrac{BK}{DI} = \dfrac{AB}{DE} + \dfrac{AC}{DF}$ hay: $\dfrac{BC}{DI} = \dfrac{AB}{DE} + \dfrac{AC}{DF}$.

Chuyên đề 12. CÁC BÀI TẬP CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Gồm 22 bài tập mẫu hướng dẫn chi tiết và 22 bài tập tương tự để rèn luyện

A.Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1. Dạng chung của bài toán cực trị hình học:

" Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình mà một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích …) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất" và có thể được cho dưới các dạng:

a) Bài toán về dựng hình.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn, xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

b) Bài toán về chứng minh.

Ví dụ: Chứng minh rằng trong các dây đi qua điểm P trong một đường tròn (O), dây vuông góc với OP có độ dài nhỏ nhất.

c) Bài toán về tính toán.

Ví dụ: Cho đường tròn (O;R) và điểm P nằm trong đường tròn có OP = h, Tính độ dài nhỏ nhất của dây đi qua P.

2. Hướng giải bài toán cực trị hình học:

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được:

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \le m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được:

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \ge m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$.

B Bài tập vận dụng

Phần I. Một số bài tập mẫu có lời giải chi tiết

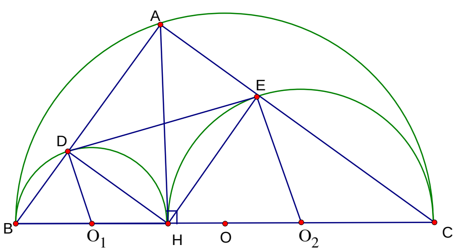
Bài tập 1. Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ AH ⊥ BC Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O1; O2 cắt AB, AC thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết R = 25 và BH = 10

b) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO1O2 đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải:



a) Ta có $\widehat{BAC} = 900$ (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 900$

Xét tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 900$ => ADHE là hình chữ nhật.

Từ đó DE = AH mà AH2 = BH.CH (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay AH2 = 10. 40 = 202 (BH = 10; CH = 2.25 - 10 = 40) => DE = 20

b) Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì ADHE là hình chữ nhật) => $\widehat{C} = \widehat{ADE}$ do $\widehat{C} + \widehat{BDE} = 1800$ nên tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Vì O1D = O1B => Δ O1BD cân tại O1 => $\widehat{B} = \widehat{BDO_1}$ (2)

Từ (1), (2) => $\widehat{ADE} + \widehat{BDO_1} = \widehat{B} + \widehat{BAH} = 900$ => O1D //O2E

Vậy DEO2O1 là hình thang vuông tại D và E.

Ta có Sht = $\frac{1}{2}(O_1D + O_2E).DE = \frac{1}{2}O_1O_2.DE \le \frac{1}{2}O_1O_2^2$

(Vì O1D + O2E = O1H + O2H = O1O2 và DE $\le$ O1O2)

$S_{ht} \le \frac{1}{2}O_1O_2{}^2 = \frac{BC^2}{8} = \frac{R^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi DE =O1O2

$\Leftrightarrow$ DEO2O1 là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung BC Khi đó max $S_{DEO_2O_1} = \frac{R^2}{2}$.

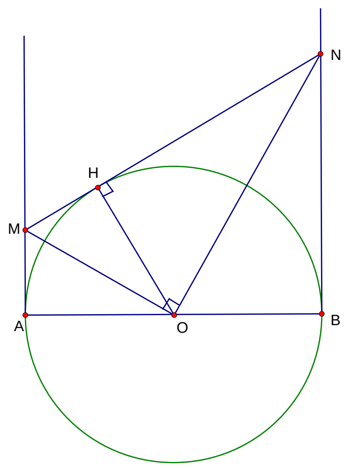
Bài tập 2. Cho đường tròn (O), đường kính AB, d1, d2 là các các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB M, N là các điểm lần lượt thuộc d1, d2 sao cho $\widehat{MON} = 900$.

1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2) Chứng minh AM. AN = $\frac{AB^2}{4}$.

3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



1) Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng MN. Xét tứ giác OAMH

$\widehat{A}+\widehat{H}=180^0$ (do $\widehat{A}=\widehat{H}=90^0$)

=> OAMH là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tương tự tứ giác OANH nội tiếp được

=> $\widehat{A_1}=\widehat{M_1}$, $\widehat{B_1}=\widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn 1 cung)

$\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{B_1}=\widehat{M_1}+\widehat{N_1}=90^0$ => $\widehat{AHB}$ = 900

=> MN là tiếp tuyến

2) Ta có AM = MH, BN = NH, theo hệ thức lượng trong tam vuông, ta có:

AM. BN = MH. NH = OH2 = $\frac{AB^2}{4}$ (đpcm)

3. $S_{\Delta MON}=\frac{1}{2}$OH. MN ≥ $\frac{1}{2}$ OH. AB (Vì AMNB là hình thang vuông)

Dấu "=" khi và chỉ khi MN = AB hay H là điểm chính giữa của cung AB

$\Leftrightarrow$ M, N song song với AB $\Leftrightarrow$ AM = BN = $\frac{AB}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MON}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi AM = BN = $\frac{AB}{2}$.

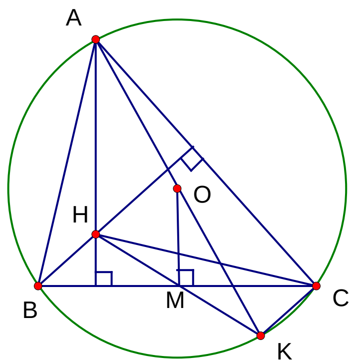
Bài tập 3. Cho ΔABC có 3 góc nhọn, trực tâm là H và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính AK.

a) Chứng minh tứ giác BHCK là hình hình hành.

b) Vẽ OM $\perp$BC (M $\in$ BC). Chứng minh H, M, K thẳng hàng và AH = 2.OM.

c) Gọi A′, B′, C′ là chân các đường cao thuộc các cạnh BC, CA, AB của ΔABC Khi BC cố định hãy xác định vị trí điểm A để tổng S = A′B′ + B′C′ + C′A′ đạt giá trị lớn nhất.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



a) Ta có $\widehat{ACK}$ = 900

(vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên CK $\perp$AC mà BH $\perp$AC (vì H trực tâm)

=> CK // BH tương tự có CH // BK

=> Tứ giác BHCK là hbh (đpcm)

b) OM $\perp$BC => M trung điểm của BC

(định lý đường kính và dây cung) => M là trung điểm của HK (vì BHCK là hình bình hành) => đpcm ΔAHK có OM là đường trung bình => AH = 2.OM

c) Ta có $\widehat{AC'C} = \widehat{BB'C}$ = 900=> tứ giác BC'B'C nội tiếp đường tròn => $\widehat{AC'B'}$ = $\widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (Ax là tiếp tuyến tại A) => Ax // B'C'

OA $\perp$ Ax => OA $\perp$ B'C'. Do đó SAB'OC' = $\frac{1}{2}$R.B'C'

Tương tự: SBA'OC' = $\frac{1}{2}$R.A'C'; SCB'OA' = $\frac{1}{2}$R.A'B'

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}R(A'B' + B'C' + C'A') = \frac{1}{2}AA'.BC \le \frac{1}{2}(AO + OM).BC$

$\Rightarrow$ A'B' + B'C' + C'A', lớn nhất khi A, O, M thẳng hàng $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung lớn BC

Bài tập 4. Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = $\frac{2}{3}$AO.

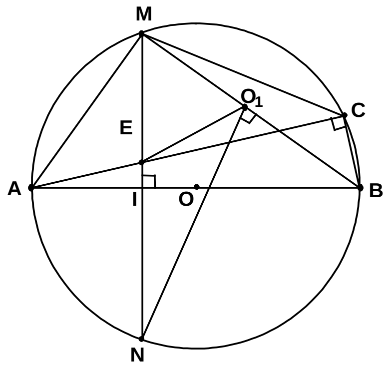
Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B Nối AC cắt MN tại E.

1) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.

2) Chứng minh hệ thức: AM2 = AE.AC

3) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



1. Theo giả thiết MN $\perp$AB tại I

$\widehat{ACB} = 90^0$ hay $\widehat{ECB} = 90^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 180^0$

mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiêt MN $\perp$AB, suy ra A là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $\widehat{AME} = \widehat{ACM}$, lại có $\widehat{CAM}$ là góc chung do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM $\Rightarrow$ $\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM}$ $\Rightarrow$ AM2 = AE.AC

3. Theo trên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ $\Rightarrow$ AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECM. Nối MB ta có $\widehat{AMB}$ = 900, do đó tâm O1 của đường tròn ngoại tiếp ΔECM phải nằm trên BM.

Ta thấy NO1 nhỏ nhất khi NO1 là khoảng cách từ N đến BM $\Rightarrow$ NO1 $\perp$BM. Gọi O1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O1 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM có bán kính là O1M.

Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn (O1), bán kính O1M với đường tròn (O) trong đó O1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

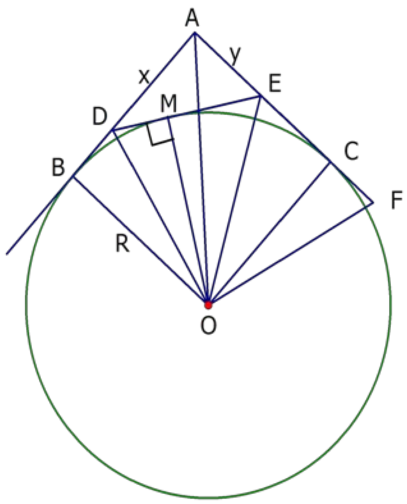
Bài tập 5. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA = $R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng 2R.

a) Chứng minh tứ giác ABOC là hình vuông.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔADE.

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến) (1)

$AB = AC = \sqrt{OA^2 - OB^2} = R = OB = OC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ABOC là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: $AD + DE + AE = 2R$ (3).

Suy ra: $DE = BD + CE$ (4).

Vẽ $OM \perp DE$ $(M \in DE)$ (5)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho CF = BD; suy ra ΔBDO = ΔCOF (c-g-c)

$\Rightarrow$ OD = OF; lại có DE = FE nên $\Delta ODE = \Delta OFE$ (c-c-c)

$\Rightarrow OM = OC = R$

(hai đường cao tương ứng) (6). Từ (5) và (6) suy ra DE là tiếp tuyến của đường tròn (O;R).

c) Đặt: AD = x; AE = y $\Rightarrow S_{ADE} = \dfrac{1}{2}xy$ (x, y > 0)

Ta có: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (định lí Pitago).

Vì AD + DE + AE = 2R $\Rightarrow$ $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2R$ (6)

Áp dụng BĐT – Côsi cho hai số không âm ta có:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}$ (7).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Từ (6) và (7) suy ra: $2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} \leq 2R \Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(2+\sqrt{2}\right) \leq 2R$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \dfrac{2R}{\left(2+\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow xy \leq \dfrac{2R^2}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow SADE \leq \dfrac{R^2}{3+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow S_{ADE} \leq \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R^2$.

Vậy max SADE = $\left(3-2\sqrt{2}\right)R^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \Delta ADE$ cân tại A

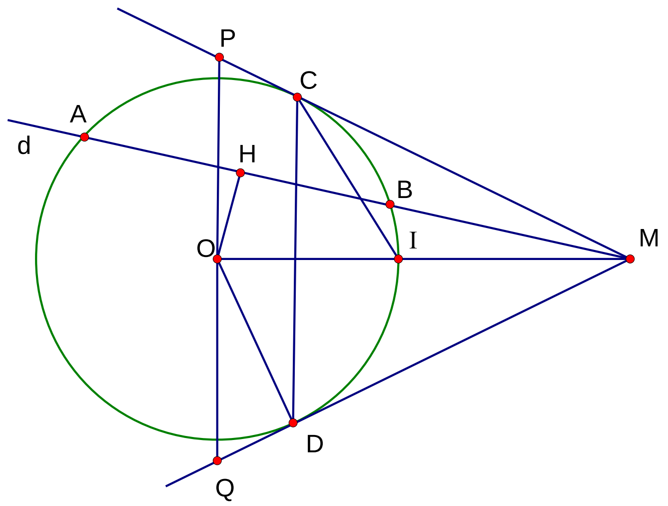
Bài tập 6. Cho đường trong (O, R) và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB

1) Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

3) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Hướng dẫn giải:



1) Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM} = 90^0$. Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^0$. Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có MC = MD $\Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M $\Rightarrow$ MI là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$. Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$ nên $\widehat{DCI} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DI}$ = $\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CI}$ = $\widehat{MCI}$

$\Rightarrow$ CI là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

3) Ta có tam giác MPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính: $S = 2S_{OQM} = 2.\dfrac{1}{2}.OD.QM = R(MD + DQ)$. Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MD + DQ nhỏ nhất. Mặt

khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên MD + DQ nhỏ nhất ⇔ DM = DQ = R. Khi đó OM = $R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

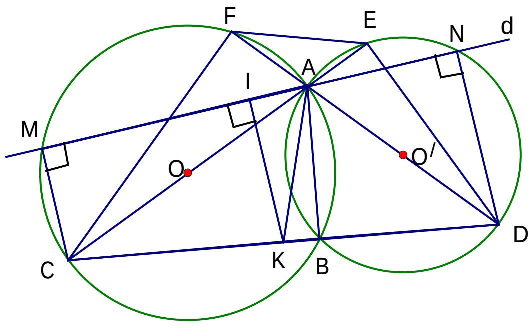
Bài tập 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O').

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt (O) và (O') thứ tự tại M và N. Xác định vị trí của d để CM + DN đạt giá trị lớn nhất.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



a) Ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O/) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác CDEF có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O/)

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$ suy ra CDEF là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có $\widehat{CMA} = \widehat{DNA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); suy ra CM // DN hay CMND là hình thang.

Gọi I, K thứ tự là trung điểm của MN và CD Khi đó IK là đường trung bình của hình thang CMND Suy ra IK // CM // DN (1) và CM + DN = 2.IK (2)

Từ (1) suy ra IK $\perp$ MN $\Rightarrow$ IK $\leq$ KA (3) (KA là hằng số do A và K cố định).

Từ (2) và (3) suy ra: CM + DN $\leq$ 2KA Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi IK = AK ⇔ d $\perp$ AK tại A

Vậy khi đường thẳng d vuông góc AK tại A thì (CM + DN) đạt giá trị lớn nhất bằng 2KA

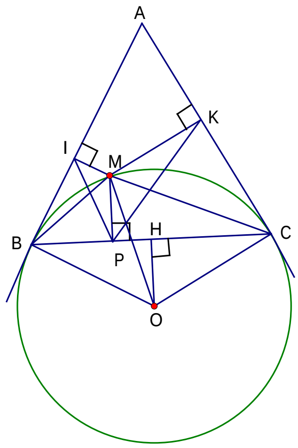
Bài tập 8. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ MI $\perp$ AB, MK $\perp$ AC (I $\in$ AB,K $\in$ AC)

a) Chứng minh: AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ $(P \in BC)$. Chứng minh: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích MI.MK.MP đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MCK}$ (1). Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\overset\frown{MC}$) (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$ (3)

c) Chứng minh tương tự câu b ta có BPMI là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{MIP} = \widehat{MBP}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MIP}$.

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{MKP} = \widehat{MPI}$.

Suy ra: MPK ~ $\Delta MIP \Rightarrow \dfrac{MP}{MK} = \dfrac{MI}{MP}$

$\Rightarrow$ MI.MK = MP2 $\Rightarrow$ MI.MK.MP = MP3.

Do đó MI.MK.MP lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất (4)

- Gọi H là hình chiếu của O trên BC, suy ra OH là hằng số (do BC cố định).

Lại có: MP + OH $\le$ OM = R $\Rightarrow$ MP $\le$ R – OH. Do đó MP lớn nhất bằng R – OH khi và chỉ khi O, H, M thẳng hàng hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC (5). Từ (4) và (5) suy ra max (MI.MK.MP) = (R – OH)3 $\Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung nhỏ BC

Bài tập 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1) Chứng minh AC + BD = CD

2) Chứng minh $\angle COD = 90°$.

3) Chứng minh AC BD = $\dfrac{AB^2}{4}$.

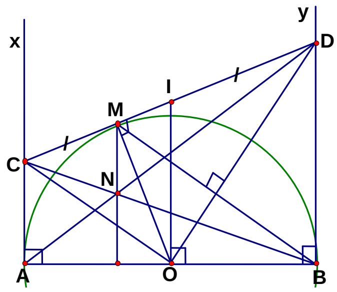
4) Chứng minh OC // BM

5) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

6) Chứng minh $MN \perp AB$

7) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => ∠COD = 900.

2. Theo trên ∠COD = 900 nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC BD =R2 => AC BD = $\dfrac{AB^2}{4}$.

3. Theo trên ∠COD = 900 nên OC ⊥ OD(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

4. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow$ IO // AC, mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

5. Theo trên AC // BD => $\dfrac{CN}{BN}=\dfrac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\dfrac{CN}{BN}=\dfrac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB

6. Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB

Bài tập 10. (Sở Thái Bình 2015 – 2016) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

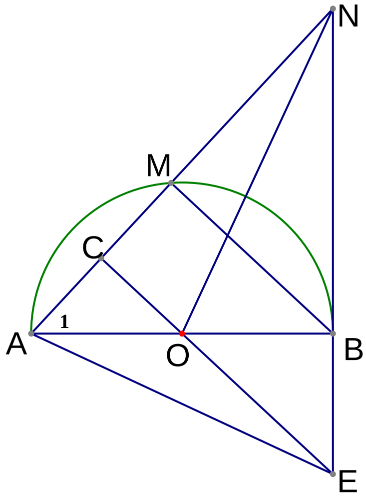
a) Chứng minh: tứ giác OCNB nội tiếp.

b) Chứng minh: ACAN = AO.AB

c) Chứng minh: NO vuông góc với AE.

d) Tìm vị trí điểm M sao cho (2.AM + AN) nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



6.

a) Phần đường kính OC đi qua trung điểm C của AM $\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OCN} = 90^o$.

BN là tiếp tuyến của (O) tại B $\Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow \widehat{OBN} = 90^o$.

Xét tứ giác OCNB có tổng hai góc đối: $\widehat{OCN} + \widehat{OBN} = 90^o + 90^o = 180^o$

Do đó tứ giác OCNB nội tiếp.

b) Xét ΔACO và ΔABN có: $\widehat{A}_1$ chung; $\widehat{ACO} = \widehat{ABN} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta ABN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO}{AN}$

Do đó ACAN = AO.AB (đpcm).

c) Theo chứng minh trên, ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC$ là đường cao của ΔANE (1)

$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB$ là đường cao của ΔAME (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trực tâm của ΔANE (vì O là giao điểm của AB và EC).

$\Rightarrow$ NO là đường cao thứ ba của ΔANE.

Do đó; $NO \perp AE$ (đpcm).

d) Ta có: 2.AM + AN = 4AC + AN (vì C là trung điểm của AM).

4ACAN = 4AO.AB = 4R.2R = 8R2

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$4AC + AN \geq 2\sqrt{4AC.AN} = 2\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$

$\Rightarrow$ Tổng 2.AM + AN nhỏ nhất = $4\sqrt{2}R \Leftrightarrow 4AC = AN$

$\Leftrightarrow AN = 2AM \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AN.

ΔABN vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên AM = MB

$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM} \Rightarrow$ M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB

Vậy với M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB thì (2.AM + AN) nhỏ nhất = $4\sqrt{2}R$.

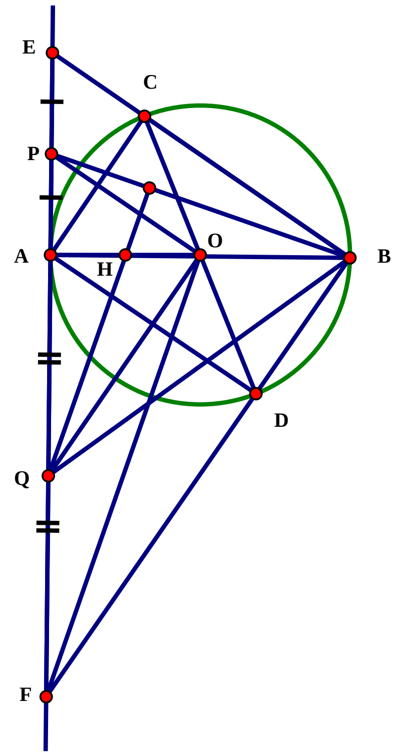
Bài tập 11. (Sở Hải Dương 2015 – 2016) Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1) Chứng minh ACBD là hình chữ nhật;

2) Gọi H là trực tâm của tam giác BPQ. Chứng minh H là trung điểm của OA;

3) Xác định vị trí của đường kính CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



a) Có $\widehat{ACB} = \widehat{CBD} = \widehat{ADB} = 90^0$ (Các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Tứ giác ACBD là hình chữ nhật (Tứ giác có ba góc vuông)

b) Có PO là đường trung bình của tam giác AEB $\Rightarrow$ PO // EB mà EB $\perp$ BF$\Rightarrow$ PO$\perp$BF

Xét tam giác PBF có BA $\perp$PF; PO$\perp$BF nên BA và PO là các đường cao của tam giác PBF mà BA và PO cắt nhau tại O nên O là trực tâm của tam giác PBF$\Rightarrow$FO là đường cao thứ ba của tam giác PBF hay FO$\perp$PB (1).

Lại có H là trực tâm của tam giác PBQ nên QH $\perp$ PB (2)Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ QH // FO. Xét tam giác AOF có Q là trung điểm của AF; QH // FO nên H là trung điểm của AO

c) $S_{BPQ} = \dfrac{1}{2}AB(AP + AQ) = \dfrac{1}{4}AB.(AE + AF)$ (3)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với hai số không âm AE và AF ta có: AE + AF $\geq 2\sqrt{AE.AF}$ (4)

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ AE =AF)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow S_{\Delta BPQ} \geq \dfrac{1}{2}.AB.\sqrt{AE.AF}$ (5)

Lại có: Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông EBF ta có:

AE.AF = AB2 (6) Từ (5) và (6) ta có SBPQ$\geq \dfrac{AB^2}{2}$

Xảy ra dấu bằng khi AE = AF

$\Rightarrow$ Tam giác EBF vuông cân tại B

$\Leftrightarrow$ ACBD là hình vuông nên CD vuông góc AB

Vậy: Khi đường kính CD vuông góc với đường kính AB thì tam giác PBQ có diện tích nhỏ nhất

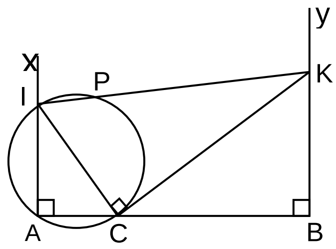
Bài tập 12. (Sở Vĩnh Phúc năm 2009 – 2010) Trên đoạn thẳng AB cho điểm C nằm giữa A và B Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB Trên tia Ax lấy điểm I, tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P (P khác I)

a) Chứng minh tứ giác CPKB nội tiếp một đường tròn, chỉ rõ đường tròn này.

b) Chứng minh $\widehat{CIP}=\widehat{PBK}$.

c) Giả sử A, B, I cố định. Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho diện tích tứ giác ABKI lớn nhất.

<u>**Hướng dẫn giải:**</u>



a) Có: $\widehat{CPK}=\widehat{CPI}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

Do $By\perp AB$ nên $\widehat{CBK}=90^0$.

Suy ra: $\widehat{CPK}+\widehat{CBK}=180^0$ hay tứ giác CPKB nội tiếp đường tròn đường kính CK.

b) Ta có: $\widehat{CIP}=\widehat{PCK}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung); (1)

Mặt khác tứ giác PCBK nội tiếp nên: $\widehat{PCK}=\widehat{PBK}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

c) Từ giả thiết suy ra tứ giác *AIKB* là hình thang vuông, gọi *s* là diện tích của *AIKB*, khi đó ta có: $s=\dfrac{1}{2}(AI+KB)AB$. Dễ thấy *s* lớn nhất khi và chỉ khi *KB* lớn nhất (do A, B, I cố định).

Xét các tam giác vuông *AIC* và *BKC* có: $KC\perp CI$ và $KB\perp CA$ suy ra: $\widehat{BKC}=\widehat{ACI}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) hay ΔACI đồng dạng với ΔBKC (g-g).

Suy ra: $\dfrac{AC}{BK}=\dfrac{AI}{BC}\Leftrightarrow BK=\dfrac{AC.BC}{AI}$, khi đó: *BK* lớn nhất $\Leftrightarrow$ *ACBC* lớn nhất

Theo BĐT Côsi có: $AC.CB\le\left(\dfrac{AC+CB}{2}\right)^2=\dfrac{AB^2}{4}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi *C* là trung điểm của *AB* Vậy diện tích tứ giác *AIBK* lớn nhất khi và chỉ khi *C* là trung điểm của *AB*

Bài tập 13. (Sở Đà Nẵng 2009) Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = $\dfrac{2}{3}$AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và.B Nối AC cắt MN tại E.

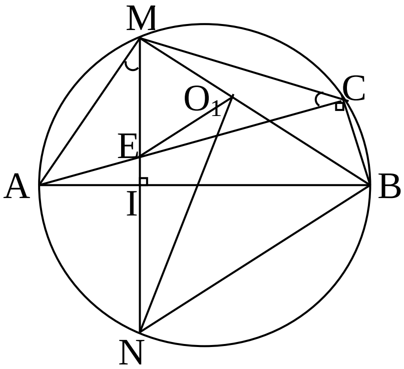
a) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh ΔAME ∽ ΔACM và AM2 = AE.AC

c) Chứng minh AE.AC - AI.IB = AI2.

d) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



a) * $\widehat{EIB} = 90^0$ (giả thiết)

* $\angle ECB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

* Kết luận: Tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp

b) Ta có:

* sđ $\text{cung}AM$ = sđ $\text{cung}AN$

* $\angle AME = \angle ACM$

*GócAchung,suyraΔAME ∽ ΔACM.

* Do đó: $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AM}{AE} \Leftrightarrow$ AM2 = AE.AC

c) * MI là đường cao của tam giác vuông MAB nên MI2 = AI.IB

* Trừ từng vế của hệ thức ở câu b) với hệ thức trên

* Ta có: AE.AC - AI.IB = AM2 - MI2 = AI2.

d) * Từ câu b) suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME. Do đó tâm O1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME nằm trên BM. Ta thấy khoảng cách NO1 nhỏ nhất khi và chỉ khi NO1 $\perp$ BM.)

* Dựng hình chiếu vuông góc của N trên BM ta được O1. Điểm C là giao của đường tròn đã cho với đường tròn tâm O1, bán kính O1M.

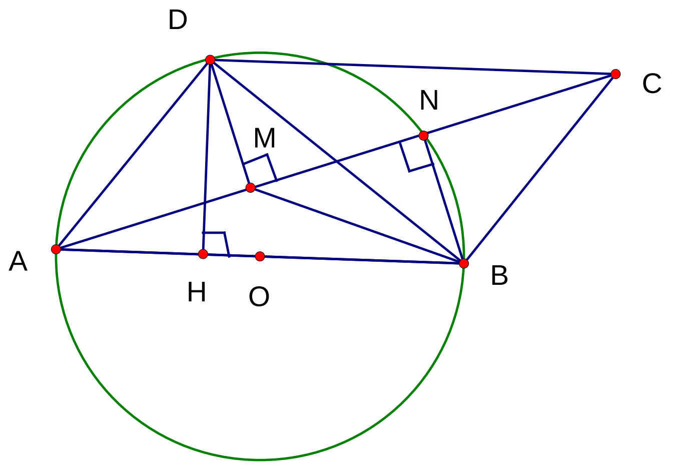
Bài tập 14. (Sở Phú Yên 2009 – 2010) Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC

a) Chứng minh tứ giác: CBMD nội tiếp được

b) Chứng minh rằng: DBDC = DN.AC

c) Xác định vị trí của điểm D để diện tích hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất và tính diện tích trong trường hợp này

Hướng dẫn giải:



a. Góc ADB = 900 (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà AD//BC (gt) => DB⊥BC

Xét tứ giác DMBC có góc DMC = góc DBC =900 => Tứ giác nội tiếp.

b. Ta có ΔDBN đồng dạng với ΔCAD

($\widehat{DAC} = \widehat{\mathrm{DBN}}$, $\widehat{BDN} = \widehat{BAN} = \widehat{DCA}$)

=> $\dfrac{DN}{\mathrm{DC}} = \dfrac{DB}{AC}$ => DBDC = DN.AC

c. SABCD = DH.AB

Do AB không đổi = 2R

=> SABCD max ⇔DH max ⇔ D nằm chính giữa cung AB

Bài tập 15. (Sở Hải Dương 2009 – 2010) Cho đường tròn (O), dây AB không đi qua tâm. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M (M không trùng với A, B). Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H. Kẻ MK vuông góc với AN $\left(\mathrm{K} \in \mathrm{AN}\right)$.

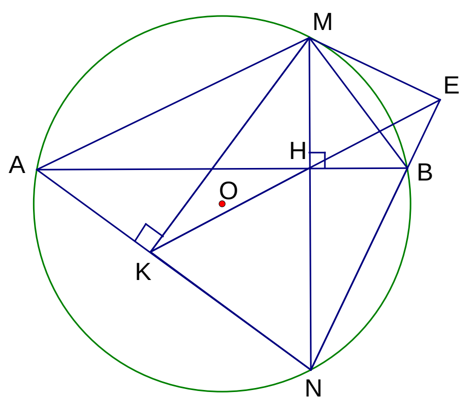
1) Chứng minh: Bốn điểm A, M, H, K thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: MN là phân giác của góc BMK.

3) Khi M di chuyển trên cung nhỏ AB Gọi E là giao điểm của HK và BN.

Xác định vị trí của điểm M để (MK.AN + ME.NB) có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn:



Chú ý: Kể cả trường hợp đặc biệt khi MN đi qua O

1) Từ giả thiết: $\widehat{\mathrm{AKM}} = 90^0$, $\widehat{\mathrm{AHM}} = 90^0$

Bốn điểm A, K, H, M cùng thuộc một đường tròn

2) $\widehat{NAH} = \widehat{NMK} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{KH}$ (1)

$\widehat{NAH} = \widehat{NMB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{NB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{NMB}$

$\Rightarrow$ MN là phân giác của góc KMB

3) $\widehat{MAB} = \widehat{MNB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MB}$; $\widehat{MAB} = \widehat{MKH} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MH}$

$\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MKH} \Rightarrow K, M, E, N$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MKN} = 180^0 \Rightarrow ME \perp NB$

$S_{\Delta MAN} = \dfrac{1}{2}MK.AN;\ S_{\Delta MNB} = \dfrac{1}{2}ME.NB;\ S_{\square AMBN} = \dfrac{1}{2}MN.AB$

$\Rightarrow MK.AN + ME.BN = MN.AB$

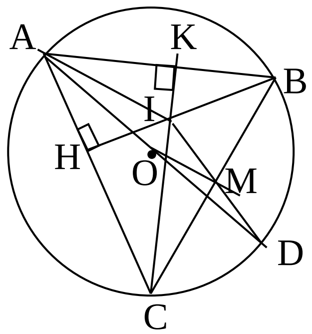
$\Rightarrow (MK.NA + ME.NB)$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ MN.AB lớn nhất

$\Leftrightarrow$ MN lớn nhất (Vì AB= const) $\Rightarrow$ M là chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

Bài tập 16. (Sở Bắc Giang 2009 – 2010) Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định. H thuộc đoạn thẳng OA(H khác A;O và trung điểm của OA). Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H. MN cắt AK tại E.

1. Chứng minh tứ giác HEKB nội tiếp.
2. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác AKM.
3. Cho điểm H cố định, xác định vị trí của K để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MKE nhỏ nhất.

Hướng dẫn:



1/ ΔAHI vuông tại H (vì CA $\perp$ HB)

ΔAHI nội tiếp đường tròn đường kính AI

ΔAKI vuông tại H (vì CK $\perp$ AB)

ΔAKI nội tiếp đường tròn đường kính AI

Vậy tứ giác AHIK nội tiếp đường tròn đường kính AI

Ta có CA $\perp$ HB(Gt)

CA $\perp$ DC(góc ACD chắn nửa đường tròn)

=> BH//CD hay BI//CD (1)

Ta có AB $\perp$ CK(Gt)

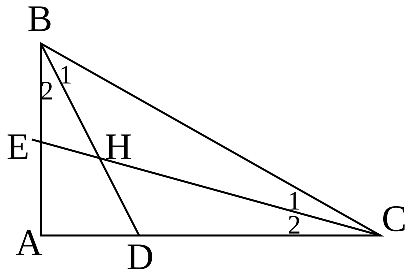
AB $\perp$ DB(góc ABD chắn nửa đường tròn)

=> CK//BD hay CI//BD (2)

Từ (1) và (2) ta có Tứ giác BDCI là hình bình hành(Có hai cặp cạnh đối song song)

Mà DI cắt CB tại M nên ta có MB = MC

=> OM $\perp$ BC(đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây đó)



2/

Vì BD là tia phân giác góc B của tam giác ABC;

nên áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = 2AB$

Vì ΔABC vuông tại A mà BC = 2AB nên

ACB = 300; ABC = 600

Vì B1 = B2(BD là phân giác) nên ABD = 300

Vì ΔABD vuông tại A mà ABD = 300 nên BD = 2AD = 2. 2 = 4cm

=> $AB^2 = BD^2 - AD^2 = 16 - 4 = 12$

Vì ΔABC vuông tại A => $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{3}$

Vì CH là tia phân giác góc C của tam giác CBD; nên áp dụng tính chất đường phân giác ta có: $\frac{DC}{BC} = \frac{DH}{HB} \Leftrightarrow \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{DH}{HB} \Rightarrow BH = \sqrt{3}DH$

Ta có: $\begin{cases} BH + HD = 4 \\ BH = \sqrt{3}HD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}BH + \sqrt{3}HD = 4\sqrt{3} \\ BH = \sqrt{3}HD \end{cases} \Rightarrow BH(1+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

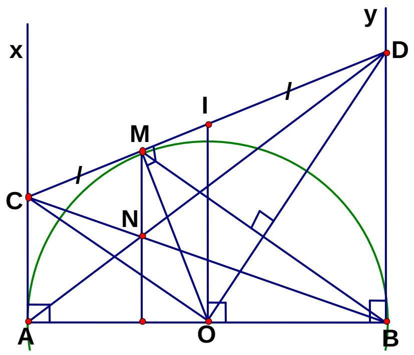
$BH = \frac{4\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$. Vậy $BH = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)cm$

Bài tập 17. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD
2. Chứng minh $\angle$COD = 900.
3. Chứng minh $AC.BD = \frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh OC // BM
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD
6. Chứng minh MN $\perp$ AB

7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => ∠COD = 900.

Theo trên ∠COD = 900 nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD (OM là tiếp tuyến).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC BD =R2 => AC BD = $\frac{AB^2}{4}$.

Theo trên ∠COD = 900 nên OC ⊥ OD(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

=> IO // AC, mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB

Bài tập 18. Cho (O),dây cung AB Từ điểm M bất kỳ trên cung AB(M≠A và M≠B),kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H.Gọi MQ là đường cao của tam giác MAN.

1. C/m 4 điểm A;M;H;Q cùng nằm trên một đường tròn.

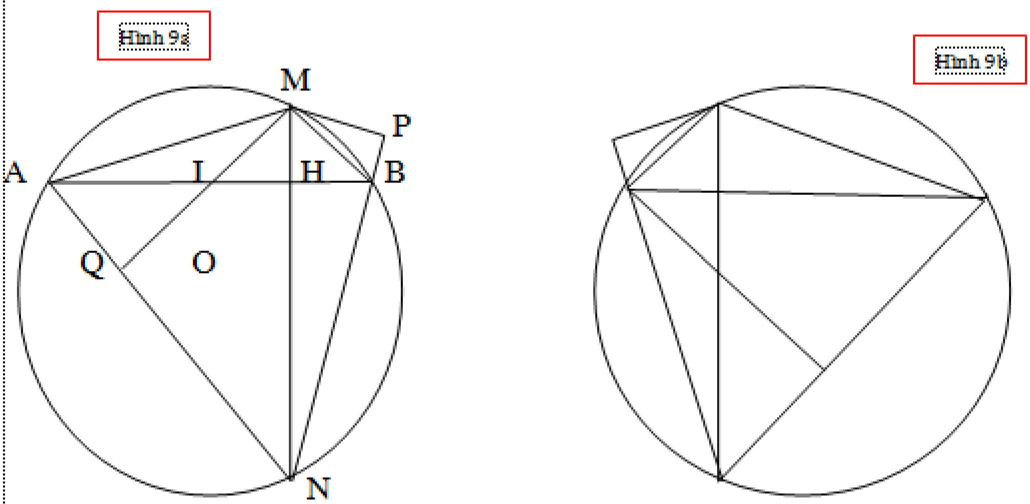
2. C/m:NQ.NA=NH.NM

3. C/m Mn là phân giác của góc $\widehat{BMQ}$.

4. Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN;xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giác trị lớn nhất.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Có 2 hình vẽ,cách c/m tương tự. Sau đây chỉ C/m trên hình 9-a.



1/ C/m:A,Q,H,M cùng nằm trên một đường tròn.(Tuỳ vào hình vẽ để sử dụng một trong các phương pháp sau:-Cùng làm với hai đàu …mot goc vuong.

-Tổng hai góc đối.

2/C/m: NQ.NA=NH.NM.

Xét hai Δvuông NQM và ΔNAH đồng dang.

3/C/m MN là phân giác của góc BMQ. Có hai cách:

□Cách 1: Gọi giao điểm MQ và AB là I.C/m tam giác MIB cân ở M

□Cách 2: Góc QMN=NAH(Cùng phụ với góc ANH)

Góc NAH=NMB(Cùng chắn cung NB)⇒đpcm

4/ xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giác trị lớn nhất.

Ta có 2SΔMAN=MQ.AN

2SΔMBN=MP.BN.

2SΔMAN + 2SΔMBN = MQ.AN+MP.BN

Ta lại có: 2SΔMAN + 2SΔMBN =2(SΔMAN + SΔMBN)=2SAMBN=2.$\frac{AB\times MN}{2}$=ABMN

Vậy: MQ.AN+MP.BN=ABMN

Mà AB không đổi nên tích ABMN lớn nhất ⇔MN lớn nhất⇔MN là đường kính ⇔M là điểm chính giữa cung AB

Bài tập 19. Cho đường tròn (O) đường kính AB Gọi I là trung điểm của OA Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A

2. Chứng minh IP // OQ.

3. Chứng minh rằng AP = PQ.

4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

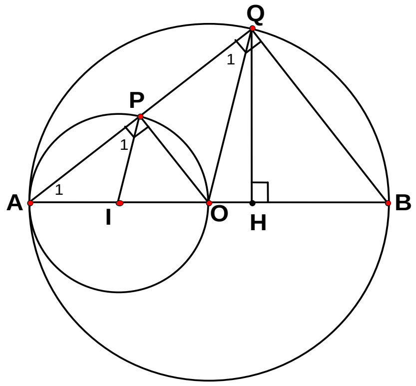
Hướng dẫn giải:

1. Ta có OI = OA – IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đường tròn (O) và đường tròn (I). Vậy đường tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A

2. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) => ∠A1 = ∠Q1

ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) => ∠A1 = ∠P1

=> ∠P1 = ∠Q1 mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.



3. ∠APO = 900 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => OP ⊥ AQ => OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến => AP = PQ.

4. (*HD*) Kẻ QH ⊥ AB ta có SAQB = $\frac{1}{2}$ABQH. mà AB là đường kính không đổi nên SAQB lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB

Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.

Thật vậy P là trung điểm của cung AO => PI ⊥ AO mà theo trên PI // QO => QO ⊥ AB tại O => Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

Bài tập 20. (Sở Hà Tĩnh 2009 – 2010) Cho đường tròn tâm O có các đường kính CD, IK (IK không trùng CD)

1. Chứng minh tứ giác CIDK là hình chữ nhật

2. Các tia DI, DK cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn tâm O thứ tự ở G; H

a. Chứng minh 4 điểm G, H, I, K cùng thuộc một đường tròn.

b. Khi CD cố định, IK thay đổi, tìm vị trí của G và H khi diện tích tam giác DIJ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

1. Ta có CD là đường kính, nên:

∠CKD = ∠CID = 900 (T/c góc nội tiếp)

Ta có IK là đường kính, nên:

∠KCI = ∠KDI = 900 (T/c góc nội tiếp)

Vậy tứ giác CIDK là hình chữ nhật.

2. a. Vì tứ giác CIDK nội tiếp nên ta có:

∠ICD = ∠IKD (t/c góc nội tiếp)

Mặt khác ta có: ∠G = ∠ICD (cùng phụ với ∠GCI)

⇒ ∠G = ∠IKD

Vậy tứ giác GIKH nội tiếp.

b. Ta có: DC $\perp$ GH (t/c)

$\Rightarrow$ DC2 = GCCH mà CD là đường kính,nên độ dài CD không đổi.

$\Rightarrow$ GC CH không đổi.

Để diện tích ΔGDH đạt giá trị nhỏ nhất khi GH đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà GH = GC + CH nhỏ nhất khi GC = CH

Khi GC = CH ta suy ra: GC = CH = CD và IK $\perp$ CD

Bài tập 21. (Sở Khánh Hòa 2009 - 2010) Cho đường tròn (O; R). Từ một điểm M nằm ngoài (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C bất kì trên cung nhỏ AB (Ckhác với A và B). Gọi D, E, F lần lượt la hình chieu vuong goc cua C trên AB, AM, BM.

a. Chứng minh AECD là một tứ giác nội tiếp.

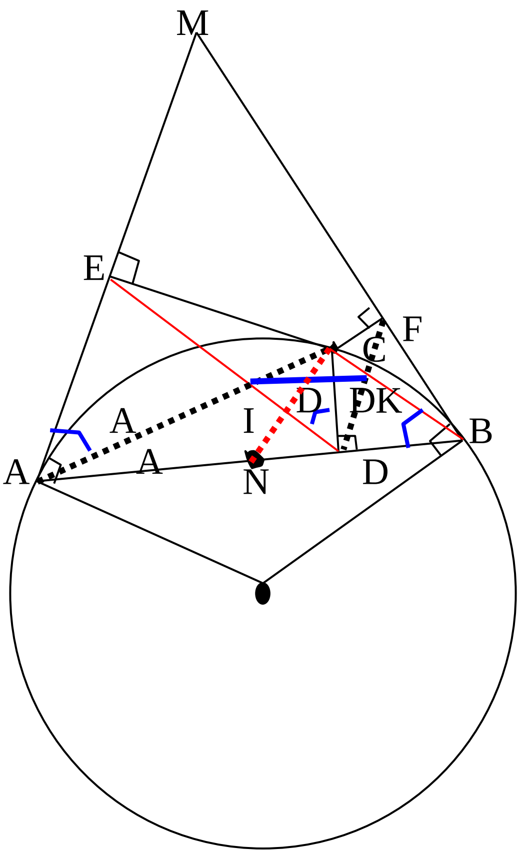
b. Chứng minh: $\widehat{CDE} = \widehat{CBA}$

c. Gọi I là giao điểm của AC và ED, K là giao điểm của CB và DF. Chứng minh IK//AB

d. Xác định vị trí điểm C trên cung nhỏ AB để (AC2 + CB2) nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó khi OM = 2R.

Hướng dẫn giải:

a. Chứng minh AECD l một tứ gic nội tiếp.



Xét tứ giác AECD ta có:

- Hai góc đối $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ (CD \perp AB; CE \perp AM)$

Nn tổng của chng b nhau.

Do đó tứ giác AECD nội tiếp đường tròn

b. Chứng minh: $\widehat{CDE} = \widehat{CBA}$

Tứ giác AECD nội tiếp đường tròn

$\widehat{CDE} = \widehat{CAE}$ $(cùng\ chắn\ cung\ CE)$

Điểm C thuộc cung nhỏ AB nên:

$\widehat{CAE} = \widehat{CBA}$ $(cùng\ chắn\ cung\ CA)$

Suy ra: $\widehat{CDE} = \widehat{CBA}$

c. Chứng minh IK//AB

Xét ΔDCE và ΔBCA ta có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{D} = \widehat{B}\ (cmt) \\ \widehat{E} = \widehat{A}\ (cùngchắncungCD)\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{KCI}$

$mà\ \widehat{EAD} = \widehat{IDK} (\widehat{A_1} = \widehat{D_1}; \widehat{A_2} = \widehat{D_2} = \widehat{FBC})$

$\widehat{EAD} + \widehat{DCE} = 180^0 (tứ\ giác\ AECD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{KCI} + \widehat{IDK} = 180^0$

Suy ra tứ gic ICKD nội tiếp.

=> $\widehat{CIK} = \widehat{CDK} \left(cùngchắn\ \widehat{CK}\right)$

M $\widehat{CAB} = \widehat{CDK}\left(cùng chắn\ \widehat{\text{CBF}}\right)$

Suy ra $\widehat{CIK} = \widehat{CBA}\left(\text{ở vị trí đồng vị}\right)$

➔ IK//AB (đpcm)

d. Xác định vị trí điểm C trên cung nhỏ AB để (AC2 + CB2) nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó khi OM = 2R.

Gọi N là trung điểm của AB Ta có :

AC2 + CB2 = 2CD2 + AD2 + DB2 =2(CN2 – ND2) + (AN+ND)2 + (AN – ND)2

= 2CN2 – 2ND2 + AN2 + 2AN.ND + ND2 + AN2 – 2AN.ND + ND2.

= 2CN2 + 2AN2 = 2CN2 + AB2/2

AB2/2 ko đổi => CA2 + CB2 đạt GTNN khi CN đạt GTNN ⇔ C là giao điểm của ON với cung nhỏ AB => C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB

Khi OM = 2R thì OC = R hay C là trung điểm của OM => CB = CA = MO/2 = R

Do đó: Min (CA2 + CB2) = 2R2.

Phần II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 1. (Sở Quảng Ngãi 2015 – 2016) Cho nửa đường tròn đường kính AB và C là một điểm nằm giữa hai điểm A và B Trên nửa mặt phẳng có bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tia A*x* và B*y* tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho. Trên tia Ax lấy điểm I (với I khác A); đường thẳng vuông góc với CI tại C cắt tia B*y* tại K. Đường tròn đường kính IC cắt tia IK tại E.

1. Chứng minh tứ giác CEKB nội tiếp được đường tròn.

2. Chứng minh $AI.BK = AC.CB$

3. Chứng minh điểm E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB

4. Cho các điểm A; B; I cố định. Hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang ABKI lớn nhất.

Bài tập 2. (Tỉnh Hải Dương 1998 – 1999) Cho tam giác ABC vuông cân ở A, trên cạnh BC lấy điểm M. Gọi (O1) là đường tròn tâm O1 qua M và tiếp xúc với AB tại B, gọi (O2) là đường tròn tâm O2 qua M và tiếp xúc với AC tại C Đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau tại D (D không trùng với A).

1) Chứng minh rằng tam giác BCD là tam giác vuông.

2) Chứng minh O1D là tiếp tuyến của (O2).

3) BO1 cắt CO2 tại E. Chứng minh 5 điểm A, B, D, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

4) Xác định vị trí của M để O1O2 ngắn nhất.

Bài tập 3. (Đề Hải Dương 1999 – 2000) Cho tam giác đều ABC, trên cạnh BC lấy điểm E, qua E kẻ các đường thẳng song song với AB và AC chúng cắt AC tại P và cắt AB tại Q.

1) Chứng minh BP = CQ.

2) Chứng minh tứ giác ACEQ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí của E trên cạnh BC để đoạn PQ ngắn nhất.

3) Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho HB2 = HA2 + HC2. Tính góc AHC

Bài tập 4. (Đề Hải Dương 2003-2004) Cho hình vuông ABCD, M là một điểm trên đường chéo BD, gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC và AD

1) Chứng minh: Δ MIC = Δ HMK.

2) Chứng minh CM vuông góc với HK.

3) Xác định vị trí của M để diện tích của tam giác CHK đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 5. (Đề Hải Dương 2005 - 2006) Cho nửa đường tròn đường kính MN. Lấy điểm P tuỳ ý trên nửa đường tròn ($P \neq M$, $P \neq N$). Dựng hình bình hành MNQP. Từ P kẻ PI vuông góc với đường thẳng MQ tại I và từ N kẻ NK vuông góc với đường thẳng MQ tại K.

1) Chứng minh 4 điểm P, Q, N, I nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: MP. PK = NK. PQ.

3) Tìm vị trí của P trên nửa đường tròn sao cho NK.MQ lớn nhất.

Bài tập 6. (Đề Hải Dương 2006 - 2007) Cho điểm A ở ngoài đường tròn tâm O. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC ($M \neq B$, $M \neq C$). Gọi D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AC, BC; H là giao điểm của MB và DF; K là giao điểm của MC và EF.

1) Chứng minh:

a) MECF là tứ giác nội tiếp.

b) MF vuông góc với HK.

2) Tìm vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích MDME lớn nhất.

Bài tập 7. (Đề Hà Nội năm 2006 - 2007) Cho đường tròn tâm 0, đường kính AB = 2R, C là trung điểm của OA, kẻ dây cung MN vuông góc với OA tại C Lấy điểm K tuỳ ý thuộc cung BM nhỏ. Gọi H là giao điểm của AK và MN.

a) Chứng minh tứ giác BCHK nội tiếp

b) Tính AH. AK theo R

c) Xác định vị trí của điểm K để tổng KM + KN + KB đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị lớn nhất đó.

Bài tập 8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O; R). M di động trên AB N di động trên tia đối của tia CA sao cho BM = CN.

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D Chứng minh rằng D cố định.

b) Tính góc MDN.

c) MN cắt BC tại K. Chứng minh DK vuông góc với MN.

d) Đặt AM = x. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

Bài tập 9. Hai đường tròn tâm O và tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B Đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn (O) và (I) lần lượt tại P, Q. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng PO và QI.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BCQP, OBCI nội tiếp.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AP, AQ, K là trung điểm của EF. Khi đường thẳng d quay quanh A thì K chuyển động trên đường nào?

c) Tìm vị trí của d để tam giác PQB có chu vi lớn nhất.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), H là trực tâm của tam giác ABC, M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A

a. Xác định vị trí của M để tứ giác BHCM là hình bình hành.

b. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC Chứng minh ba điểm N. H, E thẳng hàng.

c. Xác định vị trí của M để NE có độ dài lớn nhất.

Bài tập 11. Cho (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với (O). (B, C, M, N cùng thuộc (O); AM<AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với (O).

a. Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh góc AOC=góc BIC

c. Chứng minh BI//MN.

d. Xác định ví trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Bài tập 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB=2R và một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Người ta vẽ đường tròn tâm E tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với AB tại N. Đường tròn này cắt MA, MB lần lượt tại các điểm thứ hai C, D

a. Chứng minh CD//AB

b. Chứng minh MN là tia phân giác của góc AMB và đường thẳng MN đi qua một điểm K cố định.

c. Chứng minh tích KM.KN cố định.

d. Gọi giao điểm của các tia CN, DN với KB, KA lần lượt là C', D'. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác NC'D' đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

Bài tập 13. Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn.Từ A vẽ 2 tiếp tuyến AB,AC với đường tròn (O).

1. C/m OA vuông góc BC

2. Vẽ cát tuyến AMN của (O).Gọi E là trung điểm MN.C/m A,O,E,C cùng thuộc 1 đương tròn và xác định tâm K.

3. Tia CE cắt (O) tại I.C/m BI//MN

4. Tìm vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Bài tập 14. Cho đường tròn (O; R), Với các kí hiệu có trên hình hãy chứng minh:

a)Tứ giác CAIM, BDMI nội tiếp.

b)Tam giác CID vuông.

c)EF // AB

d)Khi M cố đinh I thay đổi trên AO, tìm vị trí của I để ACBD lớn nhất.

e) Cho biết khi OI = $\frac{R}{3}$ và AM = R. Hãy tính độ dài đoạn thẳng CD và diện tích tam giác CID theo R.

Bài tập 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn.Từ A vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD (nằm giũa A và D)

1) Chứng minh AB2 = ACAD

2) Gọi H là trung điểm CD Chứng minh tứ giác ABOE có bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

3) Vẽ tia Bx // CD cắt (O) tại I, IE cắt (O) tại K.Chứng minh AK là tiếp tuyến của (O).

4) Đường thẳng BH cắt (O) tại F.Chứng minh KF // CD

5) Tím vị trí của cát tuyến ACD đề diện tích tam giác AID lớn nhất.

Bài tập 16. Cho đường tròn (O,R), đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM và CN (M và N thuộc (O)). Goi H là trung điểm AB,đường thẳng OH cắt tia CN tại K. Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I. Chứng minh:

1) C,O,H,N cùng thuộc một đường tròn.

2) KN.KC= KH.KO

3) I cách đều CM, CN, MN

4) Một đường thẳng qua O song song MN cắt tia CM và CN tại E và F.Xác định vị trí C trên d để diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Bài tập 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của BC Có hai đường thẳng lưu động và vuông góc với nhau tại M cắt các đoạn AB và AC lần lượt tại D và E. Xác định các vị trí của D và E để diện tích tam giác DME đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 18. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C thuộc đoạn AB, M là một điểm trên nửa đường tròn. Đường thẳng qua M vuông góc MC cắt các tiếp tuyến qua A và B của nửa đường tròn tại E và F.

1) Khi M cố định,C di động.Tìm vị trí của C để AE.BF lớn nhất.

2) Khi C cố định,M di động.Tìm vị trí của M để SCEF lớn nhất.

Bài tập 19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB=2R,M là một điểm trên nửa đường tròn(khác A và B).Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn (O) tại C và D

1)Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a)Độ dài đoạn thẳng CD và diện tích tam giác COD

b) Diện tích và chu vi tứ giác ACDB

c)Tổng diện tích của tam giác ACM và BDM

2) Tìm giá trị lớn nhất của:

a) Diện tích và chu vi tam giác MAB

b) Tích MAMB

Bài tập 20. (Đề thi tuyển vào lớp 10, 95 - 96 Thành phố Hồ Chí Minh) Cho hình vuông ABCD cố định cạnh a. Điểm E di chuyển trên cạnh CD ($E \neq D$) Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

1) Chứng minh ABF = ADK,suy ra AKF vuông cân

2) Gọi I là trung điểm của FK.Chứng minh làtâm đường tròn qua A,C, F,K và I di chuyển trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD

3) Chứng minh tứ giác ABFI nội tiếp được.

4) Cho DE = x ($0 < x \le a$).Tính độ dài các cạnh của AEK theo a và x.

5) Hãy chỉ ra vị trí của E để EK ngắn nhất.

Bài tập 21. Cho hai đường tròn (O; R) và (O; R′) cắt nhau tại A và B Một đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) và (O′) tại C và D

1) Chứng minh đường trung trực của đoạn thẳng CD luôn đi qua điểm cố định. Xác địmh điểm cố định ấy.

2) Với vị trí nào của đường thẳng (d) thì tam giác BCD có diện tích lớn nhất.

Bài tập 22. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC).Lấy điểm D thuộc cạnh AC Vẽ đường tròn đường kính CD cắt BD ở E và cắt AE ở F.

a) Chứng minh A, B, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $B\hat{C}A = A\hat{C}F$.

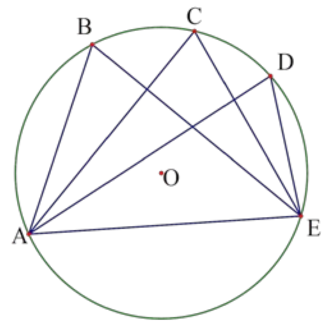
c) Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của D qua AB và BC Chứng minh tứ giác BNCM nội tiếp.

d) Xác định vị trí điểm D sao cho bán kính đường tròn (BNCM) đạt giá trị nhỏ nhất.

CD13: GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

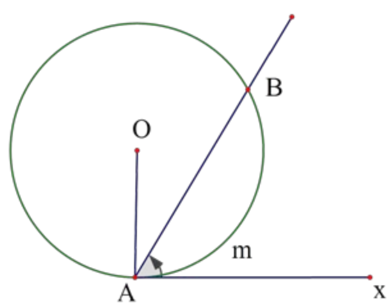
KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Góc $\widehat{ABE}$ có đỉnh A nằm trên đường tròn (O) và các cạnh cắt đường tròn đó được gọi là góc nội tiếp (Hình). Trong trường hợp các góc nội tiếp có số đo không vượt quá 90^0 thì số đo của chúng bằng nửa số đo của góc ở tâm, cùng chắn một cung. Các góc nội tiếp đều có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Vì thế, nếu những góc này cùng chắn một cung (hoặc chắn những cung bằng nhau) thì chúng bằng nhau, nếu các góc nội tiếp này bằng nhau thì các cung bị chắn bằng nhau.



Trên hình vẽ ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{ADE} = \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AE}$

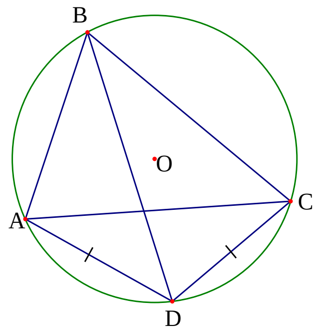
- Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Từ điểm A ta kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn, khi đó $\widehat{BAx}$ được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung AB (Hình). Cũng như góc nội tiếp, số đo góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn : $\text{sđ}\widehat{BAx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AmB}$.



<u>Chú ý:</u> Việc nắm chắc các khái niệm, định lý, hệ quả về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có thể giúp chúng ta so sánh số đo các góc, từ đó chứng minh được các đường thẳng song song với nhau, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau…

<u>I. Góc nội tiếp đường tròn</u>

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI



- Hai góc cùng chắn một cung thì bằng nhau và bằng nửa số đo cung bị chắn. Trên hình vẽ: sđ$\widehat{ABD}=$ sđ$\widehat{ACD}=\frac{1}{2}$sđ$\overset\frown{AD}$.

- Các góc chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau. Trên hình vẽ: $AD=CD\Leftrightarrow$ sđ$\overset\frown{AD}=$ sđ$\overset\frown{CD}\Leftrightarrow$ sđ$\widehat{ABD}=$ sđ$\widehat{CAD}$.

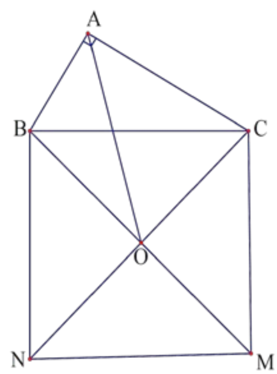
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải:

Vì O là tâm của hình vuông nên $\widehat{BOC}=90^0$.

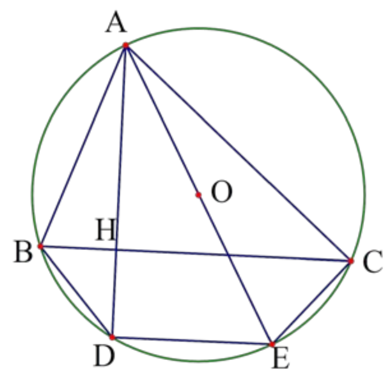
Lại có $\widehat{BAC}=90^0$ suy ra bốn điểm A,B,O,C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.



Đối với đường tròn này ta thấy $\widehat{BAO}=\widehat{BCO}$ (cùng chắn $\overset\frown{BO}$). Mà $\widehat{BCO}=45^0\Rightarrow\widehat{BAO}=45^0$. Do $\widehat{BAC}=90^0$, nên $\widehat{CAO}=\widehat{BAC}-\widehat{BAO}=45^0$. Vậy $\widehat{BAO}=\widehat{CAO}$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$.

Lời giải:



Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Ta thấy $\widehat{ACE}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $\widehat{OAC}+\widehat{AEC}=90^0$ (1).

Theo giả thiết bài ra, ta có: $\widehat{BAH}+\widehat{ABC}=90^0$ (2). Lại vì $\widehat{AEC}=\widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overparen{AC}$) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$ (đpcm).

Lưu ý: Cũng có thể giải bài toán theo hướng sau: Gọi D là giao điểm của tia AH với đường tròn (O), chứng tỏ tứ giác $BDEC$ là hình thang cân. Từ đó suy ra sđ$\overparen{BD}=$ sđ$\overparen{CE}$, dẫn đến $\widehat{BAD}=\widehat{CAE}$, hay $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$.

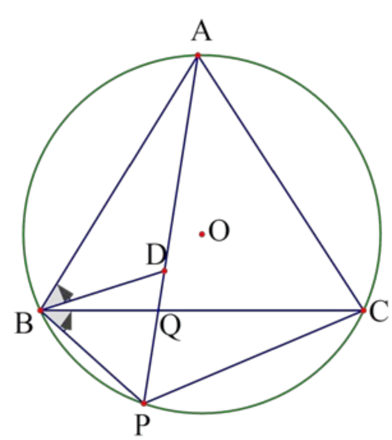
Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overparen{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD=PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA=PB+PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ}=\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PC}$.

Lời giải:



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P. Mặt khác, $\widehat{BPD} = \widehat{BPA} = \widehat{BCA} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O)). Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$. Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều). Lại vì $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^0$, $\widehat{PBC} + \widehat{DBC} = 60^0$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{PBC}$. Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $\widehat{BPQ} = 60^0$, $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) suy ra $\widehat{BPQ} = \widehat{APC}, \widehat{PBQ} = \widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PC}$). Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$. Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ(PB + PC) = PB.PC$. Hệ thức này tương đương với

$\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$ (đpcm).

Ghi chú:

- Tứ giác $ABCD$ có tính chất $AB.CD = BC.AD$ (*) nói ở ví dụ trên được gọi là tứ giác điều hòa. Loại tứ giác đặc biệt này có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng khác.

- Nếu hệ thức (*) dưới dạng $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD}$ và nhớ lại tính chất đường phân giác trong tam giác ta có thể nêu thêm một tính chất của tứ giác điều hòa.

- Tứ giác $ABCD$ là một tứ giác điều hòa khi và chỉ khi các đường phân giác của góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ cắt nhau tại một điểm trên đường chéo BD.

- Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên đường chéo AC.

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Giải:

Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.

Mặt khác $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$

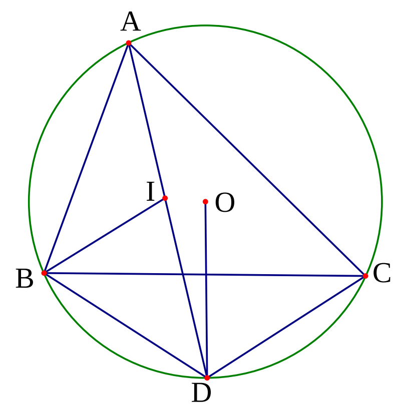
(Góc nội tiếp chắn cung CD) mà

$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$, $\widehat{IBC}=\widehat{IBA}$

(Tính chất phân giác) suy ra

$\widehat{IBD}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}$. Nhưng

$\widehat{BID}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}$ (Tính chất góc ngoài). Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB=DI=DC$

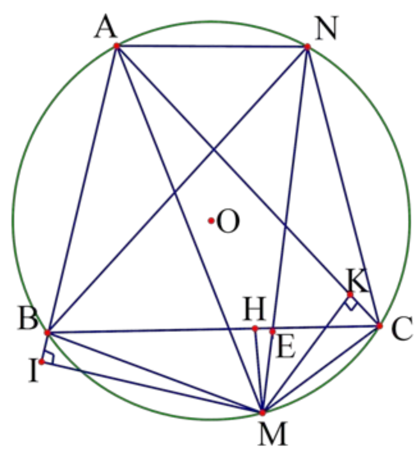


<u>Nhận xét:</u> Thông qua bài toán này ta có thêm tính chất: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là giao điểm của phân giác trong góc A với (O)

Ví dụ 5). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB<AC$. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A. Vẽ MH, MK, MI lần lượt vuông góc với $\frac{BC}{MH}=\frac{AC}{MK}+\frac{AB}{MI}$

Giải:

Trong bài toán có các tỷ số độ dài ta nghỉ đến các tam giác đồng dạng và định lý Thales.



<u>Cách 1:</u> Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại N. Gọi E là giao điểm của BC và MN

Ta có: $AB=NC$.

Ta có $\widehat{BME}\equiv\widehat{BMN}=\frac{1}{2}sđ\left(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AN}\right)=\frac{1}{2}sđ\left(\overset{\frown}{NC}+\overset{\frown}{AN}\right)=\widehat{AMC}$,

$\widehat{MBC}=\widehat{MAC}\Rightarrow\Delta BME\sim\Delta AMC$ và MH, MK là hai đường cao tương ứng nên: $\frac{AC}{MK}=\frac{BE}{MH}$,

chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{AB}{MI}=\frac{CE}{MH}$. Cộng hai đẳng thức trên ta có: $\frac{BC}{MH}=\frac{AC}{MK}+\frac{AB}{MI}$

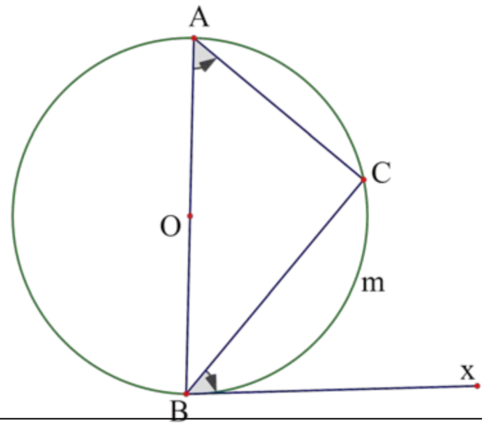
Cách 2: Ta thấy MH, MI là các đường cao của tam giác MBC, MAB nhưng hai tam giác này không đồng dạng với nhau. Điều này giúp ta nghĩ đến việc lấy một điểm E trên cạnh BC sao cho $\widehat{BMA}=\widehat{DMC}$ để tạo ra tam giác đồng dạng nhưng vẫn giữ được hai đường cao tương ứng. (Phần lời giải xin dành cho bạn đọc).

2. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung (tại một điểm trên đường tròn) bằng nửa số đo cung bị chắn.

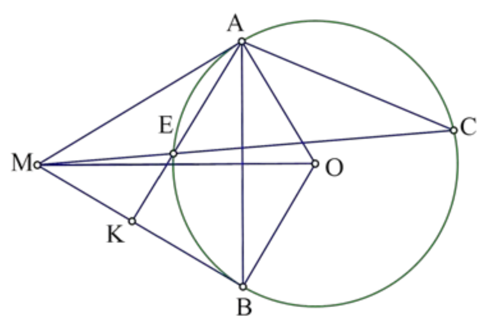
- Trên hình vẽ: sđ$\widehat{BAC} =$ sđ$\widehat{xBC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$.



B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB
cắt đường tròn (O) tại C. MC cắt đường tròn (O) tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = AK.EK$ và $MK = KB$.

Lời giải:



Do $MB//AC$ nên

$\widehat{BMC} = \widehat{ACM}$ (1), ta lại có

$\widehat{ACM} = \widehat{ACE} = \widehat{MAE}$

(cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$) (2). Từ (1) và (2)

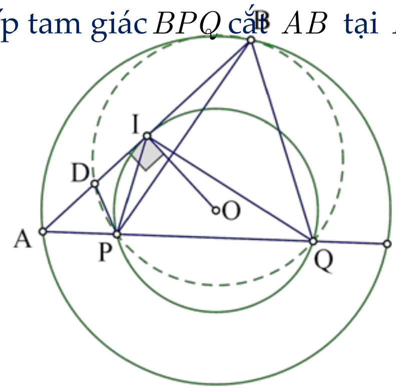
suy ra $\Delta KME \sim \Delta KAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MK}{AK} = \dfrac{EK}{MK}$ hay $MK^2 = AK.EK$ (3). Ta thấy $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$). Từ đó $\Delta EBK \sim \Delta BAK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{EK}{BK}$ hay $BK^2 = AK.EK$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $MK^2 = KB^2$ nghĩa là $MK = MB$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho đường tròn (C) tâm O, AB là một dây cung của (C) không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt đường tròn (C_1) tâm O

bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích $AP.AQ$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ luôn đi qua một điểm cố định khác B.

Lời giải: Ta có

$\widehat{PQI}=\widehat{PIA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{PI}$), nên $\Delta API\sim\Delta AIQ$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AP}{AI}=\dfrac{AI}{AQ}\Rightarrow AP.AQ=AI^2$ (không đổi). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ cắt AB tại D $\left(D\neq B\right)$.



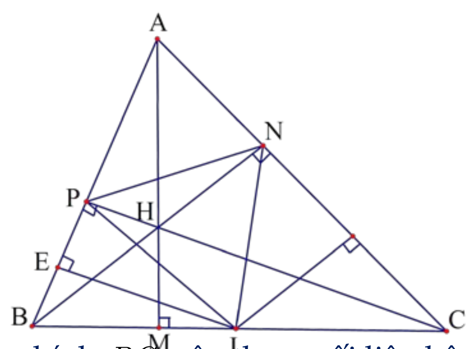
Khi đó $\Delta ADP\sim\Delta AQB$, suy ra

$\dfrac{AD}{AQ}=\dfrac{AP}{AB}$ hay $AD.AB=AP.AQ=AI^2$

(không đổi). Do đó điểm D là điểm cố định (đpcm).

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $\widehat{BAC}=60^0$. Gọi M,N,P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A,B,C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.
a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.
b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I,M,E,K cùng thuộc một đường tròn.
c) Giả sử IA là phân giác của $\widehat{NIP}$. Tìm số đo $\widehat{BCP}$.

Lời giải:



a). Từ giả thiết ta có

$IN=IP=\dfrac{1}{2}BC$ nên tam giác

INP cân tại I. Lại vì B,P,N,C nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta thấy $\widehat{PIN}=2\widehat{PBN}=60^0$. Vậy tam giác INP đều.

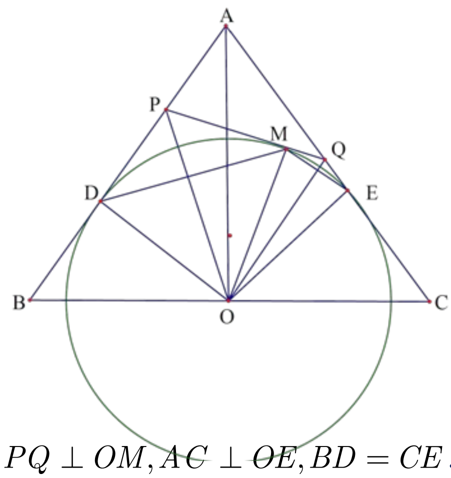
b) Rõ ràng bốn điểm I,M,E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

c) Từ điều kiện của bài toán ta thấy AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}=60^0$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Từ đó suy ra $\widehat{BCP}=30^0$.

Ví dụ 4). Cho tam giác cân $ABC,(AB=AC)$. Gọi O là trung điểm của BC. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB,AC tại D,E. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ DE tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M cắt AB,AC tại P,Q. Chứng minh

$BC^2 = 4BP.CQ$ và tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác APQ lớn nhất.

Lời giải:



Ta thấy $S_{\Delta ABC}$ không đổi nên $S_{\Delta APQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{BPQC} nhỏ nhất, đây là cơ sở để ta làm xuất hiện các biểu thức có liên quan đến BP, CQ. Ta có AB, PQ, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại các điểm D, M, E của (O) nên ta có: $AB \perp OD, PQ \perp OM, AC \perp OE, BD = CE$. Từ đó ta tính được:

$$S_{BPQC} = \frac{1}{2}R\left(BP + PQ + CQ\right) = \frac{1}{2}R\left(BD + 2DP + 2EQ + CE\right)$$
$$= R.\left(BD + DP + EQ\right) = R\left(BP + CQ - BD\right).$$

Mặt khác ta cũng có: $\widehat{POQ} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{A}\right) = \widehat{B} = \widehat{C}$ nên suy ra

$$\widehat{BOP} = 180^0 - \widehat{POQ} - \widehat{QOC} = 180^0 - \widehat{QCO} - \widehat{QOC} = \widehat{CQO} \Leftrightarrow \Delta BPO \sim \Delta COQ$$

$\Rightarrow \frac{BP}{CO} = \frac{BO}{CQ} \Leftrightarrow BP.CQ = BO.CO = \frac{BC^2}{4}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

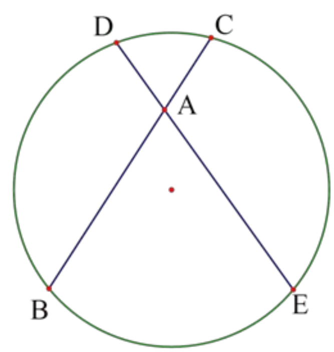
$BP + CQ \geq 2\sqrt{BP.CQ} = BC \Rightarrow S_{BPQC} \geq R.\left(BC - BD\right)$. Vậy S_{BPQC} nhỏ nhất khi $BP = CQ \Leftrightarrow M$ là trung điểm của cung DE.

Chủ đề . Góc có đỉnh ở trong hoặc ngoài đường tròn.

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

*) Với đỉnh A nằm trong đường tròn (O) ta có góc với đỉnh ở trong đường tròn (hình)

Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.



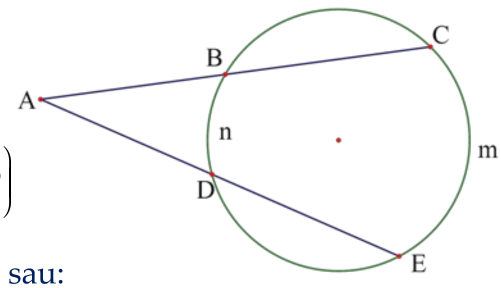
+ sđ$\widehat{BAE} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BE} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}}{2}$.

+ sđ$\widehat{BAD} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\overset{\frown}{CE}}{2}$

*) Với đỉnh A nằm ở ngoài đường tròn $\left(O\right)$ ta có số đo góc nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

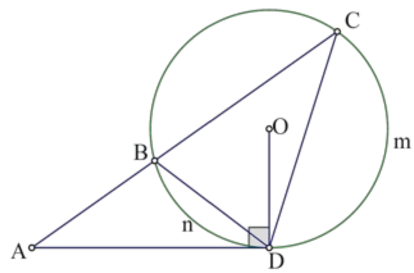
+ Trên hình vẽ ta có:

$$\text{sđ}\widehat{CAE}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{EmC}-\text{sđ}\overset\frown{BnD}\right)$$



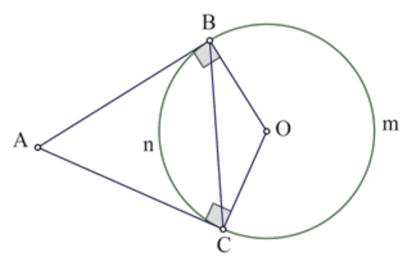
Cần lưu ý đến các trường hợp sau:

+ Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O). AD là tếp tuyến của (O), qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn tại B,C thì $\widehat{CAD}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{CmD}-\text{sđ}\overset\frown{BnD}\right)$



+ Với Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O). AB, AC là 2 tếp tuyến của (O), (A, B là các tiếp điểm) thì

$$\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{BmC}-\text{sđ}\overset\frown{BnC}\right)$$



3. Áp dụng góc có đỉnh ở trong hoặc ngoài đường tròn.

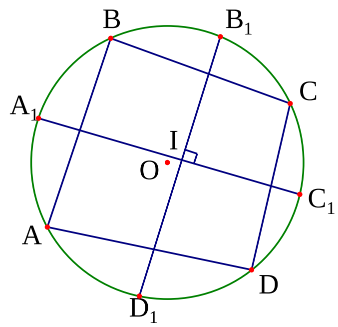
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cũng như phần góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, các định lý và hệ quả của góc có đỉnh nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn giúp chúng ta tìm mối quan hệ giữa các số đo các góc, chứng minh các đường song song, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau, hai đường thẳng vuông góc với nhau.

B. VÍ DỤ

Ví dụ). Trên đường tròn $\left(O\right)$ cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1; $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ theo thứ tự là số đo của các cung $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD},\overset{\frown}{DA}$. Khi đó $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0$.

Xét góc $\widehat{A_1IB_1}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn (O). Ta có $\widehat{A_1IB_1}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{A_1BB_1}+\text{sđ}\overset{\frown}{C_1DD_1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{A_1B}+\text{sđ}\overset{\frown}{BB_1}+\text{sđ}\overset{\frown}{C_1D}+\text{sđ}\overset{\frown}{DD_1}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta\right)=90^0$. Nghĩa là $A_1C_1\perp B_1D_1$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A,D,C,B theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ (C và D nằm về cùng một phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A,B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE+BF=R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo $\widehat{AIB}$.

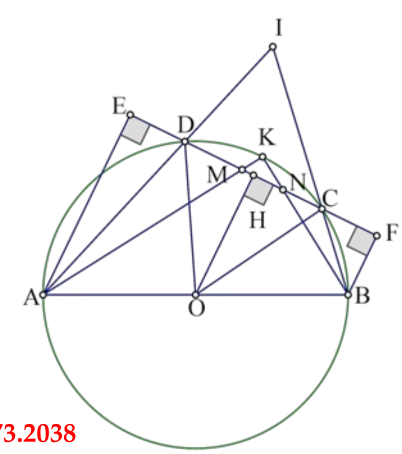
b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA,KB với DC lần lượt là M và N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.

Lời giải:

a). Kẻ $OH\perp CD\left(H\in CD\right)$,

ta thấy OH là đường trung bình của hình thang $ABFE$,

suy ra $OH=\frac{1}{2}\left(AE+BF\right)=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Từ đó tam giác OCD đều,

suy ra sđ$\widehat{COD} =$ sđ$\widehat{KCD} = 60^0$.Ta thấy $\widehat{AIB}$ có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O) nên

sđ$\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{AmB} - \text{sđ}\widehat{KCD}\right) = \frac{1}{2}\left(180^0 - 60^0\right) = 60^0$.

b) Ta thấy $\Delta AEM \sim \Delta NFB$ suy ra $EM.NF = AE.BF$ (không đổi) do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi $EM + NF$ nhỏ nhất. Theo trên, $EM.NF$ không đổi nên $EM + NF$ nhỏ nhất khi $EM = FN = \sqrt{AE.BF}$.

Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF - 2\sqrt{AE.BF}$.

Ví dụ 3. Trong tam giác ABC, đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D. Giả sử (T) là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của (T) và AC, P là giao điểm thứ hai của (T) và BM, E là giao điểm của AP và BC.

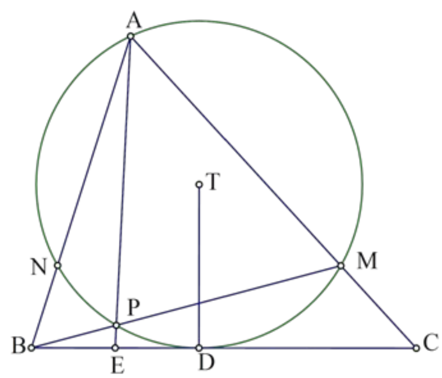
a) Chứng minh rằng $\widehat{EAB} = \widehat{MBC}$.

b) Chứng minh hệ thức $BE^2 = EP.EA$.

Lời giải:

a). Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn (T).

Do AD là phân giác của $\widehat{BAC}$



nên sđ$\widehat{DM} =$ sđ$\widehat{DN}$. Ta có $\widehat{MBC} = \widehat{MBD} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{DM} - \text{sđ}\widehat{DP}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{DN} - \text{sđ}\widehat{DP}\right)$

$= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{NP} = \widehat{NAP} = \widehat{EAB}$ (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy $\widehat{EBP} = \widehat{EAB}$. Từ đó $\Delta EBP \sim \Delta EAB$ (g.g), suy ra $\frac{BE}{EP} = \frac{EA}{BE}$ hay $BE^2 = EP.EA$ (đpcm).

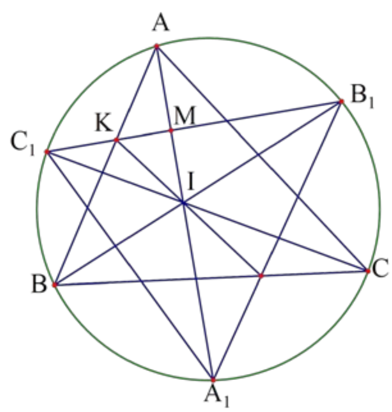
Ví dụ 4. Trên đường tròn (O) ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

b) CHứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là đường phân giác trong của tam giác $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Giả sử (T_1) và (T_2) là hai tam giác nội tiếp đường tròn (O), đồng thời các đỉnh của tam giác (T_2) là các điểm chính giữa của các cung đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác (T_1). Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác (T_1) và (T_2) các đường chéo nối các đỉnh đối nhau song song với các cạnh của tam giác (T_1) và đồng quy tại một điểm.

Lời giải:



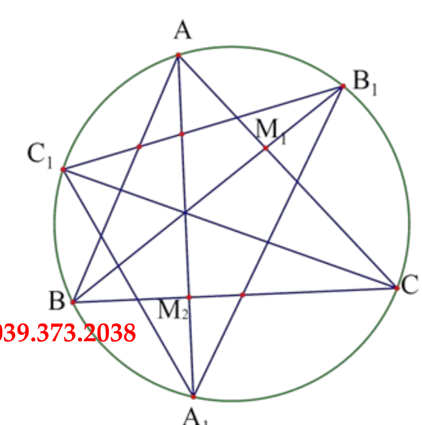
a) Ta chứng minh $AA_1 \perp B_1C_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, khi đó:

$$\widehat{AMB_1} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ}\overset{\frown}{A_1BC_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ}\overset{\frown}{A_1B} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC_1}\right)$$

$$= \widehat{ABB_1} + \widehat{A_1AB} + \widehat{BCC_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}\right) = 90^0 \text{ (đpcm).}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1; CC_1 \perp A_1B_1$.

b)



Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC. Ta có $\widehat{BM_1A} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{AC_1B} + \text{sđ}\overset\frown{A_1C}\right) = \widehat{BCA} + \widehat{A_1C_1C}$ (1)

Lại có $\widehat{BM_2A} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{AC_1B} + \overset\frown{B_1C}\right) = \widehat{BCA} + \widehat{B_1C_1C}$ (2). Vì $\widehat{BM_1A} = \widehat{BM_2A} = 90^0$, nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1C_1A} = \widehat{B_1C_1C}$. Tức là CC_1 chứa đường phân giác của $\widehat{A_1C_1B_1}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng thu được AA_1 chứa đường phân giác của $\widehat{B_1A_1C_1}$, BB_1 chứa đường phân giác của $\widehat{A_1B_1C_1}$.

c) Kí hiệu các đỉnh của tam giác $\left(T_1\right)$ là A, B và C; A_1, B_1 và C_1 là điểm chính giữa các cung $\overset\frown{BC}, \overset\frown{CA}$ và $\overset\frown{AB}$ tương ứng. Khi đó $\left(T_2\right)$ là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác $\left(T_1\right)$ nên chúng đồng quy tại điểm I. Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1. Ta chỉ cần chứng minh rằng $IK // AC$.

Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AKI cân tại K. Từ đó $\widehat{KIA} = \widehat{KAI} = \widehat{IAC}$, dẫn đến $IK // AC$ (đpcm).

Dạng 4. Áp dụng giải các bài toán về quỹ tích và dựng hình

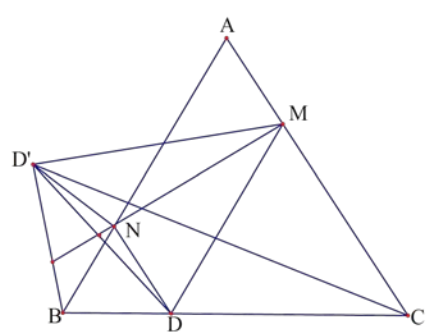
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Khái niệm cung chứa góc giúp chúng ta giải được nhiều bài toán quỹ tích, dựng hình, chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác cân $ABC \left(AB = AC\right)$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ $DM // AB$ ($M \in AC$), $DN // AC \left(N \in AB\right)$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Lời giải:



Phần thuận: Từ giả thiết đề ra ta thấy $NB = ND = ND'$,(1) do đó ba điểm B, D, D' nằm trên đường tròn tâm N. Từ đó $\widehat{BD'D} = \frac{1}{2}\widehat{DMC}$ (2). Lại có $\widehat{BND} = \widehat{DMC} = \widehat{BAC}$, nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BD'C} = \widehat{BAC}$(không đổi). Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc $\widehat{BAC}$ không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc $\widehat{BAC}$ vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Phần đảo: Bạn đọc tự giải.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC trên đoạn BC. Đó chính là cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lưu ý: Quy trình để giải một bài toán quỹ tích như sau:

Để tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn một tính chất (T) nào đó ta tiến hành các bước

***Phần thuận:** Chỉ ra mọi điểm có tính chất (T) đều thuộc hình (H).

***Phần đảo:** Chứng tỏ rằng mọi điểm thuộc hình (H) đều có tính chất (T).

***Kết luận:** Quỹ tích các điểm M có tính chất (T) là hình (H).

Chú ý rằng trong một số bài toán, sau phần thuận, trước phần đảo ta có thể thêm phần giới hạn quỹ tích.

(Bạn đọc tham khảo thêm phần quỹ tích ở cuối cuốn sách này)

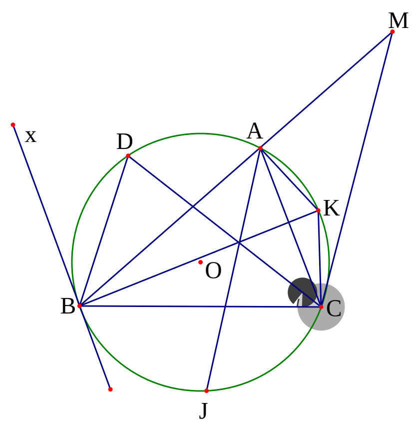
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, A khác C). Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O).

Lời giải:



a). Ta có

$\widehat{DBK}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{DA}+\text{sđ}\overset{\frown}{AK}\right)$; sđ$\widehat{DIB}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BD}+\text{sđ}\overset{\frown}{KC}\right)$

Vì sđ$\overset{\frown}{BD}$ + sđ$\overset{\frown}{DA}$ và ΔDBI cân tại D

nên sđ$\overset{\frown}{KC}$ + sđ$\overset{\frown}{AK}$. Suy ra $AK=CK$

hay ΔKAC cân tại K (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên đường thẳng AI luôn đi qua điểm J (điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A). Rõ ràng J là điểm cố định.

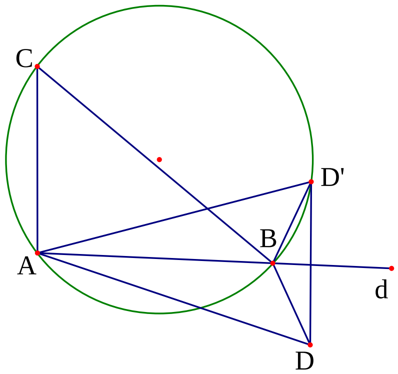
c) Phần thuận: Do ΔAMC cân tại A, nên $\widehat{BMC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Giả sử số đo $\widehat{BAC}$ là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn BC thì M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo: Tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) cắt cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC tại điểm X. Lấy điểm M bất kỳ trên $\overset{\frown}{Cx}$ (một phần của cung chứa góc α và vẽ trên đoạn $BC\left(M\neq X;M\neq C\right)$. Nếu MB cắt đường tròn (O) tại A thì rõ ràng A thuộc cung lớn BC của đường tròn (O). Vì $\widehat{BAC}=2\alpha;\widehat{AMC}=\alpha$ suy ra ΔAMC cân tại A hay $AC=AM$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung $\overset{\frown}{Cx}$, một phần của cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC về phía O trừ hai điểm C và X.

Ví dụ 3. Cho trước điểm A nằm trên đường thẳng d và hai điểm C,D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ d. Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$.

Lời giải:



***Phân tích:** Giả sử dựng được điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua d. Khi đó $\widehat{ADB}=\widehat{AD'B}$, vậy $\widehat{ACB}=\widehat{AD'B}$. Suy ra C và D' cùng nằm trên một nửa cung chứa góc dựng trên đoạn AB. Từ đó ta thấy B là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD'$.

***Cách dựng:** Dựng điểm D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng d. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD'.

Dựng giao điểm của B của đường thẳng d với đường tròn $\left(ACD'\right)$.

***Chứng minh:** Rõ ràng với cách dựng trên, ta có $\widehat{ACB}=\widehat{AD'B}=\widehat{ADB}$.

***Biện luận:** Nếu ba điểm A,C,D không thẳng hàng, hoặc nếu ba điểm này thẳng hàng nhưng CD không vuông góc với d thì bài toán có một nghiệm hình.

+ Nếu ba điểm A,C,D thẳng hàng và d là đường trung trực của đoạn CD thì bài toán có vô số nghiệm hình.

+ Nếu ba điểm A,C,D thẳng hàng, $d\perp CD$ nhưng d không phải là đường trung trực của CD thì bài toán không có nghiệm hình.

Lưu ý: Khái niệm cung chứa góc được áp dụng để chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn. Ví dụ để chứng minh bốn điểm A,B,C,D cùng nằm trên một đường tròn, ta có thể chứng minh hai điểm A và B cùng nhìn CD dưới hai góc bằng nhau. Nói cách khác, nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác đó cùng thuộc một đường tròn.

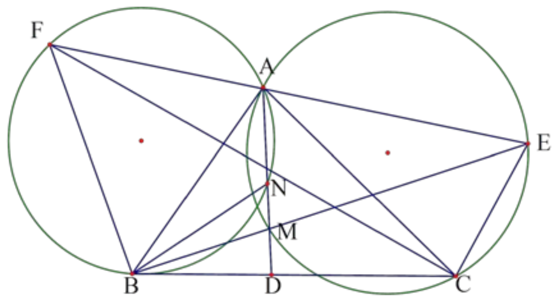
Ví dụ 4. Giả sử AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC ($D \in BC$). Trên AD lấy hai điểm M và N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $\widehat{BCF} = \widehat{ACM}$, từ đó suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BAN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BN}$); $\widehat{BEC} = \widehat{CAN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$), mà $\widehat{BAN} = \widehat{CAN}$, suy ra $\widehat{BFC} = \widehat{BEC}$.

Từ đó bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b) Từ kết quả trên, ta có $\widehat{CFE} = \widehat{NFA}$. Do đó hai tia FA và FE trùng nhau nghĩa là ba điểm A, E, F thẳng hàng (đpcm).

c) Vì $\widehat{BCF} = \widehat{BEF}$ và do $\widehat{ACM} = \widehat{BEF}$ nên $\widehat{BEF} = \widehat{ACM}$. Từ đó suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{BCF}$, dẫn đến $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ (đpcm).

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. Cho đường tròn $(O;R)$, $R = 4cm$. vẽ dây cung $AB = 5cm$, C là điểm trên dây cung AB sao cho $AC = 2cm$. Vẽ CD vuông góc với OA tại D. Tính độ dài đoạn thẳng AD.

Câu 2. Cho đường tròn $(O;R)$, AC và BD là hai đường kính . Xác định vị trí của hai đường kính AC và BD để diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất.

Câu 3. Cho đường tròn $(O;R)$ từ điểm M bên ngoài đường tròn ta kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt đường tròn tại các điểm A, B và C, D biết $AB = CD$. Chứng minh rằng $MA = MC$.

Câu 4. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, CD là dây cung của (O), $\widehat{COD} = 90^0$, CD cắt AB tại M (D nằm giữa C và M) và $OM = 2R$. Tính độ dài các đoạn thẳng MD, MC theo R.

Câu 5. Cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Gọi (O) là đường tròn bất kỳ đi qua A và B. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với OA, cắt đường tròn (O) ở D và E. Chứng minh rằng các độ dài AD, AE không đổi.

Câu 6. Cho đường tròn $(O;R)$, hai bán kính OA và OB vuông góc tại O. C và D là các điểm trên cung AB sao cho $AC = BD$ và hai dây AC, BD cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $OM \perp AB$.

Câu 7. Cho điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ cát tuyến ABC và tiếp tuyến AM với đường tròn (O). M là tiếp điểm. Chứng minh rằng $AB + AC \geq 2AM$.

Câu 8. Cho đoạn thẳng AB, đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với AB tại A và B. M là trung điểm của AB. Lấy C, D lần lượt trên d, d' sao cho $\widehat{CMD} = 90^0$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của dường tròn đường kính AB.

Câu 9. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA và PB tới đường tròn $(O;R)$ với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC của đường tròn. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

Câu 10. Một đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D, E. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AD; CM cắt DE tại I. Chứng minh rằng $\dfrac{IM}{IC} = \dfrac{DM}{CE}$.

Câu 11. Cho đường tròn $(O;r)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Vẽ đường kính DE; AE cắt BC tại M. Chứng minh rằng $BD = CM$.

Câu 12. Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn tâm I là đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại F. Vẽ đường kính DE của đường tròn (O). Chứng minh rằng A, E, F thẳng hàng.

Câu 13. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AB, AC lần lượt ở D, E, F. Đường thẳng qua E song song với BC cắt AD, DF lần lượt ở M, N. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng EN.

Câu 14. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi O là trung điểm của BC. Dựng đường tròn tâm O đường kính BC. Vẽ đường cao AD của tam giác ABC và các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi E là giao điểm của MN với AD. Hãy chứng minh rằng $AE.AD = AM^2$.

HƯỚNG DẪN BTVN

Câu 1. Giải:

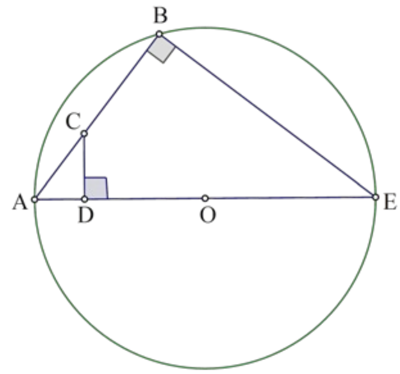
Vẽ đường kính AE có $AE = 8cm$.

Điểm B thuộc đường tròn

đường kính AE $\Rightarrow \widehat{ABE} = 90^0$.

Xét ΔADC và ΔABE có $\widehat{DAC}$

(chung), $\widehat{ADC} = \widehat{ABE}\left(= 90^0\right)$,



do đó $\Delta ADC \sim \Delta ABE \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow AD = \dfrac{AC.AB}{AE}$. Mà $AC = 2cm, AB = 5cm, AE = 8cm$,

nên $AD = \dfrac{2.5}{8} = \dfrac{5}{4}(cm)$.

Câu 2.

Giải:Vẽ $AH \perp BD\left(H \in BD\right)$.

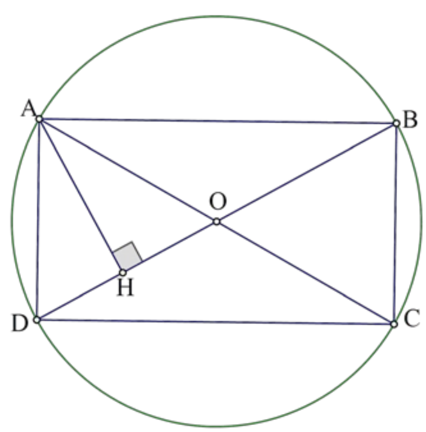
Tứ giác $ABCD$ có

$OA = OA = R, OB = OD = R$

nên là hình bình hành. Mà

$AC = BD = 2R$ do đó tứ giác

$ABCD$ là hình chữ nhật, suy ra



$S_{ABCD} = AB.AD$. ΔABD có $\widehat{A} = 90^0$, $AH \perp DB$ nên $AB.AD = AH.DB$.

Vì $AH \le AO, DB = 2R$ nên $S_{ABCD} \le 2R^2$ (không đổi). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Vậy khi hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau thì diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất.

Câu 3. Giải:

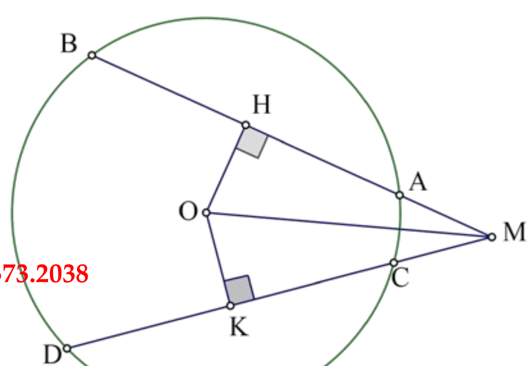
Vẽ $OH \perp AB\left(H \in AB\right)$, $OK \perp CD\left(K \in CD\right)$.

Ta có $AB = CD$ (gt), nên

$OH = OK$ (định lý liên

hệ dây cung và khoảng

cách đến tâm) và H, K



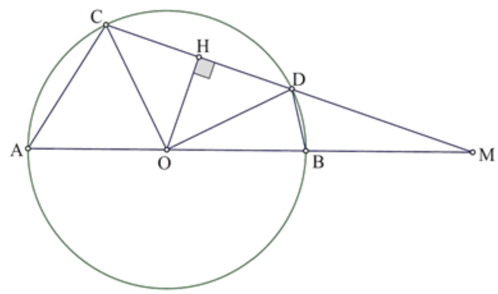
lần lượt là trung điểm của

AB, CD (định lý đường kính

vuông góc dây cung) $\Rightarrow AH = CK$. Xét ΔOHM $\left(\widehat{OHM} = 90^0\right)$ có OM (cạnh chung) và

$OH = OK$, do đó $\Delta OHM = \Delta OKM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow MH = MK$. Ta có $MH - AH = MK - CK \Rightarrow MA = MC$.

Câu 4. Giải:



Vì $\widehat{COD} = 90^0$ suy ra tam giác

COD vuông cân tại O nên

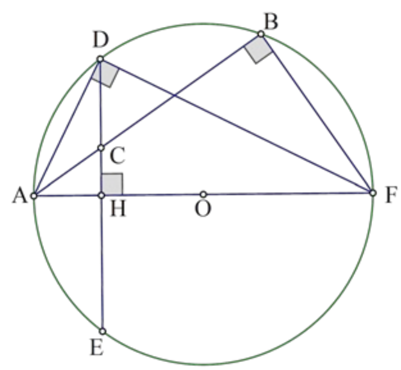
$CD = R\sqrt{2}$.Gọi H là trung điểm của CD. Vì ΔHOM vuông tại H,

$OH = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}R, OM = 2R$. Trong tam giác vuông OMH ta có:

$MH^2 = OM^2 - OH^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{7R^2}{2} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{14}}{2}R$ suy ra

$MD = MH - AH = \frac{R\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{7} - 1\right),\ MC = \frac{R\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{7} + 1\right)$

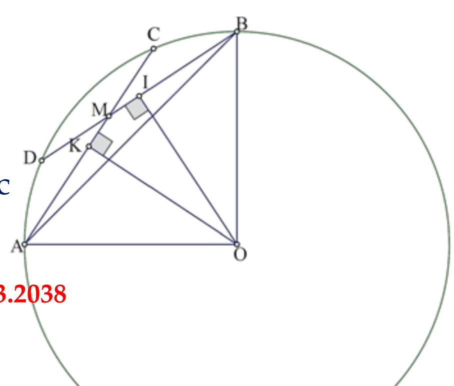
Câu 5.



Gọi H là giao điểm của OA và DE.

Ta có $OA \perp DE \Rightarrow AD = AE$. Chỉ cần chứng minh AD hoặc AE có độ dài không đổi. Các đoạn thẳng AB, AC có độ dài không đổi, $DE \perp OA$ từ đó gợi cho ta vẽ đường phụ là đường kính AF để suy ra: $AD^2 = AH.AF, AC.AB = AH.AF$.

Câu 6. Giải:



ΔOAB cân đỉnh O, $AC = BD$, những điều này giúp ta nghĩ đến chứng minh OM là đường phân giác góc O của ΔOAB.Vẽ $OI \perp AC$,

$OK \perp BD\left(I \in AC, K \in BD\right)$

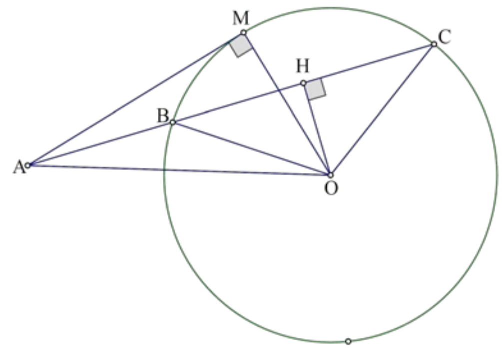
thì ta có $OI = OK$ suy ra lời giải bài toán.

Câu 7. Giải:

Vẽ $OH \perp BC, H \in BC$,

suy ra $BH = HC$ (định lý

đường kính vuông góc dây cung).



Ta có $AB + AC = \left(AH - BH\right) + \left(AH + HC\right) = 2AH$. ΔMAO có $\widehat{AMO} = 90^0$, theo định lý Pitago có $AM^2 + OM^2 = OA^2$; ΔHAO có $\widehat{AHO} = 90^0$ nên $AH^2 + OH^2 = OA^2$ mà $OB = OM = R$, $OH \le OB$ nên $OH \le OM$. Do đó $OH^2 \le OM^2$, suy ra $AH \ge AM$. Từ đó ta có: $AB + AC \ge 2AM$.

Câu 8. Giải:

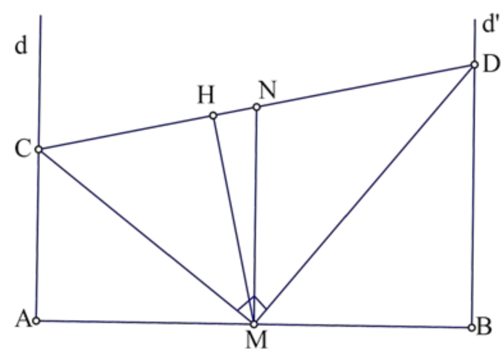
Vẽ $MH \perp CD, H \in CD$.

Gọi N là trung điểm của CD

thì MN là đường trung bình của

hình thang và tam giác MNC cân

tại N nên $\widehat{NMC} = \widehat{ACM} = \widehat{MCN}$.



Suy ra CM là tia phân giác của $\widehat{ACH}$ nên $MA = MH$, Từ đó ta có điều phải chứng minh.

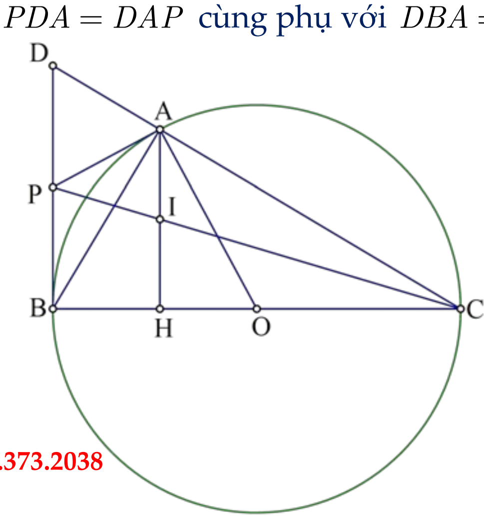
Câu 9. Gợi ý:

Dễ thấy $PB//AH$, gọi D là giao điểm của CA và BP thì tam giác BAD vuông tại A. Do $PA = PB \Rightarrow PA = PB = PD$ (Do $\widehat{PDA} = \widehat{DAP}$ cùng phụ với $\widehat{DBA} = \widehat{PAB}$).

Áp dụng định lý Thales ta có:

$\dfrac{IA}{PD} = \dfrac{IH}{PB} = \dfrac{AH}{BD}$ mà

$PB = PD \Rightarrow IA = IH$



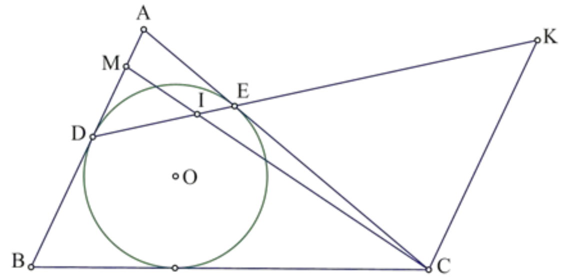
Câu 10. Giải:

Điều cần chứng minh làm ta nghĩ đến định lý Thales do vậy ta làm xuất hiện "hai đường thẳng song song".

+ Vẽ $CK // AB, K \in DE$.

Ta có $\frac{IM}{IC} = \frac{DM}{CK}$ (*)

+ Vì $\widehat{CEK} = \widehat{AED} = \widehat{ADE} = \widehat{EKC}$



Suy ra tam giác CEK cân tại $C \Rightarrow CE = CK$ .Thay vào (*) ta có: $\frac{IM}{IC} = \frac{DM}{CE}$

Câu 11. Giải:

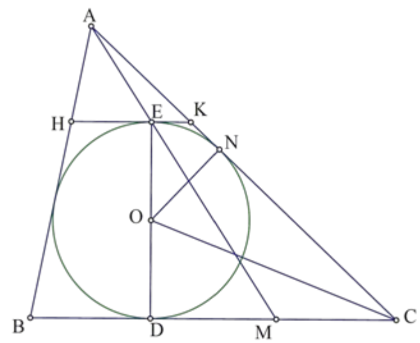
Vẽ tiếp tuyến tại E của

đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt

tại H, K .Ta có

$ED \perp HK, ED \perp BC \Rightarrow HK // BC$.

Gọi N là tiếp điểm của đường tròn $(C$



OK, OC là hai tia phân giác của hai góc kề bù EON và NOD (tính chất trung tuyến)

$\Rightarrow \widehat{KOC} = 90^0$.   + Xét ΔOEK và ΔCDO

có $\widehat{OEC} = \widehat{CDO}\left(= 90^0\right), \widehat{OKE} = \widehat{COD}$ (cùng phụ với $\widehat{EOK}$).Do đó

$\Delta OEK \sim \Delta CDO \Rightarrow \frac{EK}{OD} = \frac{OE}{CD}$ hay $\frac{EK}{r} = \frac{r}{CD}$. Tương tự cũng có $\frac{HE}{r} = \frac{r}{BD}$. Do vậy

$\frac{EK}{HE} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{EK}{EK + HE} = \frac{BD}{BD + CD}$ hay $\frac{EK}{HK} = \frac{BD}{BC}$ (1)

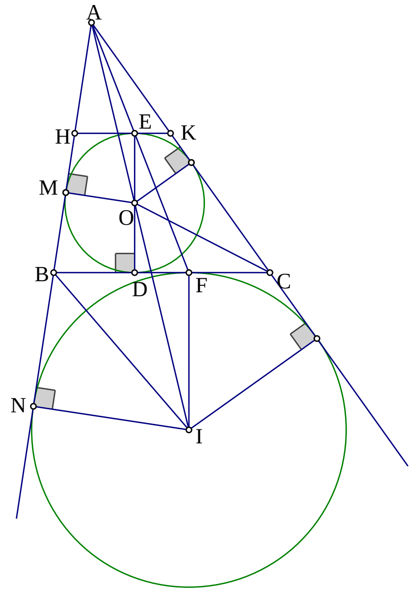
+ Trong ΔABM có $HE // BM$, áp dụng hệ quả của định lý Thales trong tam giác ta có

$\frac{HE}{BM} = \frac{AE}{AM}$. Tương tự có $\frac{EK}{CM} = \frac{AE}{AM}$. Do đó $\frac{HE}{BM} = \frac{EK}{CM} \Rightarrow \frac{EK}{CM} = \frac{EK + HE}{CM + BM}$ hay

$\frac{EK}{CM} = \frac{HK}{BC} \Rightarrow \frac{EK}{HK} = \frac{CM}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta $BD = CM$.

Câu 12. Giải: Theo đề ra có A, O, I



thẳng hàng (vì O, I cùng nằm trên tia phân góc A).

+ Gọi M, N là tiếp điểm của (O);

(I) với AB, ta có $OM // IN$

nên $\frac{AO}{AI} = \frac{OM}{IN}$ (hệ quả của định lý Thales).Mà $OM = OE, IN = IF$ nên có $\frac{AO}{AI} = \frac{OE}{IF}$.

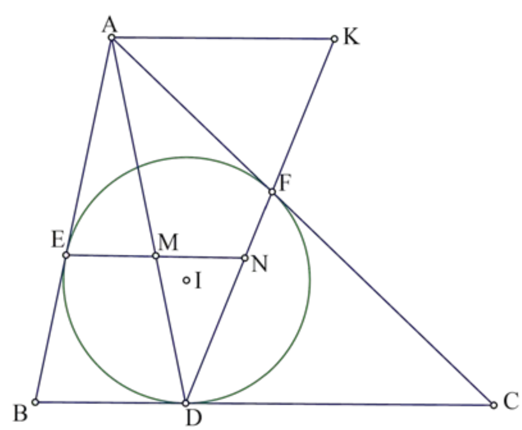
Mặt khác $ED \perp BC, IF \perp BC \Rightarrow OD // IF \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{AIF}$. + Xét ΔOAE và ΔIAF có $\frac{AO}{AI} = \frac{OE}{IF}; \widehat{AOE} = \widehat{AIF}$, do đó $\Delta OAE \sim \Delta IAF \Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{IAF}$. Vậy A, E, F thẳng hàng.

Câu 13. Giải

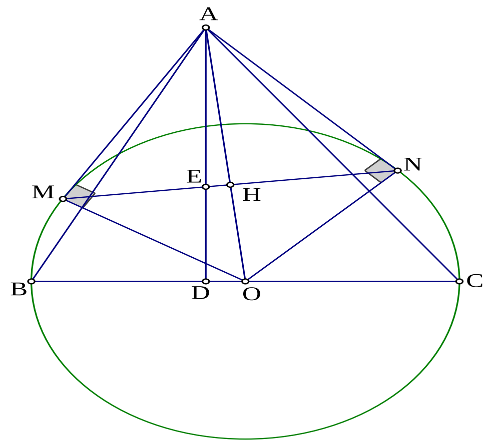
+ Vì đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh tại D, E, F nên suy ra $AE = AF, BE = BD, CD = CF$.

+ Dựng $AK // BD \left(K \in DF\right)$ ta có:

$\frac{MN}{AK} = \frac{MD}{DA}, \frac{EM}{BD} = \frac{AM}{AD}$. Ta cần



chứng minh: $\frac{MD}{DA}.AK = \frac{AM}{AD}.BD \Leftrightarrow \frac{MD}{AM} = \frac{BD}{AK}$. Nhưng $AK = AF = AE$, $BD = BE$ nên ta cần chứng minh: $\frac{MD}{AM} = \frac{BE}{AE}$ (điều này là hiển nhiên).



Câu 14. Giải:

AM, AN là các tiếp tuyến của đường

tròn (O),gọi H là giao điểm của AO

và MN.

Ta có tam giác AHE đồng dạng với

Tam giác ADO nên $AE.AD = AH.AO$.

Cũng theo tính chất tiếp tuyến ta có: $AH.AO = AM^2$.Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

-----------///-----------

CHỦ ĐỀ 3- GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN, TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A.BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ có đường tròn đường kính AD tiếp xúc với BC và đường tròn đường kính BC tiếp xúc với AD. Chứng minh rằng $AB//CD$.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BC, D là điểm trên nủa đường tròn sao cho sđ$\overset{\frown}{CD} = 60^0$. Gọi M là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng $BM = 2MC$.

Câu 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong tại A $(R > R')$. Tiếp tuyến tại điểm M bất kỳ của $(O';R')$ cắt $(O;R)$ tại B và C. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, AH là đường cao $(H \in BC)$. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Chứng minh rằng: $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

Câu 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và EAF (C và E nằm trên đường tròn (O), D và F nằm trên đường tròn (O')) sao cho $\widehat{CAB} = \widehat{BAF}$. Chứng minh rằng $CD = EF$.

Câu 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là điểm trên cung AB (C khác A và B). Vẽ $CH \perp AB(H \in AB)$. Vẽ đường tròn $(C;CH)$ cắt đường tròn (O) tại D và E. DE cắt CH tại M. Chứng minh rằng $MH = MC$.

Câu 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AC tại E. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tiếp xúc với BD.

Câu 10. Cho đoạn thẳng AB. M là điểm di động trên đoạn thẳng AB (M khác A và B). Vẽ đường thẳng xMy vuông góc với AB tại M. Trên tia Mx lần lượt lấy C và D sao cho $MC = MA, MD = MB$. Đường tròn đường kính AC cắt đường tròn đường kính BD tại N (N khác A). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có đỉnh A cố định, đỉnh B,C di động.Dựng hình bình hành $ABDC$. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BDC là điểm cố định.

Câu 12. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC, các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt AD tại E. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác ABC.

Câu 13. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Từ A vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Câu 14. Cho tam giác ABC cân đỉnh A, đường trung trực của AB cắt BC tại D. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Câu 15. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A} = 90^0\right)$ và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB = EB^2$.

Câu 16. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)\left(AB < AC, \widehat{A} = 90^0\right)$. Đường tròn (I) qua B, C tiếp xúc với AB tại B, cắt đường thẳng AC tại D. Chứng minh rằng $OA \perp BD$.

Câu 17. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO. Trên (O') lấy điểm M (khác A và O), tia OM cắt (O) tại C, gọi D là giao điểm thứ hai của CA với (O').

a) Chứng minh tam giác ADM cân.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia OD tại E, xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với (O) và (O').

Câu 18. Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M là điểm di động trên đường tròn (O). Điểm M khác A, B; dựng đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC và BD với đường tròn tâm M vừa dựng.

a) Chứng minh BM, AM lần lượt là các tia phân giác của các góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh ba điểm C, M, D nằm trên tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại điểm M.

c) Chứng minh $AC + BD$ không đổi, từ đó tính tích $AC.BD$ theo CD.

d) Giả sử ngoài A, B trên nửa đường tròn đường kính AB không chứa M có một điểm N cố định. gọi I là trung điểm của MN, kẻ IP vuông góc với MB. Khi M chuyển động thì P chuyển động trên đường cố định nào.

Câu 19. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, điểm C thuộc nửa đường tròn. Gọi I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$, E là giao điểm của AI và BC. Gọi K là giao điểm của AC và BI.

a) Chứng minh rằng $EK \perp AB$.

b) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I. Chứng minh AF là tiếp tuyến của (O).

c) Chứng minh rằng $AK.AC + BK.BI = AB^2$.

d) Nếu $\sin \widehat{BAC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB. Chứng minh $KH(KH + 2HE) = 2HE.KE$.

Câu 20. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2A$, điểm C thuộc đường tròn $(C \neq A, C \neq B)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q, tia AM cắt BC tại N.

a) Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân.

b) Khi $MB = MQ$, tính BC theo R.

Câu 21. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm B và vẽ đường tròn(O') có đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB, qua M kẻ dây cung vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại D và E. Nối CD cắt đường tròn (O') tại I.

a) Tứ giác $DAEB$ là hình có đặc tính gì? Vì sao?

b) Chứng minh $MD = MI$ và MI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên BC. Chứng minh $CH.MB = BH.MC$.

Câu 22. Cho tam giác ABC đều, dựng nửa đường tròn tâm D đường kính BC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại K, L. Lấy điểm P thuộc cung nhỏ KL, dựng tiếp tuyến với nửa đường tròn tại P cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh $\Delta BMD \sim \Delta CDN$ rồi suy ra $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$.

b) Chứng minh $\frac{S_{MDN}}{S_{ABC}} = \frac{MN}{2BC}$.

c) Gọi E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC sao cho chu vi ΔAEF bằng một nửa chu vi ΔABC. Chứng minh rằng $\widehat{EDF} = 60^0$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại M. BM cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AD}{AB}$ b) $AD.BC = AB.CD$.

c) $AB.CD + AD.BC = AC.BD$. d) ΔCBD cân.

Câu 24. Trên nửa đường tròn tâm $(O;R)$, đường kính AB lấy hai điểm M, E theo thứ tự A, M, E, B. Hai đường thẳng AM và BE cắt nhau tại C, AE và BM cắt nhau tại D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MCED$ nội tiếp và CD vuông góc với AB.

b) Gọi H là giao điểm của CD và AB. Chứng minh rằng $BE.BC = BH.BA$.

c) Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm I thuộc CD.

d) Cho $\widehat{BAM} = 45^0, \widehat{BAE} = 30^0$. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Câu 25. Cho tam giác ABC đều, gọi O là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E lần lượt di động trên các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DOE}$ bằng 60^0.

a) Chứng minh $BD.CE$ không đổi,

b) Chứng minh rằng tia DO là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE và AC.

d) Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của (O) với AB, AC. I và N lần lượt là giao điểm của PQ với OD và OE. Chứng minh rằng $DE = 2IN$.

Câu 26. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM.AO = AB.AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM. Chứng minh $MG // BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM.

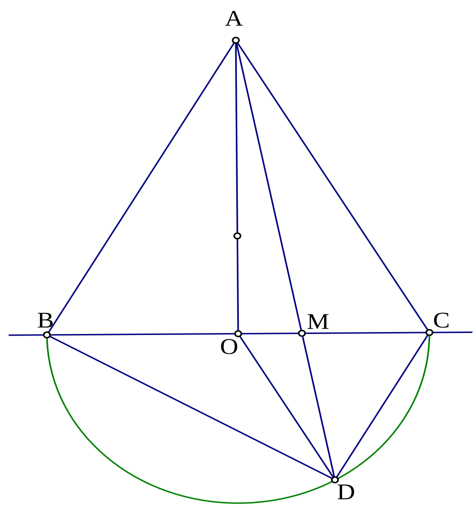
Câu 27. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE, tính OO' theo R.

b) Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{DM}{AC}=\dfrac{EN}{AB}$.

B.HƯỚNG DẪN GIẢI



Câu 1. Giải:

Gọi O là trung điểm của BC

thì tam giác OCD đều nên $\widehat{OCD}=60^0$

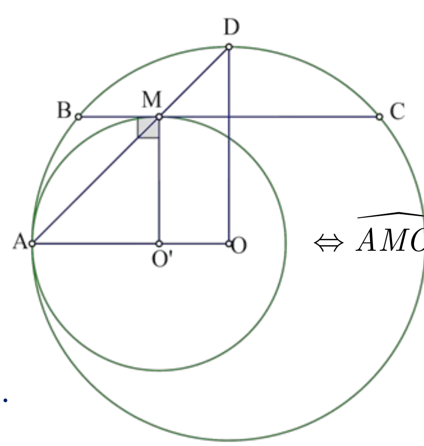
$\Rightarrow AB//CD$.Để chứng minh: $BM=2MC$

Ta cần chứng minh $AB=2CD$.

Xét tam giác vuông BDC ta có:

$CD=BC.\sin 30^0=\dfrac{1}{2}BC$ suy ra $BC=AB=2CD$

Câu 2. Giải:



Ta gọi giao điểm của AM và cung BC

là D.Ta có $\widehat{BAM}=\widehat{MAC}\Leftrightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$.

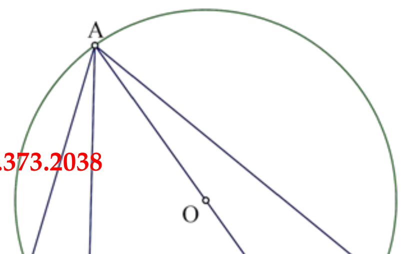
$\Leftrightarrow OD\perp BC\Leftrightarrow O'M//OD$ $\Leftrightarrow \widehat{AMO'}=\widehat{ADO}$

Để chứng minh: $\widehat{AMO'}=\widehat{ADO}$ ta

dựa vào các tam giác cân $O'AM$ và OAD.

Câu 3. Giải:

Vẽ đường kính AD của đường



tròn (O), suy ra $\widehat{ACD} = 90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

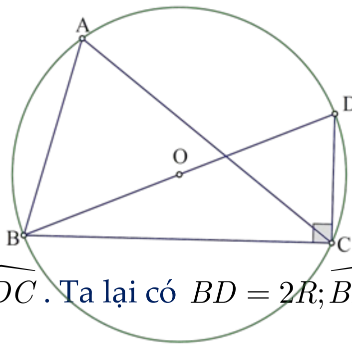
Xét ΔHBA và ΔCDA có:

$\widehat{AHB} = \widehat{ACD} \left(= 90^0\right); \widehat{HBA} = \widehat{CDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$), Do đó

$\Delta HBA \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AB.AC = AD.AH$. Mà $AD = 2R$. Do đó $AB.AC = 2R.AH$.

Câu 4. Giải:

Vẽ đường kính BD của đường tròn $(O;R) \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).



ΔBCD có $\widehat{C} = 90^0$ nên $BC = BD \sin \widehat{BDC}$. Ta lại có $BD = 2R; \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$) nên $BC = 2R \sin \widehat{BAC}$.

Từ bài toán này ta cần ghi nhớ kết quả quan trọng: Trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

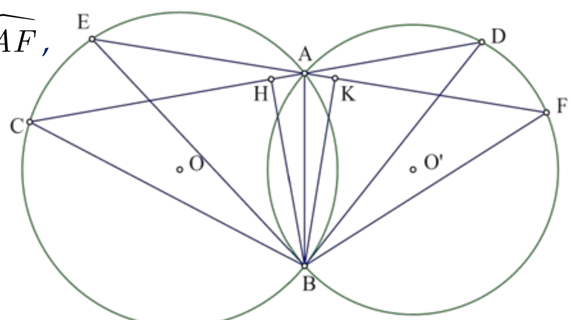
Câu 5. Giải:

Ta có: AB là tia phân giác của $\widehat{CAF}$,

Vẽ $BH \perp CD, BK \perp EF$.

Thì suy ra $BH = BK$

Ta có: $\Delta CBD \backsim \Delta EBF$ suy ra



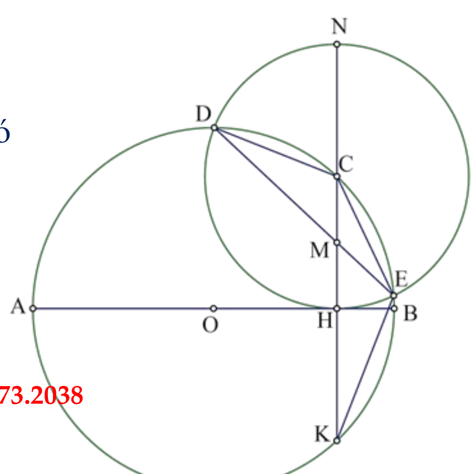
$\dfrac{CD}{EF} = \dfrac{BH}{BK} = 1 \Leftrightarrow CD = EF$. Đó là điều phải chứng minh.

Câu 6. Giải:

Dựng đường kính HN của đường tròn (C) cắt đường tròn (O) tại K khi đó ta có

$CN = CH = HK$ và

$MC.MK = MH.MN \left(= MD.ME\right)$.

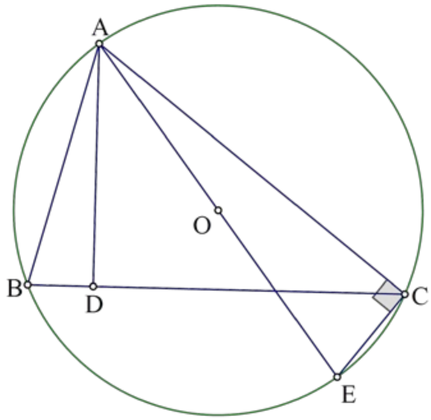


$\Rightarrow MC.MK = \left(HC - MC\right).\left(HC + MC\right)$

$\Leftrightarrow MC.MK = HC^2 - MC^2 \Leftrightarrow MC(MC + MK) = HC^2$

Hay $\Leftrightarrow MC(MC + MK) = HC^2 \Leftrightarrow MC.2HC = HC^2 \Leftrightarrow HC = 2MC$ là điều phải chứng minh.

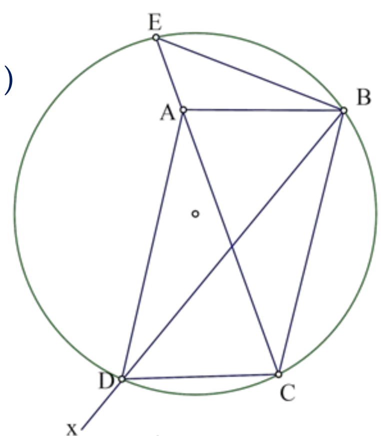
Câu 7. Giải:



Dựng đường kính AE của đường tròn $\left(O;R\right)$.Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABD}$ (cùng chắn cung AC)

suy ra $\Delta DBA \sim \Delta CEA$, từ đó suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Câu 8.



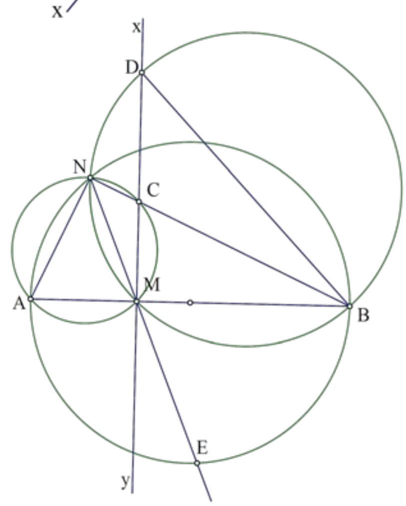
Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BDC}$ (cùng chắn cung)

BC và $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong)

suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{ABD}$.

Vì vậy tia BD là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE

Câu 9. Giải:



+ Vẽ đường tròn đường kính AB.

ΔMBD vuông tại M có $MB = MD$ (gt) nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow \widehat{ACM} = 45^0$. Từ đó ta có

$\widehat{ANM} = \widehat{ACM} = 45^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

$\widehat{ANB} = \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 90^0$; do đó N thuộc đường tròn đường kính AB.

+ Gọi E là giao điểm của MN và $\overset{\frown}{AB}$ (E khác N). Ta có

$\widehat{ANM} = \widehat{MNB} = 45^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} \Rightarrow E$ cố định. Vậy MN luôn đi qua một điểm cố định E.

Câu 10. Giải:

Dựng đường kính AH của (O).

Ta chứng minh H là trực tâm của

ΔBDC. Thật vậy ta có: $\widehat{ACH} = 90^0$

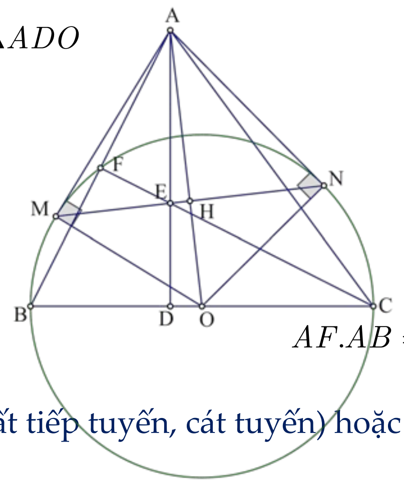
$\Rightarrow CH \perp AC \Leftrightarrow CH \perp BD$. Tương tự ta cũng có:

$BH \perp AB \Leftrightarrow BH \perp CD$. Như vậy H

là trực tâm của ΔBDC. Suy ra trực tâm H là điểm cố định.

Câu 11. Giải:

AB cắt (O) tại B và F. Vì $\Delta AEH\$\Delta ADO$



suy ra $AE.AD = AH.AO = AM^2$.

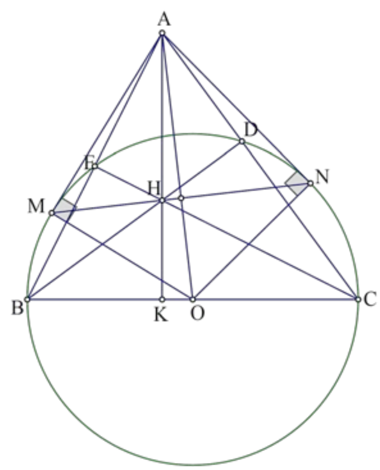
Để chứng minh E là trực tâm

của tam giác ABC, ta cần chứng

minh $\widehat{AFE} = 90^0$, nghĩa là cần có $AF.AB = AE.AD$.

Nhưng ta có: $AF.AB = AM^2$(Tính chất tiếp tuyến, cát tuyến) hoặc có thể dùng tam giác đồng dạng

Câu 12. Giải:



Gọi D, E là giao điểm của đường tròn

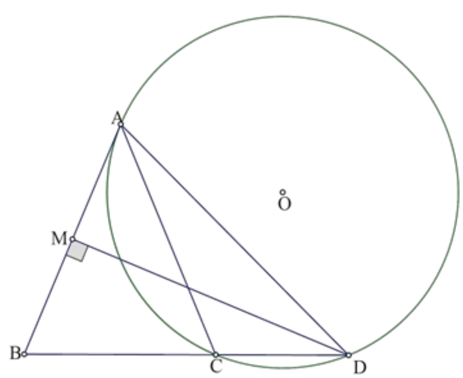
(O) với các cạnh AC, AB thì H

là giao điểm của BD, CE.

Chứng minh được $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$,

từ đó có M, H, N thẳng hàng.

Câu 13. Giải:



Hai tam giác cân ABC, DAB

có chung góc ở đáy $\widehat{ABC}$,

do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$. Suy ra BA là tiếp

tuyến của đường tròn ngoại tiếp

tam giác ACD

Câu 14. Giải:

Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O).

$\widehat{xAB}$ và $\widehat{ACB}$ lần lượt là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O) nên $\widehat{xAB}=\widehat{ACB}$.

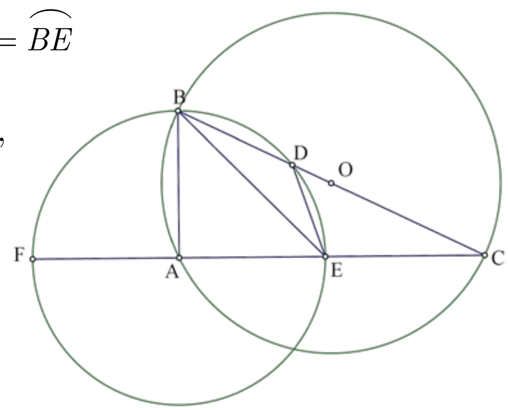
$\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACB}$ lần lượt là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD của (I) nên $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{xAB}=\widehat{ABD}\Rightarrow Ax\,//\,BD$. Mà $OA\perp Ax, OA\perp BD$ suy ra $OA\perp BD$.

Câu 15. Giải:

Giả sử CA cắt (O) tại F thì EF là đường kính của $(A;AB)$, ta có $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}$ (vì $BA\perp EF$). Ta có: $\widehat{BED}=\widehat{BFD}$,

$\widehat{BCF}\equiv\widehat{BCE}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{DE}\right)=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DE}\right)=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\widehat{BFD}$



Từ đó suy ra $\widehat{BED}=\widehat{ECB}$. Xét tam giác $\Delta BCE,\Delta BED$ có $\widehat{B}$ chung, $\widehat{BED}=\widehat{ECB}$ $\Rightarrow\Delta BCE$\$ $\Delta BED\Leftrightarrow\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BE}{BD}\Rightarrow DB.CB=EB^2$.

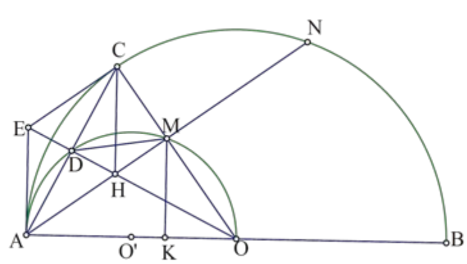
Câu 16 . Giải:

a) Ta có $OA=OC=a\Rightarrow\Delta OAC$ cân tại O. Mà $\widehat{ADO}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O')) $\Rightarrow OD\perp AC\Rightarrow OD$ cũng là đường phân giác $\widehat{AOC}$, nghĩa là $\widehat{AOD}=\widehat{DOM}$

$\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DM}$ (hai góc ở tâm bằng nhau nên cung chắn bằng nhau)

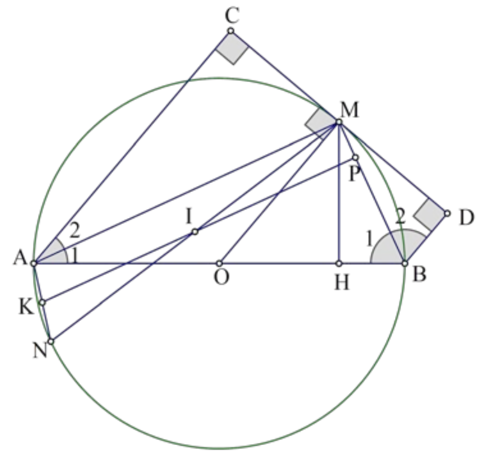
$\Rightarrow AD=DM\Rightarrow\Delta ADM$ cân tại D.

b) ΔAOE và ΔCOE có OE (chung);



$\widehat{AOE}=\widehat{COE}$ (cmt); $OA=OC=a$, $\Delta AOE=\Delta COE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EAO}=\widehat{ECO}=90^0$ hay $EA\perp AB$ tại A, $OA=a$ là bán kính $(O)\Rightarrow EA$ là tiếp tuyến của (O) và (O').

Câu 17. Giải:



a) Do BD, BH là hai tiếp tuyến cắt nhau đối với đường tròn (M)

$\Rightarrow BM$ là tia phân giác $\widehat{ABD}$ $\Rightarrow \widehat{B_1}+\widehat{B_2}=\dfrac{\widehat{HBD}}{2}$.Lý luận tương tự AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ $\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

b) $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{B_1}=90^0$

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{HBD}+\widehat{BAC}}{2}=90^0 \Rightarrow \widehat{HBD}+\widehat{BAC}=180^0$. Vậy $AC//BD$, mà $MD\perp BD, MC\perp AC$ (gt) nên M,C,D thẳng hàng. Ta có OM là đường trung bình của hình thang vuông $ABDC$ nên $OM//AC$ mà $CD\perp AC$ (gt) $\Rightarrow OM\perp CD$ tại M, CM là bán kính của (M) $\Rightarrow CD$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M.

c) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn, có:

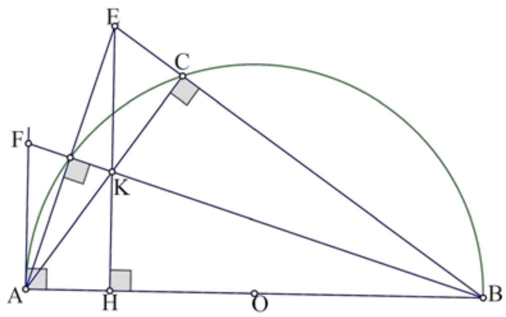
$\begin{cases}AC=AH\\BD=BH\end{cases}\Rightarrow AC+BD=AH+BH=AB=2R(const)$.Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông: $AC.BD=AH.BH=MH^2=\dfrac{CD^2}{4}$(do ΔCHD vuông có HM là trung tuyến ứng với cạnh huyền).

d) Ta có $IP//AM$ (vì cùng vuông góc với MB).Kéo dài IP cắt AN tại K; ΔAMN có IK là đường trung bình $\Rightarrow K$ trung điểm của AN. Mà A,N cố định nên K cố định. Điểm P luôn nhìn hai điểm K,B cố định dưới một góc vuông nên P chuyển động trên đường tròn đường kính KB.

Câu 18. Giải:

a) Ta có $\widehat{AIB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nủa đường tròn) $\Rightarrow BI\perp AE$.

Tương tự $AC\perp BE\Rightarrow \Delta AEB$ có hai đường cao AC,BI cắt nhau tại



$K\Rightarrow K$ là trực tâm ΔAEB $\Rightarrow EK\perp AB$ (tính chất ba đường cao).

b) Do I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}\Rightarrow \overset{\frown}{IA}=\overset{\frown}{IC}\Rightarrow \widehat{IBA}=\widehat{IBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau). Mà $\widehat{IAC}=\widehat{IBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IC}$) $\Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{IBA}$.

ΔFAK có AI là đường cao $\left(AI\perp BI\right)$ đồng thời là đường trung tuyến (F và K đối xứng qua I)

$\Rightarrow \Delta FAK$ cân tại $A\Rightarrow \widehat{FAI}=\widehat{IAK}$.Ta có

$\widehat{FAB}=\widehat{FAI}+\widehat{IAB}=\widehat{IAK}+\widehat{IAB}=\widehat{IBA}+\widehat{IAB}=90^0\Rightarrow AF\perp AB$ tại $A\Rightarrow AF$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

c) $\sin\widehat{KAH}=\dfrac{KH}{AK}$ mà $\sin\widehat{BAC}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Rightarrow \dfrac{KH}{AK}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Rightarrow AK=\sqrt{\dfrac{3}{2}}HK$ ΔABE có BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow \Delta ABE$ cân tại B nên BI cũng là đường trung trực $\Rightarrow KA=KE\left(K\in BI\right)$.

$EH=EK+KH=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+1\right)KH$.Ta có

$KH\left(KH+2HE\right)=KH\left[KH+2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+1\right)KH\right]=\left(3+\sqrt{6}\right)KH^2$. Và

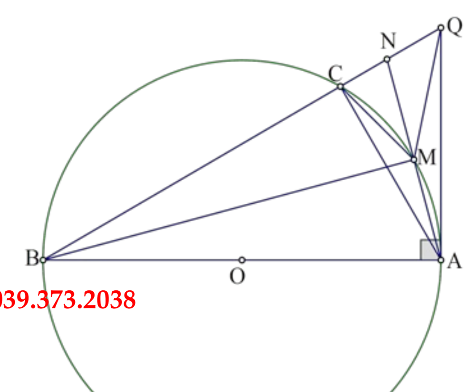
$2HE.KE=2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+1\right)HK.\sqrt{\dfrac{3}{2}}HK=\left(\sqrt{3}+6\right)HK^2$. Suy ra $KH\left(KH+2HE\right)=2HE.KE$.

Câu 19. Giải:

a) Do M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MC}$ $\Rightarrow \widehat{NBM}=\widehat{ABM}$

(hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow BM$ là đường phân



giác $\widehat{ABN}$ trong ΔABM .Mặt khác $\widehat{BMA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔBAN có BM vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow \Delta BAN$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{BNA}$.Ta lại có $\widehat{BAN} = \widehat{MCN}$ (vì cùng bù $\widehat{BCM}$). Do đó $\widehat{BNA} = \widehat{MCN} \Rightarrow \Delta CMN$ cân tại M .

b) Do $MB = MQ$ (gt) $\Rightarrow \Delta BMQ$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBQ} = \widehat{MQB}$ $\widehat{MCB} = \widehat{MNQ}$ (vì cùng bù với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow \Delta BCM \sim \Delta QNM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{QN} = \dfrac{CM}{MN} = 1$ (do ΔCMN cân tại M nên $CM = MN$)$\Rightarrow QN = BC$. $\widehat{BCA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét ΔBAQ vuông tại A, $AC \perp BQ$ có:

$AB^2 = BC.BQ = BC\left(BN + NQ\right) = BC\left(AB + BC\right)$ (1). Đặt $BC = x, x > 0$, biết $AB = 2R$, từ (1) cho $4R^2 = x\left(2R + x\right) \Leftrightarrow x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0$ $\Delta' = R^2 + 4R^2 = 5R^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = R\sqrt{5}$,

$x_1 = -R + R\sqrt{5}$ và $x_2 = -R - R\sqrt{5} < 0$ (loại) . Vậy $BC = \left(\sqrt{5} - 1\right)R$.

Câu 20. Giải:

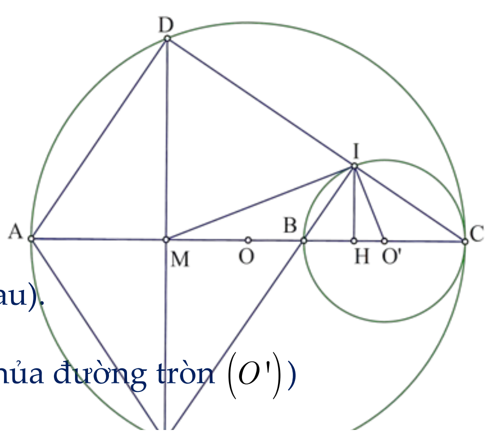
a) Đường kính AC vuông góc với dây DE tại M $\Rightarrow MD = ME$.

$MA = MB$

Tứ giác $ADBE$ có $MD = ME$,

$MA = MB$ (gt), $AB \perp DE$

$\Rightarrow ADBE$ là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nhau).



b) Ta có $\widehat{BIC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nủa đường tròn $\left(O'\right)$)

$\widehat{ADC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\left(O\right)$)$\Rightarrow BI \perp CD$ và $AD \perp DC$ nên $AD // BI$, mà $BE // AD \Rightarrow E, B, I$ thẳng hàng (tiên đề Oclit). ΔDIE có IM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Rightarrow MI = MD$. Do $MI = MD$ (cmt) $\Rightarrow \Delta MDI$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{MDI}$

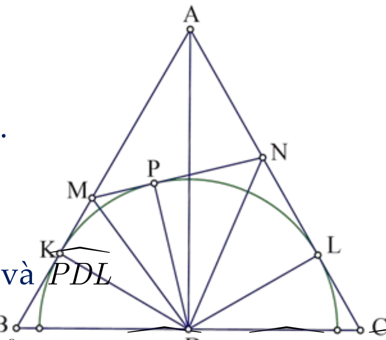
+ $O'I = O'C = R \Rightarrow \Delta O'IC$ cân tại O' $\Rightarrow \widehat{O'IC} = \widehat{O'CI}$ .Suy ra

$\widehat{MID} + \widehat{O'IC} = \widehat{MDI} + \widehat{O'CI} = 90^0$ (ΔMCD vuông tại M). Vậy $MI \perp O'I$ tại I, $O'I = R'$ bán kính đường tròn $\left(O'\right)$ $\Rightarrow MI$ là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O'\right)$.

c) $\widehat{BCI} = \widehat{BIM}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BI}$) $\widehat{BCI} = \widehat{BIH}$ (cùng phụ $\widehat{HIC}$) $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BIH} \Rightarrow IB$ là phân giác $\widehat{MIH}$ trong ΔMIH. Ta lại có $BI \perp CI \Rightarrow IC$ là phân giác ngoài tại đỉnh I của ΔMIH. Áp dụng tính chất phân giác đối với ΔMIH có:

$$\frac{BH}{MB} = \frac{IH}{MI} = \frac{CH}{CM} \Rightarrow CH.MB = BH.MC.$$

Câu 21. Giải:



Xét tứ giác $AKDL$ có $\widehat{KDL} + \widehat{KAL} = 180^0$

(vì $\widehat{K} = \widehat{L} = 90^0$) $\Rightarrow \widehat{KDL} = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

ta có DM, DN lần lượt là tia phân giác $\widehat{KDP}$ và $\widehat{PDL}$

$\Rightarrow \widehat{MDN} = \dfrac{\widehat{KDP} + \widehat{PDL}}{2} = \dfrac{\widehat{KDL}}{2} = \dfrac{120^0}{2} = 60^0$. Ta có: $\widehat{MDC} = \widehat{MDN} + \widehat{NDC} = 60^0 + \widehat{NDC}$;

$\widehat{MDC} = \widehat{B} + \widehat{BMD} = 60^0 + \widehat{NDC}$ (góc ngoài ΔBMD)

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{BMD}$, mà $\widehat{MBD} = \widehat{DCN} = 60^0$ (ΔABC đều) $\Rightarrow \Delta BMD \sim \Delta CDN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{BD}{CN} \Rightarrow BM.CN = BD.CD = \dfrac{BC^2}{4}$.

b) Ta có

$$\frac{S_{MDN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}MN.PD}{\frac{1}{2}AD.BC} = \frac{MN}{BC}.\frac{PD}{AD} = \frac{MN}{BC}.\frac{KD}{AD} = \frac{MN}{2BC}.$$

Vì $D \in MD$ là tia phân giác $\widehat{BMN} \Rightarrow DK = DP$, ΔAKD có $\widehat{K} = 90^0, \widehat{KAD} = 30^0 \Rightarrow KD = \dfrac{AD}{2} \Rightarrow \dfrac{KD}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

c) Dựng đường tròn bàng tiếp trong góc A có tâm O của ΔAEF. Do AD là đường trung tuyến của ΔABC đều nên AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$. Suy ra $O \in AC$. Gọi P', K', L' lần lượt là các tiếp điểm của (O) với EF, AB, AC. Ta có $AK' = AL'; P'E = EK'; P'F = FL'$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow P_{AEF} = AE + EF + FA = AE + EP' + P'F + FA$

$= AE + EK' + FL' + FA = AK' + AL' = 2AK'$. Mà $P_{AEF} = \dfrac{1}{2}P_{ABC}$ (gt)

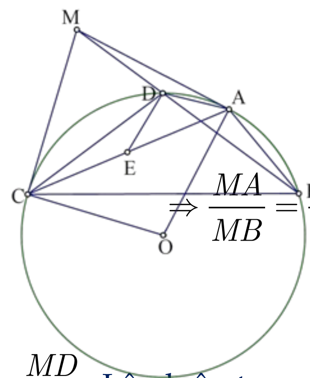
$\Rightarrow 2AK' = \dfrac{1}{2}P_{ABC} = \dfrac{3}{2}AB$ (ΔABC đều) $\Rightarrow AK' = \dfrac{3}{4}AB \Rightarrow BK' = \dfrac{AB}{4}$ (vì $AK' + K'B = AB$)

$\Rightarrow BK'.AB = \dfrac{AB^2}{4}$. Mặt khác $BD^2 = \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{4}$ (D là trung điểm BC); $AB = BC$ (ΔABC đều) $\Rightarrow BK'.AB = BD^2 \Rightarrow \Delta BKD' \sim \Delta BDA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BK'D} = \widehat{BDA} = 90^0$. Ta lại có

$\widehat{OK'B} = 90^0 \Rightarrow O \equiv D$ (vì $O, D \in AD$) . Mà $\widehat{K'AL'} + \widehat{K'DL'} = 180^0$ (vì $AK'DL'$ là tứ giác nội tiếp) mà $\widehat{K'AL'} = 60^0$ $\Rightarrow \widehat{K'DL'} = 120^0 \Rightarrow \widehat{EDF} = 60^0$ (tia phân giác của hai góc kề).

Câu 22. Giải:

a) Xét ΔMAD và ΔMBA có $\widehat{AMB}$ chung;



$\widehat{MAD} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset\frown{AD}$)

$\Rightarrow \Delta MAD\$ \Delta MBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AD}{AB} = \frac{MD}{MA}$.

b) Ta có $MA = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn) $\Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{MD}{MC}$. Lập luận tương tự, ta có $\frac{MD}{MC} = \frac{CD}{BC}$. Suy ra $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow AD.BC = AB.CD$.

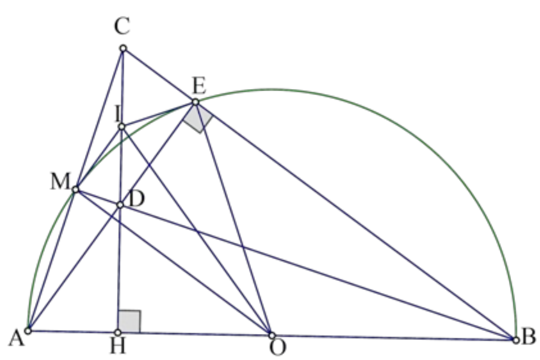
c) Dựng điểm $E \in AC$ sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ADB}$

ΔDAB và ΔDEC có $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ (cách dựng), $\widehat{ABD} = \widehat{ECD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AD}$)$\Rightarrow \Delta DAB\$ \Delta DEC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{EC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow AB.DC = EC.BD$ (1). Do $\widehat{EDC} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ADE}$, nên $\Delta DAE\$ \Delta DBC$ (g.g)$\Rightarrow AD.BC = BD.AE$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AB.CD + AD.BC = BD(AE + EC) = BD.AC$.

c) Ta có $\begin{cases} AD.BC = AB.CD \\ AD.BC + AB.CD = AC.BD \end{cases} \Rightarrow 2AB.CD = AC.BD$.

Mà $AC = 2AB$ (gt) $\Rightarrow 2AB.CD = 2AB.BD \Rightarrow CD = BD$. Suy ra tam giác BCD cân tại D.

Câu 23. Giải:



a) Áp dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ta có:

$\widehat{AEB} = \widehat{AMB} = 90^0$, vậy

$\widehat{BMC} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AEC} + \widehat{BMC} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MCED$ nội tiếp đường tròn. ΔABC có hai đường cao BM, AE cắt nhau tại $D \Rightarrow D$ là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow CD \perp AB$.

b) $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BE.BC = BH.AB$. c) + Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) với CD. Trong đường tròn (O) có $\widehat{IMD} = \widehat{MAB}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$), $\widehat{MAB} = \widehat{MDI}$ (cùng phụ với $\widehat{ACH}$) $\Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{MDI} \Rightarrow \Delta IMD$ cân tại $I \Rightarrow IM = ID$. Ta lại có $\widehat{IMC} = \widehat{ICM}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow \Delta MIC$ cân tại I $\Rightarrow IM = IC$. Vậy $IM = ID = IC \Rightarrow I$ là trung điểm của CD.

+ ΔCED có EI là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $IE = IC = ID = IM$, ΔCED và ΔIED có $IM = IE$ (cmt), OI chung, $OM = OE = R \Rightarrow \Delta IMO = \Delta IEO$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IEO} = \widehat{IMO} = 90^0 \Rightarrow IE \perp OE, OE = R$ nên IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

Nghĩa là các tiếp tuyến tại M, E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm I thuộc CD.

d) ΔAHC có $\widehat{H} = 90^0$, $\widehat{CAH} = 45^0$ $\Rightarrow \Delta AHC$ vuông cân tại H $\Rightarrow CH = AH = x$.

$\widehat{EAB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{EBA} = 60^0$; $\cot\widehat{EBA} = \dfrac{HB}{HC} = \cot 60^0 = \sqrt{3} \Rightarrow HB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.HC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.x$. Ta có

$AB = AH + HB \Rightarrow 2R = x + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{6R}{\sqrt{3}+3} = R\left(3-\sqrt{3}\right)$. Vậy

$S_{ABC} = \dfrac{AB.CH}{2} = \dfrac{1}{2}.2R.R\left(3-\sqrt{3}\right)R^2$ (đvdt).

Câu 24. Giải:

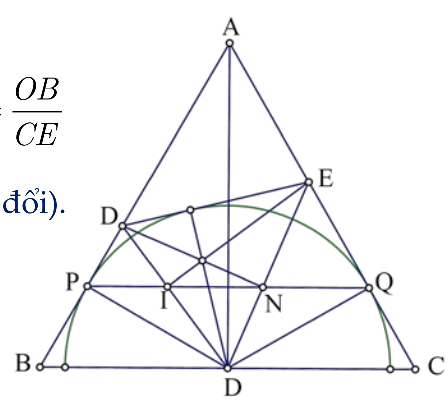
a) Ta có $\begin{cases} \widehat{BDO} + \widehat{BOD} = 180^0 - \widehat{B} = 120^0 \\ \widehat{BOD} + \widehat{COE} = 180^0 - \widehat{DOE} = 120^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{BDO} = \widehat{COE}$,

mà $\widehat{DOE} = \widehat{B} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta BDO \sim \Delta COE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{OC} = \dfrac{OB}{CE}$

$\Rightarrow BD.CE = OB.OC = \dfrac{BC^2}{4}$ (không đổi).

b)



$\Delta BDO \sim \Delta COE \quad \Rightarrow \dfrac{OD}{OE} = \dfrac{BD}{OC} = \dfrac{BD}{OB}$ mặt khác

$\widehat{DBO} = \widehat{DOE} = 60^0 \Rightarrow \Delta BDO \sim \Delta ODE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDO} = \widehat{ODE}$, mà tia DO nằm giữa hai tia $DB, DE \Rightarrow DO$ là tia phân giác $\widehat{BDE}$.

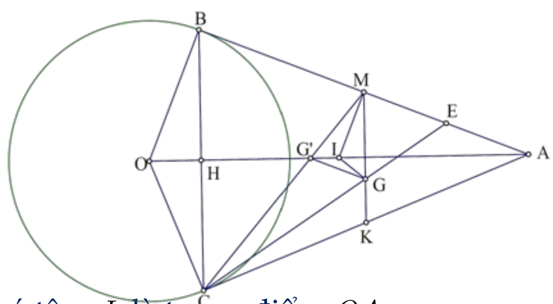
c) ΔABC đều nên đường trung tuyến AO cũng là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$, mà DO là phân giác ngoài tại đỉnh $D \Rightarrow O$ là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của $\Delta ADE \Rightarrow$ ĐƯờng tròn (O) luôn tiếp xúc DE, AC.

d) $AP = AQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), $AB = AC$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} \Rightarrow PQ//BC \Rightarrow \widehat{IQA} = \widehat{ACB} = 60^0$, mà $\widehat{DOE} = 60^0 \Rightarrow \widehat{IQE} = \widehat{IOE} = 60^0; O, Q$ là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $IOQE \Rightarrow$ Tứ giác $IOQE$ nội tiếp (cùng thuộc một cung chứa góc). Suy ra $\widehat{EIO} = \widehat{EQO} = 90^0$. Lý luận tương tự $\widehat{DNE} = 90^0$. Vậy tứ giác $DINE$ ($\widehat{DIE}$ và $\widehat{DNE}$ cùng nhìn DE dưới một góc vuông) $\Rightarrow \widehat{ONI} = \widehat{ODE}$. Vậy $\Delta ONI \sim \Delta ODE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IN}{DE} = \dfrac{ON}{OD} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DE = 2NI$.

Câu 25. Giải:



a) Do AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0 \Rightarrow B, C$ thuộc đường tròn đường kính OA có tâm I là trung điểm OA.

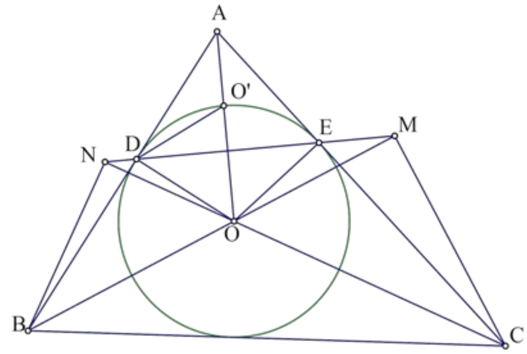
b) Ta có $AM.AO = \dfrac{AB}{2}.2AI = AB.AI$.

c) Gọi E là trung điểm MA, do G là trọng tâm ΔCMA nên $G \in CE$ và $\dfrac{GE}{CE} = \dfrac{1}{3}$. Mặt khác $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{1}{3}$ (vì $ME = \dfrac{MA}{2} = \dfrac{MB}{2}$ nên $ME = \dfrac{BE}{3}$) $\Rightarrow \dfrac{GE}{CE} = \dfrac{ME}{BE}$, theo định lý Ta-lét đảo $\Rightarrow MG//BC$.

d) Gọi G' là giao điểm của OA và $CM \Rightarrow G'$ là trọng tâm ΔABC. Nên $\dfrac{G'M}{CM} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{GE}{CE'}$, theo định lý Ta-lét đảo $GG'//ME$ (1)

MI là đường trung bình trong $\Delta OAB \Rightarrow MI//OB$, mà $AB \perp OB$ (cmt) $\Rightarrow MI \perp AB$, nghĩa là $MI \perp ME$ (2). Từ (1) và (2) cho $MI \perp GG'$, ta lại có $GI' \perp MK$ (vì $OA \perp MK$) nên I là trực tâm $\Delta MGG' \Rightarrow GI \perp G'M$ tức $GI \perp CM$.

Câu 26. Giải:



a). Gọi O' là giao điểm của AO với cung nhỏ DE của đường tròn $(O) \Rightarrow O'$ thuộc đường phân giác của $\widehat{A}$ trong ΔADE. Ta có $\widehat{DOA} = \widehat{EOA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{DO'} = \widehat{O'E}$. Mà

$\widehat{ADO'} = \dfrac{1}{2}$sđ$\,\widehat{DO'}; \widehat{EDO'} = \dfrac{1}{2}$sđ$\,\widehat{O'E}$ $\Rightarrow \widehat{ADO'} = \widehat{EDO'} \Rightarrow DO'$ là phân giác $\widehat{D} \Rightarrow O'$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE. Do đó $OO' = R$.

b) Do $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A nên

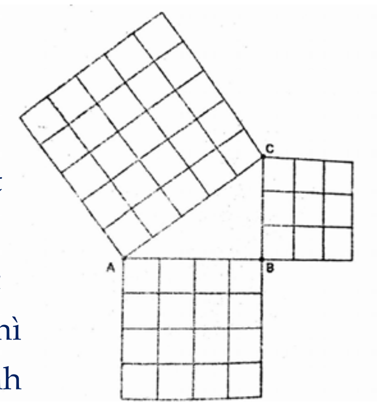
$\widehat{ADE} = \dfrac{180^0 - \widehat{BAC}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$. Mà $\widehat{ADE} = \widehat{ABM} + \widehat{NMB} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{NMB}$ (do BO là phân giác $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABM} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$) $\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{ADE} - \dfrac{\widehat{B}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$. Mặt khác $\widehat{NCB} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ (do CO là tia phân giác $\widehat{ACB}$). Suy ra $\widehat{NMB} = \widehat{NCB}$, mà M, C là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $BCMN \Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp (vì cùng thuộc một cung chứa góc).

c) ΔNMO và ΔBCO có $\widehat{NOM} = \widehat{BOC}$ (đối đỉnh); $\widehat{NMO} = \widehat{BCO}$ (cmt)$\Rightarrow \Delta NMO\$\,\Delta BCO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{MN}{BC}$. Tương tự $\Delta DMO\$\,\Delta ACO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{OM}{OC}$; $\Delta NEO\$\,\Delta BAO$ (g.g)

-----------////-------------

CHUYÊN ĐỀ:CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ HÌNH HỌC

§1. ĐỊNH LÍ PYTHAGORE VÀ NHỮNG ỨNG DỤNG TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

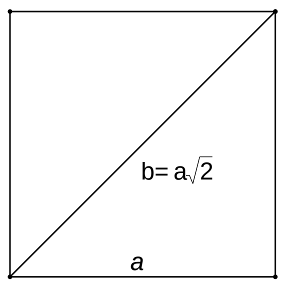


A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Định lí Pythagore là một trong những định lí quan trọng nhất trong tất cả các định lí khoa học nói chung và hình học nói riêng. Định lý Pythagore đơn giản nhưng rất lí thú. Nhiều nhà khoa học còn cam đoan rằng nếu có con người sống ở các hành tinh khác thì định lí hình học đầu tiên có giá trị mà họ tìm cũng sẽ chính là định lí Pythagore. Đã có dự án đề nghị xây dựng các công trình hoặc tường cây xanh tạo thành tam giác vuông có ba cạnh $3,4$ và 5 khổng lồ trên cánh đồng lớn để liên lạc với người ngoài Trái Đất.

Ngày 08 tháng 09 năm 1977, hai tàu thăm dò Voyager của Mỹ được phóng lên vũ trụ mang theo hình vẽ biểu diễn định lí Pythagore.

Pythagore là nhà hiền triết người Hy Lạp sống khoảng 500 năm trước công nguyên. Sau này người ta phát hiện ra rằng định lí Pythagore đã được biết đến trước đó từ rất lâu trong các nền văn minh cổ đại trên thế giới. Điển hình trong số đó là các nhà khảo cổ đã tìm thấy một bảng đất sét nung của nền văn minh Babilon hơn một nghìn năm trước Pythagore có một hình vẽ khác tam giác vuông có các cạnh thể hiện định lí này.



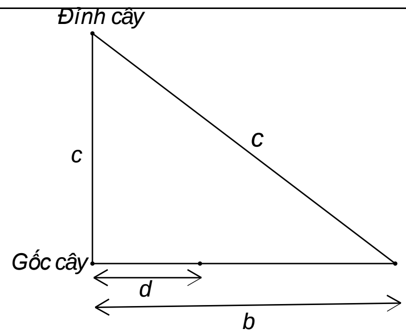
Trong những văn tự Ấn Độ cổ đại khoảng 1500 năm trước Công nguyên có một phần quan trọng được gọi là Sulbasutras nói về việc đo đạc và thiết kế các đền thờ. Ở phần này có thể tìm thấy định lí Pythagore dưới dạng: *Diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh huyền một tam giác vuông bằng tổng diện tích hai hình vuông bằng tổng diện tích hai hình vuông có cạnh bằng hai cạnh bên của tam giác vuông đó.*

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng công thức Pythagore để tìm cạnh góc vuông hoặc cạnh huyền từ hai cạnh còn lại: $c^2 = a^2 + b^2$ (c là cạnh huyền, a,b là cạnh góc vuông).
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1



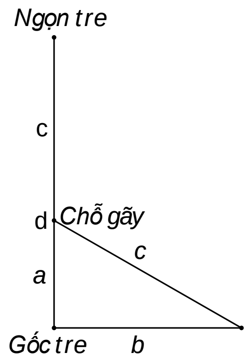
Từ đỉnh một cái cây có treo một cái dây thả xuống đất thì thừa một đoạn có độ dài là d. Nếu kéo căng dây ra thì đầu dây chạm đất ở một khoảng cách là b so với gốc cây. Hãy tìm độ dài của dây.

Nếu cây có độ dài a thì có bài toán là tính độ dài c của cạnh huyền một tam giác vuông có cạnh bên là

$a = c - d$ và b. *Theo định lí Pythagore ta có:*

$(c-d)^2 + b^2 = c^2$.

Từ đây suy ra: $c = \dfrac{b^2 + d^2}{2d}$.



Ví dụ 2

Có một cây tre có độ cao là a. Khi gãy ngọn tre chạm đất ở một khoảng cách là b so với gốc tre. Hãy tìm độ cao chỗ cây tre.

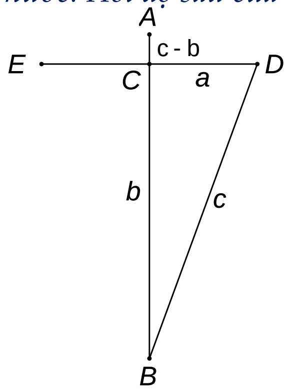
Ta phải tính cạnh a của một tam giác vuông có cạnh bên là b và cạnh huyền là $c = d - a$.

Theo định lí Pythagore ta có: $a^2 + b^2 = (d-a)^2$.

Từ đây suy ra: $a = \dfrac{d^2 - b^2}{2d}$.

Ví dụ 3

Có một cái ao hình vuông, mỗi cạnh dài $3,33\,m$, chính giữa cái ao có một cây sậy nhô lên khỏi mặt nước vừa đúng $0,33\,m$, kéo ngọn cây sậy vào bờ thì chọn cây vừa chạm mặt nước. Hỏi độ sau của nước và cây sậy cao bao nhiêu?



Giả sử chiều rộng của ao là $ED = 2a = 3,33$ (m),

C là trung điểm của ED nên:

$DC = a = 1,665$ (m).

Chiều cao cây sậy mặt giữa ao là AB, phần nhô khỏi mặt nước $AC = 0,33$ (m).

Mà $AB = BD$, giả sử $BD = c$, độ sâu của nước $BC = b$, tam giác BCD là tam giác vuông. Rõ ràng là $AC = AB - BC = c - b = 0,33$ (m).

Độ dài của AC bằng hiệu giữa đường huyền với cạnh dài của góc vuông.

Vậy bài toán quy về việc tính chiều dài cạnh huyền và cạnh góc vuông lớn của một tam giác vuông khi biết cạnh góc vuông bé và hiệu giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông lớn.

Từ định lí Pythagore, ta có:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 - (c-b)^2 = c^2 - b^2 - (c-b)^2$$

$$= c^2 - b^2 - (c^2 - 2bc + b^2)$$

$$= 2bc - 2b^2$$

$$= 2b(c-b).$$

Vì thế

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)} \qquad (1)$$

$$c = b + (c-b) \qquad (2)$$

Đem giá trị của $a, c-b$ thay vào hai công thức (1) và (2) sẽ dễ dàng tính được độ sâu của nước là:

$$b=\frac{1,665^2-0,33^2}{2.0,33}=\frac{2,772225-0,1089}{0,66}\approx 4,035 \text{ (m).}$$

Độ cao của cây sậy là: $c=4,035+0,33=4,365$ (m).

C. LỜI BÌNH

Định lí Pythagore là một trong những định lí hình học nói riêng và khoa học nói chung có nhiều cách chứng minh nhất. Theo thống kê, đến nay đã có 385 cách giải. Nhiều chính trị gia lỗi lạc như Tổng thống Hoa kỳ James Garfiel cũng tham gia tìm cách chứng minh định lí này. Ở bậc học cao hơn, người ta có thể dùng Vật lí học để chứng minh định lí Pythagore. Định lí Pythagore còn xuất hiện trong các môn phi-Euclide, hình học giả Euclide, phương trình vi phân, Đại số tuyến tính, …. Hầu như ở bất cứ lĩnh vực nào quan trọng người ta đều thấy bóng dáng của định lí Pythagore. Qua đó càng minh chứng tầm quan trọng của định lí Pythagore trong lĩnh vực khoa học và đời sống.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài toán 1

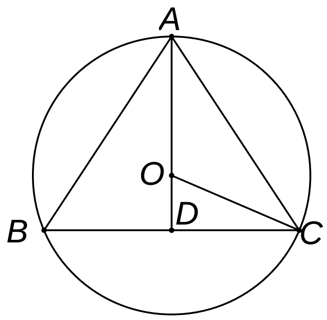
Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác có các cạnh là $50, 50, 60$.

Bài toán 2

Dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình chữ nhật cho trước.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1



Theo định lí Pythagore, ta có:

$AD^2=AC^2-DC^2$.

Do $DC=BC:2=30$, nên:

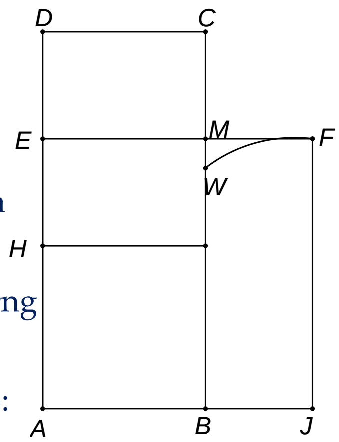
$AD=\sqrt{50^2-30^2}=40$.

Ta lại có:

$$OC^2=DC^2+(AD-OA)^2$$
$$=DC^2+AD^2-2AD.OC+OC^2.$$

Do đó: $OC^2=\dfrac{DC^2+AD^2}{2AD}=\dfrac{30^2+40^2}{2.40}=\dfrac{125}{4}$.

Bài toán 2



Cho hình chữ nhật $ABCD$. Ta vẽ hình chữ vuông $ABKH$ trong hình chữ nhật $ABCD$. Sau đó xác định các trung điểm E và M của DH và CK.

Dựng hình vuông $AEFJ$ đi qua M. Lấy J làm tâm vẽ một đường tròn có bán kính JF cắt BM ở W. Hình vuông có cạnh bằng BW sẽ có diện tích bằng diện tích $ABCD$ vì theo định lí Pythagore ta có:

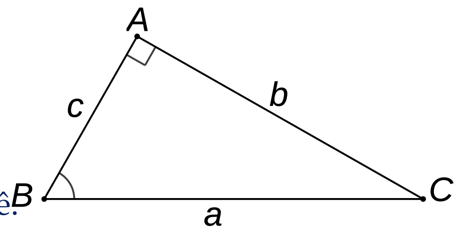
$$BW^2=JW^2-BJ^2$$
$$=JF^2-KM^2$$

$= (JF - BJ)(JF + KM)$

$= AB.BC$.

§2. HỆ THỨC GIỮA CÁC CẠNH VÀ CÁC GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN



Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với côsin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hay nhân với côtang góc kề.

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng các hệ thức lượng của tam giác vuông một cách thích hợp như:

$$\sin\alpha = \frac{canhdoi}{canhhuyen}; \cos\alpha = \frac{canhke}{canhhuyen}$$

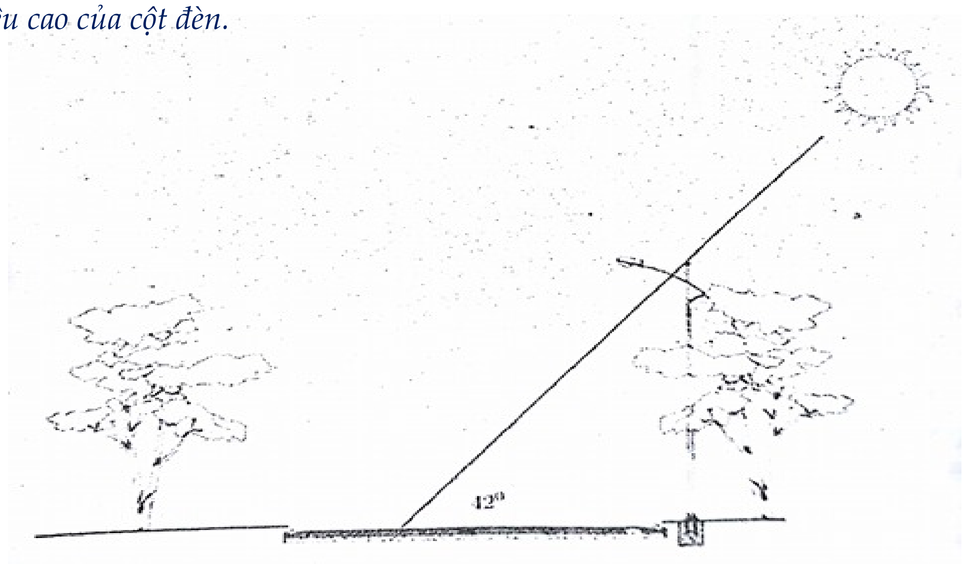
$$\tan\alpha = \frac{canhdoi}{canhke}; \text{cotan}\alpha = \frac{canhke}{canhdoi}.$$

(α là góc nhọn của tam giác vuông).

- Từ đây rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1

Một cột điện có bóng trên mặt đất dài $7,5\,m$, các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 42^0. Tính chiều cao của cột đèn.



Gọi chiều cao cột đèn là AB, bóng của nó trên mặt đất là AC.

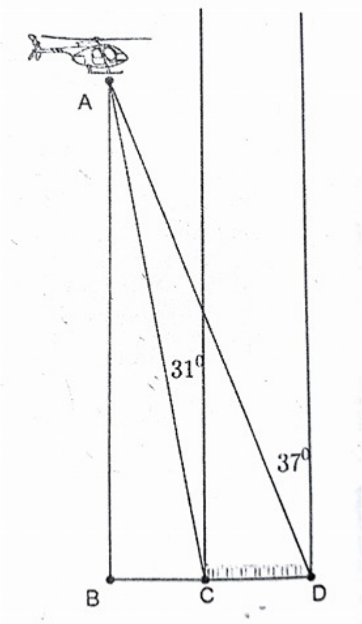
Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$.

Theo giả thiết, ta có $\widehat{BCA} = 42^0$.

Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác ABC vuông ở A, ta có:

$$\tan\widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC.\tan\widehat{BCA} \approx 7,5.\tan 42^0 \approx 6,75 \text{ (cm).}$$

Vậy chiều cao của cột đèn là $6,75$ (cm).



Ví dụ 2

Ở độ cao $920\,m$, từ một máy bay trực thăng người ta nhìn hai điểm D,C của hai đầu cầu những góc so với đường vuông góc với mặt đất các góc lần lượt là $\alpha = 37^0, \beta = 31^0$. Tính chiều dài CD của cây cầu (hình vẽ).

Gọi A là vị trí của trực thăng, B là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt đất. C và D là hai điểm đầu cầu.

Ta có

$$\tan\widehat{BAD} = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow BD = AB.\tan\widehat{BAD} = 920.\tan 37^0$$

$$\approx 920.0,754 \approx 693,68 \text{ (m).}$$

Mặt khác

$$\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow BC = AB.\tan\widehat{BAC} = 920.\tan 31^0 \approx 920.0,6 \approx 552 \text{ (m).}$$

Vậy chiều dài của cây cầu là:

$$CD = BD - BC \approx 693,68 - 552 = 141,68 \text{ (m).}$$

C. LỜI BÌNH

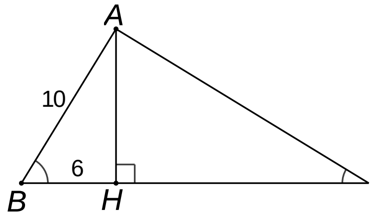
Hệ thức lượng trong tam giác vuông là chủ đề hay và quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Nó có nhiều ứng dụng trong thực tế. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

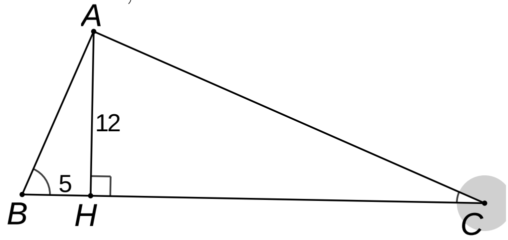
Bài toán 1

Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Tính $\sin B, \sin C$ ứng với mỗi trường hợp sau:

a) $AB = 10cm; BH = 6cm$.



b) $BH = 5cm, AH = 12cm$.



Bài toán 2

Cho tam giác vuông ABC *vuông ở* A. *Tính* $\sin B, \tan B$ *trong mỗi trường hợp sau:*

a) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{13}$; *b)* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{15}{8}$.

E. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

a) Ta có: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$.

Vậy $AH = \sqrt{64} = 8$ (cm).

Do đó $\sin B = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{AB^2 - AH^2}{AH^2.AB^2} = \frac{10^2 - 8^2}{10^2.8^2} = \frac{36}{6400}.$$

Vậy $AC = \sqrt{\dfrac{6400}{36}} = \dfrac{80}{6} \approx 13,3$ (cm).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \approx 10^2 + 13,3^2 = 276,89$$

Suy ra $BC = \sqrt{276,89} \approx 16,64$ (cm).

Vì vậy: $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{10}{16,64} \approx 0,6$.

b) Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông AHB vuông tại H, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169.$$

Do đó $AB = \sqrt{169} = 13$ (cm).

Suy ra: $\sin B = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{12}{13}$.

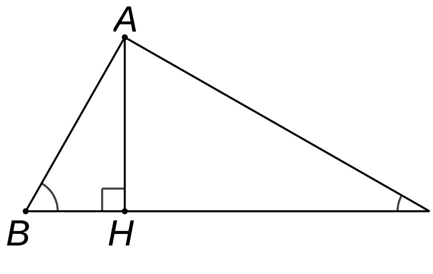
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

$$\frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{AB^2 - AH^2}{AH^2.AB^2} = \frac{13^2 - 12^2}{13^2.12^2} = \frac{25}{24336}.$$

Vậy $AC = \sqrt{\dfrac{24336}{25}} \approx 31,2$ (cm).

Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác AHC vuông tại H:

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 \approx 31,2^2 - 12^2 = 829,44.$$



Vậy $HC = \sqrt{829,44} \approx 28,8$ (cm).

Ta có: $BC = BH + HC = 5 + 28,8 = 33,8$ (cm).

Vậy: $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{13}{33,8}$.

Bài toán 2

a) Ta có: $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{13}$.

Áp dụng công thức

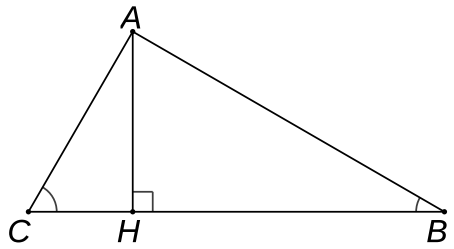
$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, ta được:

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}.$$

Từ đó, ta có: $\sin B = \sqrt{\dfrac{25}{169}} = \dfrac{5}{13}$ (do $\sin B > 0$)

Mặt khác, $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \dfrac{5}{13}$.

b) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{15}{8}$.



Ta có: $\cot B = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{15}{8} \Rightarrow \tan B = \dfrac{1}{\cot B} = \dfrac{1}{\frac{15}{8}} = \dfrac{8}{15}$.

Theo công thức lượng giác, ta được:

$$\frac{1}{\sin^2 B} = \cot^2 B + 1 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1 = \frac{225}{64} + 1 = \frac{289}{64}$$

Từ đây, suy ra: $\sin B = \sqrt{\dfrac{64}{289}} = \dfrac{8}{17}$ (do $\sin B > 0$).

§3. ĐỊNH LÍ THALES TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Những thế kỷ cuối cùng của thiên niên kỉ thứ hai trước Công nguyên đã được chứng kiến nhiều biến đổi về kinh tế và chính trị. Một vài nền văn minh đã biến mất, quyền lực của Ai Cập và Babylon đã đến ngày suy tàn và những dân tộc mới như người Do Thái, người Assiri, người Phenixi, người Hy Lạp đã vượt lên. Thời đại đồ sắt đã bắt đầu và kéo theo nó là biết bao đổi thay trong chiến tranh và trong các nghề cần phải những công cụ. Đã phát minh ra vần chữ cái và đã xuất hiện tiền kim loại. Thương mại không ngừng được khuyến khích và nhiều khám phá về địa lý đã được thực hiện. Thế giới đã sẵn sàng cho một kiểu văn minh mới.

Nền văn minh mới đó đã xuất hiện trong các thành phố thương mại chạy dài dọc theo bờ biển của Tiểu Á và sau này trên lãnh thổ Hy Lạp, trên các vùng biển Italia. Cái nhìn tĩnh tại của phương đông cổ đại đã trở nên không thể phủ nhận được và trong một bầu không khí phát triển của chủ nghĩa duy lý, người ta bắt đầu hỏi tại sao và như thế nào.

Ở thời gian đầu, trong toán học cũng như trong các lĩnh vực khác, người ta bắt đầu đặt những câu hỏi có tính chất căn bản như là *"Tại sao* các góc đáy của một tam giác cân lại bằng nhau?" và *"Tại sao* đường kính lại chia đôi đường tròn?" Những quá trình thực nghiệm của phương đông cổ đại hoàn toàn đủ để trả lời câu hỏi làm thế nào nhưng không đủ để trả lời những câu hỏi có tính chất khoa học của từ tại sao. Ít nhiều cố gắng ở các phương pháp chứng minh chắc là để tự khẳng định và khía cạnh suy diễn mà các học giả ngày nay coi là một đặc trưng cơ bản của toán học đã thấy xuất hiện. Có thể là toán học có ý nghĩa mới của từ này, đã ra đời trong không khí của chủ nghĩa duy lý và tại một trong những đô thị thương mại nằm trên vùng bờ biển phía tây của Tiểu Á. Theo những lời truyền lại thì hình học chứng minh bắt đầu với Thales vùng Miletus, một trong "bảy nhà thông thái" của thời đại trong khoảng thời gian nửa đầu thế kỷ XV trước Công nguyên.

Theo các nhà nghiên cứu lịch sử, phần đầu của đời mình hình như Thales là một nhà buôn và trở nên khá giàu có để quãng đời sau của cuộc đời đã dành cho việc nghiên cứu học tập và du lịch. Ông là thiên tài về nhiều mặt như chính khách, người cố vấn, kỹ sư, doanh nghiệp, nhà triết học, toán học và thiên văn học. Thales là người đầu tiên được biết đến cùng với những khám phá toán học. Trong hình học ông được công nhận là đã đưa ra những kết quả cơ bản sau đây:

- Một đường tròn được chia đôi bởi bất kì đường kính nào.
- Hai góc ở đáy của một tam giác cân thì bằng nhau.
- Các góc đối đỉnh thì bằng nhau.
- Hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc cạnh góc.

Thales cũng được coi là người đầu tiên đoán đúng hiện tượng nhật thực vào năm 585.

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

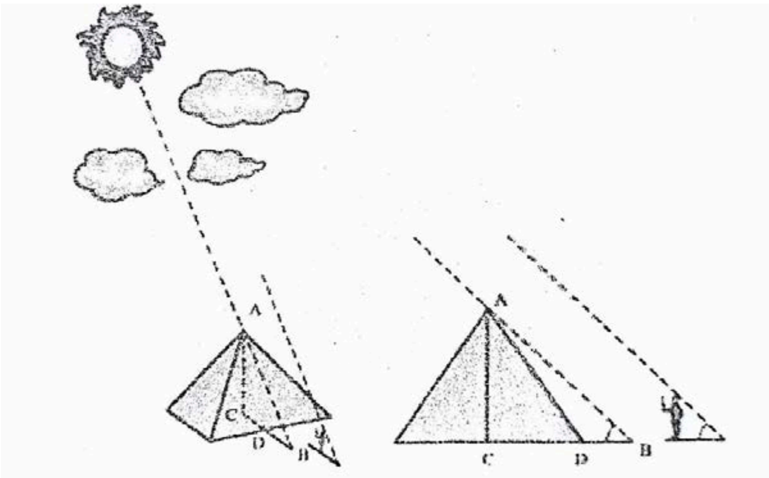
- Sử dụng tỉ số của hai tam giác đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

- Rút ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 1

Làm thế nào đo được độ cao của kim tự tháp?



Kim tự tháp là công trình kiến trúc cổ rất hùng vĩ và là phần mộ của các vua chúa Ai Cập cổ đại. Hơn 2600 năm trước, có một vương quốc Ai Cập muốn biết độ cao thực sự của kim tự tháp là bao nhiêu, nhưng chẳng ai đo được.

Cho người trèo lên đỉnh tháp? Rõ ràng là không thể được vì tháp nghiêng, có trèo lên được cũng chẳng biết dùng cách gì để đo được.

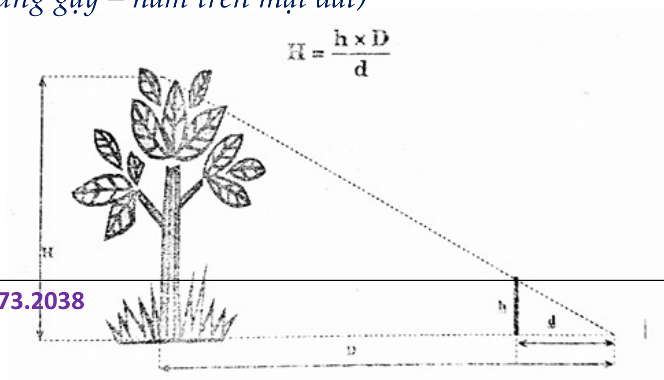
Thales được cho là người đã giúp Quốc Vương đo được chiều cao của kim tự tháp. Thales chọn một ngày đẹp trời, mời Quốc Vương và các quan trọng triều của hành lễ đo tháp. Người đến xem rất đông, chen chúc nhau, bàn ra tán vào rất sôi nổi. Nhưng thời gian cứ trôi đi, mặt trời cứ chiếu xuống Kim tự tháp và đám người mà chưa thấy Thales có động tĩnh gì. Mãi khi thấy bóng người bằng chính chiều cao của ông, ông mới phát lệnh đo tháp. Lúc đó, người giúp việc lập tức đo độ dài của bóng Kim tự tháp bằng DB (hình vẽ trên). Sau đó, ông đưa ra ngay chiều cao của Kim tự tháp một cách hết sức chuẩn xác.

Thales làm thế nào để đo được chiều cao của Kim tự tháp? Ông phải chờ tới khi độ dài của bóng người ông bằng chính độ cao của ông mới đo, chính lúc đó tia nắng mặt trời và người ông tạo thành một góc 45^0. Tức là $\widehat{CBA}=45^0 \Rightarrow \widehat{ACB}=90^0, \widehat{BAC}=45^0$. Lúc ấy, điểm đỉnh của Kim tự tháp cùng với điểm trung tâm của Kim tự tháp và điểm cuối của bóng Kim tự tháp tạo thành một tam giác vuông cân, và như vậy đương nhiên hai cạnh bên $AC=CB$. Nửa độ dài của Kim tự tháp chính là đoạn CD (đã được ông đo trước, còn độ dài đoạn bóng Kim tự tháp chính DB ông nhờ các trợ lý đo. Cuối cùng chỉ việc cộng lại hai đoạn CD và DB lại là ra chiều cao Kim tự tháp.

Ví dụ 2

Làm thế nào để đo được chiều cao của cây?

Cách 1 *(Phương pháp dùng gậy – nằm trên mặt đất)*

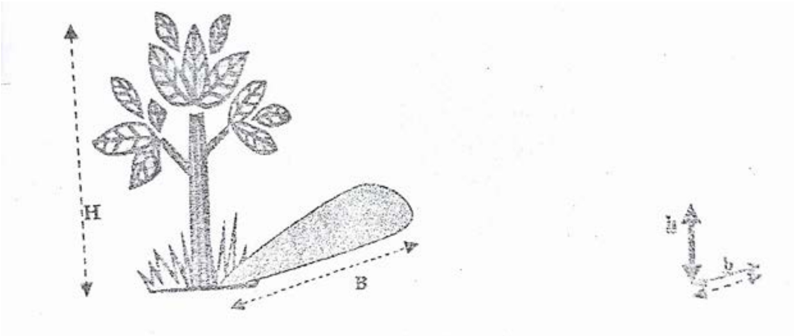


Phương pháp đo cây sau đòi hỏi phải có một khoảng đất trống vừa đủ rộng. Các bước thực hiện như sau:

- Gọi chiều cao của cây là H.
- Cắm 1 cây sậy có chiều cao là h cách gốc cây một khoảng sao cho có thể lấy số đo.
- Nằm xuống và ngắm sao cho ngọn cây trùng với đỉnh của gậy. Bây giờ mắt người, đỉnh gậy và ngọn cây thẳng hàng.
- Gọi đoạn từ vị trí đặt mắt đến gốc cây là D, từ mắt đến nơi cắm gậy là d. Theo định lí Thales, ta có: $\frac{H}{h}=\frac{D}{d}$.

Vậy chiều cao của cây là: $H=\frac{h.D}{d}$.

Cách 2 *(Phương pháp dùng gậy và bóng nắng)*



Nếu có ánh mặt trời, ta đo chiều cao bằng cách cắm một gậy xuống đất, đo chiều dài của bóng cây và bóng gậy in trên mặt đất. Gọi:

- H là chiều cao của cây muốn đo.
- B là chiều dài của bóng cây.
- h là chiều cao cây gậy.
- b là chiều dài của bóng cây.

Theo định lí Thales, ta có: $\frac{h}{H}=\frac{b}{B}\Rightarrow H=\frac{h.B}{b}$.

Cách 3 *(Phương pháp "Cách ngắm của Hoạ sĩ")*

- Đặt dưới chân mục tiêu (ở đây là cây) cần đo một cây gậy chuẩn (hay một người đứng ngay chỗ mục tiêu) mà ta đã biết rõ chiều cao.
- Đứng cách xa mục tiêu một khoảng cách gấp $2-3$ lần chiều cao phỏng đoán của mục tiêu.
- Cầm một cây que hoặc một cây bút dang thẳng tay ra đằng trước.
- Bấm ngón tay trên que để ghi dấu chỗ trên mặt đất.
- Sau đó, chúng ta đo ướm dần lên xem mục tiêu cao hơn vật chuẩn mấy lần.
- Nhân chiều cao của vật chuẩn với số lần đó thì ta có chiều cao mục tiêu.

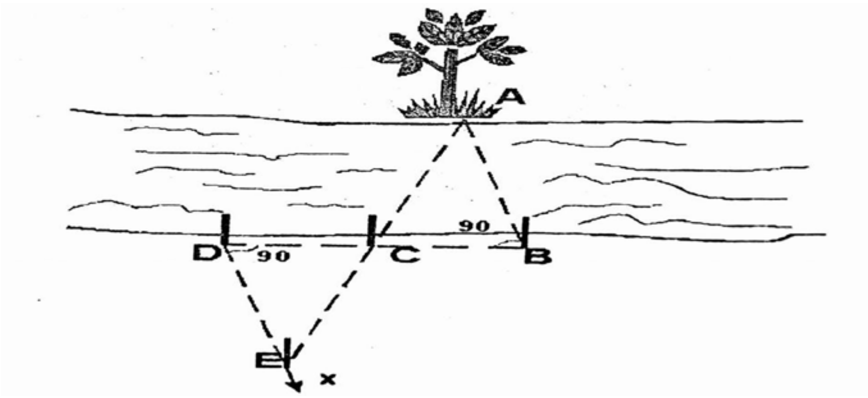
Nhận xét

Ta hoàn toàn áp dụng được các phương pháp đo chiều cao của cây đối với chiều cao của Kim tự tháp.

Ví dụ 3

Làm thế nào để đo được chiều rộng của một con sông?

Cách 1 *(Phương pháp hai tam giác vuông bằng nhau)*



- Ta chọn một điểm gốc A bên kia mép bờ sông, đối diện bờ sông bên này ta đóng một cọc B sát bờ.

Từ B ta xoay một góc 90^0 rồi đo 1 điểm bất kỳ để đóng cọc C, kéo dài BC chọn điểm D sao cho $CB = CD$.

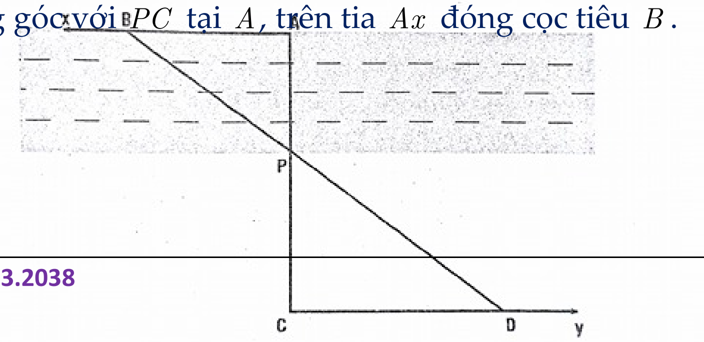
- Tại D kẻ một tia Dx vuông góc với BD (góc vuông tại D)
- Trên tia Dx xác định điểm E sao cho A, C, E thẳng hàng.
- Ta có hai tam giác vuông $\Delta ABC = \Delta EDC$. Vậy $AB = ED$.
- Đo ED chính là khoảng cách AB (chiều rộng bờ sông) cần tìm.

Cách 2 *(Phương pháp tam giác đồng dạng)*

- Chọn một điểm P sát bên kia bờ sông, đối diện sát bờ sông bên này đóng một cọc A.

Từ PA ta nối dài đóng một cọc tiêu C.

- Kẻ tia Ax vuông góc với PC tại A, trên tia Ax đóng cọc tiêu B.



- Kẻ tia Cy vuông góc với PC tại C, trên tia Cy xác định cọc tiêu D sao cho P, B, D thẳng hàng. (Xem hình vẽ).
- Hai tam giác PAB và PCD đồng dạng. Nên theo định lí Thales ta có:

$$\frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow PA = \frac{PC.AB}{CD}.$$

C. LỜI BÌNH

Định lí Thales là một trong những định lí hình học quan trọng nhất của hình học Euclide. Từ định lí ta có thể rút ra các định lí hình học quan trọng như định lí ba đường trung tuyến, định lí ba đường cao, định lí ba đường phân giác, định lí Céva, Ménélaus, … Định lí Thales còn được ứng dụng trong toán đồ gióng thẳng, một ứng dụng rất quan trọng trong sản xuất và đời sống.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Qua G vẽ GD song song với AB $(D \in BC)$; $GE \parallel AC (E \in BC)$.

a) *Tính tỉ số* $\dfrac{BD}{BC}$?

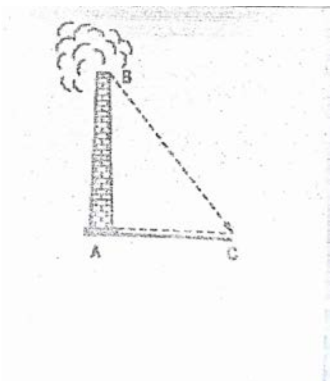
b) *Chứng minh* $BD = DE = EC$.

Bài toán 2

Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Trên cạnh bên AD lấy điểm E sao cho $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{p}{q}$. Qua E kẻ đường thẳng song song với các đáy và cắt BC tại F. Chứng minh rằng: $EF = \dfrac{p.CD + q.AB}{p+q}$.

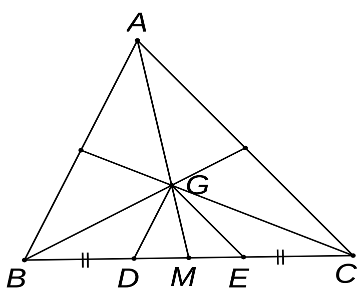
Bài toán 3

Bóng của một ống khói nhà máy trên mặt đất có độ dài là $36{,}9\,m$.
Cũng thời điểm đó, một thanh sắt cao $2{,}1\,m$ cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài $1{,}62\,m$. Tính chiều cao của ống khói (hình vẽ).



E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1



Theo định lí Thales, ta có:

$$\frac{BD}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BD}{BM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} = \frac{CE}{CM} = \frac{CE}{\frac{1}{2}BC}$$

Vậy: a) $BD = \frac{1}{3}BC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$.

b) $BD = EC = \frac{1}{3}BC \Rightarrow DE = BC - \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}BC$.

Vậy $BD = DE = EC$.

Bài toán 2

Sử dụng định lí Thales.

Bài toán 3

$AB \approx 47,8m$.

§4. TIẾT KIỆM TRONG TĂNG GIA SẢN XUẤT

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Tiết kiệm trong tăng gia sản xuất là vấn đề cấp bách trong sinh hoạt, sản xuất và đời sống. Các bác nông dân thì muốn tiết kiệm đất trồng và trồng được nhiều số cây đạt năng suất cao nhất. Các anh chị công nhân thì muốn tiết kiệm nguyên vật liệu, chi phí sản xuất. Trong bài viết này, chúng ta sẽ khám phá cách tiết kiệm chi phí trong tăng gia sản xuất.

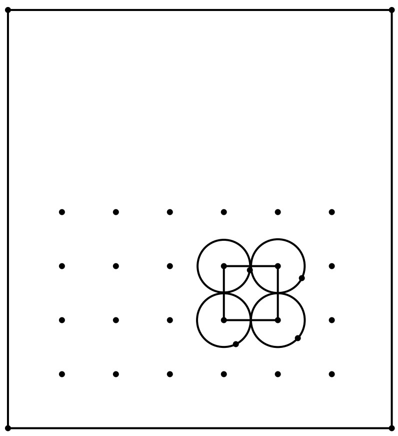
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

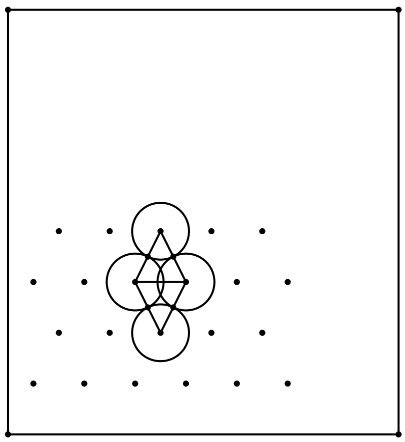
PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Tính diện tích bằng các cách khác nhau, so sánh xem diện tích nào là tối ưu nhất.
- Rút ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 1

Trên một mảnh đất tăng gia trồng xu hào của một nông trường, các bác nông dân muốn trồng xu hào theo cách tiết kiệm đất và đạt số lượng cây trồng nhiều nhất (Tất nhiên không được quên điều kiện cần thiết về khoảng cách giữa hai cây để giúp cây có thể phát triển và cho thu hoạch được). Có hai phương án trồng xu hào được đưa ra như sau:





Hình 1 Hình 2

Hỏi cách trồng xu hào như thế nào là hợp lí nhất?

Chắc nhiều bạn sẽ trả lời các trồng như hình 1 là hợp lí nhất, lợi nhất. Tuy nhiên sự thật không phải vậy. Bằng công cụ hình học sơ cấp, chúng ta sẽ chứng minh được rằng cách trồng ở hình 2 mới là tối ưu theo yêu cầu đề bài.

Thật vậy, giả sử khoảng đất xung quanh mỗi gốc cây để cho cây sống và phát triển là đường tròn có đường kính bằng 1 đơn vị dài. Thế thì, giữa 4 cây trồng có một khoảng đất bỏ phí. Ở hình 1 đó là 1 "tứ giác đều cong" (tứ giác có 4 cung tròn bằng nhau), ở hình 2 là 2 "tam giác đều cong" (tam giác có 3 cung tròn bằng nhau). Ta hãy xét với hai cách trồng thì số đất bỏ phí nào ít hơn.

Diện tích của tứ giác đều cong bằng diện tích hình vuông trừ diện tích hình tròn, nên bằng:

$1-\frac{\pi}{4}$ (đơn vị diện tích).

Diện tích 2 tam giác đều cong bằng diện tích hình thoi trừ đi diện tích hình tròn nên bằng:

$2.\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{4}$ (đơn vị diện tích).

Tỉ số: $\dfrac{1-\frac{\pi}{4}}{\frac{2\sqrt{3}-\pi}{4}}>2,5$,

Vậy diện tích đất bỏ phí trong 4 cây trồng theo hình 1 gấp hơn 2 lần rưỡi diện tích đất bỏ phí trong 4 cây trồng theo hình 2.

Bây giờ ta xét số cây trồng theo cách nào được nhiều hơn. Mới thoạt nhìn chắc các bạn cho rằng trồng theo cách 2 được ít cây hơn vì cứ 2 hàng lại thiệt đi một cây. Nhưng đó chỉ là cách "Bỏ con săn sắt bắt con cá rô" đấy các bạn ạ. Nếu các bạn không tin chúng ta hãy tính thử.

Trong vườn 2, khoảng cách giữa hai hàng ngang là bằng chiều cao của tam giác đều nên bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ đơn vị dài.

Trong vườn 1, khoảng cách giữa hai hàng ngang là 1 đơn vị dài, do đó trồng theo cách 2 lợi được 1 khoảng đất là:

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}=0,134 \text{ (đơn vị dài).}$$

Nói cách khác tức là cứ trung bình khoảng 7 hàng ngang thì cách trồng ở vườn 2 lợi hơn cách trồng ở vườn 1 là 1 hàng.

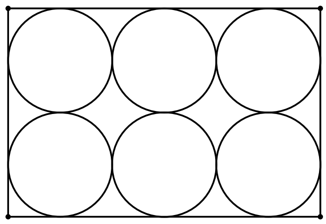
Để cụ thể giả sử số cây trồng mỗi hàng ngang là 15 cây thế thì cứ trồng 7 hàng thì theo cách 2 lợi được 15 cây nhưng phải bỏ bớt đi 3 cây (ở các hàng $2,4,5$) nên còn lợi 12 cây.

Do đó nếu diện tích đất trồng càng rộng thì rõ ràng theo cách 2 (ở hình 2) càng trồng được nhiều cây và càng tiết kiện được đất.

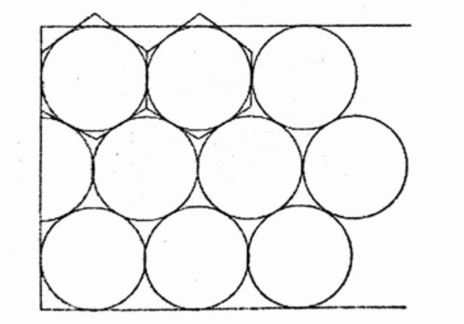
Ví dụ 2

Trong một nhà máy, các anh thợ công nhân cần cắt một tấm tôn $1^m x2^m$ *ra nhiều miếng tròn, đường kính* $0^m,295$. *Bạn hãy cắt sao cho được nhiều miếng tròn nhất?*

Nếu không chịu khó tính toán thì có thể bạn sẽ cắt theo kiểu đơn giản như hình 3 và được 21 miếng tròn. Nhưng nếu suy nghĩ kỹ hơn thì bạn sẽ thấy rằng cắt theo kiểu hình 4 thì lợi hơn và được 26 miếng.



Hình 3



Hình 4

Tại sao cắt theo kiểu hình 4 lợi hơn?

Lia do cũng giống như trồng cây ở ví dụ 1. Như ở đây ta sẽ lập luận hơi khác một chút. Cho d là đường kính của miếng tròn. Trong mỗi ô vuông ở hình 3, tỉ số diện tích sử dụng (tức là tỉ số diện tích miếng tròn so với diện tích ô vuông) bằng:

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 : d^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Nếu tấm tôn khá lớn so với các miếng tròn thì số ô lẻ (ô không tròn) ở rìa là không đáng kể và tỉ số diện tích sử dụng trên toàn tấm tôn bằng xấp xỉ $\frac{\pi}{4} \approx 78,5\%$.

Mặt khác, theo kiểu cắt ở hình 4, ta có thể chia tấm tôn ra từng ô lục giác, trong mỗi ô đó tỉ số diện tích sử dụng là:

$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 : 2\left(\frac{d}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ $(2\left(\frac{d}{2}\right)^2\sqrt{3}$ là diện tích lục giác – bạn nên kiểm tra lại).

Vậy tỉ số diện tích sử dụng theo kiểu cắt này xấp xỉ bằng $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,7\%$.

Do đó cắt theo kiểu thứ hai lợi hơn hẳn so với kiểu thứ nhất.

C. LỜI BÌNH

Cách sắp xếp các hình tròn như hình 4 là "chặt" nhất, vì có thể chứng minh rằng trong mọi cách sắp xếp khác tỉ số diện tích sử dụng đều nhỏ hơn $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Chính vì lí do ấy mà khi sắp xếp các vật tròn (chai, hộp tròn, ống) trong những trường hợp lớn người ta sắp xếp theo kiểu như hình 4 cho lợi chỗ.

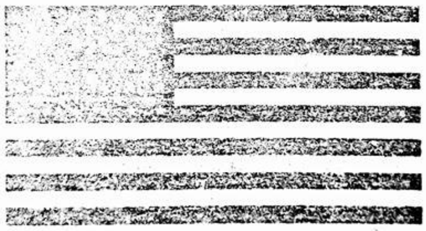
D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Tìm một ứng dụng sắp xếp theo kiểu như hình 4 nói trên tròn thực tế.

Bài toán 2

Ngày 4/4/1918, một đạo luật của quốc hội Hoa Kỳ cho phép thêm một ngôi sao vào lá cờ khi có một bang nữa được nhận vào liên bang. Năm 1959 có 48 *bang. Vì* $48 = 6x8$ *nên các ngôi sao được sắp xếp một cách đẹp đẽ thành* 6 *hàng, mỗi hàng* 8 *sao. Năm 1959 có bang Alaska gia nhập liên bang nên có* 49 *bang. Vì* $49 = 7x7$ *nên các ngôi sao được sắp xếp thành* 7 *hàng, mỗi hàng có* 7 *sao. Năm 1960 có thêm bang Hawaii, trên lá cờ của Hoa Kỳ phải có* 50 *ngôi sao. Vì* $50 = 5x6 + 4x5$ *nên người ta quyết định xếp các ngôi sao thành* 5 *hàng* 6 *ngôi sao, đan xen với* 4 *hàng* 5 *sao, điều này đạt đến sự cân đối trong việc bố trí các ngôi sao như ta thấy trên lá cờ của Hoa Kỳ hiện nay như hình vẽ.*

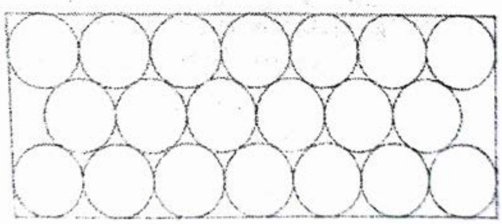


Một câu hỏi xuất hiện một cách tự nhiên là: Người ta sẽ xếp các ngôi sao như thế nào nếu có thêm một bang nữa (51 *bang)?*

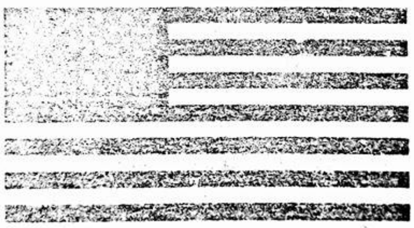
E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

20 điếu thuốc trong bao thuốc là bất kì được sắp xếp theo kiểu hình 4 nói trên.



Bài toán 2



Nếu xếp 51 ngôi sao thành 3 hàng, mỗi hàng gồm 17 ngôi sao thì không đạt yêu cầu cả về phương diện hiện thực lẫn phương diện thẩm mĩ. Phương án xếp các ngôi sao thành từng hàng trong khung hình chữ nhật phải đáp ứng các yêu cầu sau:

1. Số các ngôi sao trong hai hàng liền kề nhau sai khác ít tới mức có thể được, tức là bằng nhau hoặc chỉ hơn kém nhau một ngôi sao.
2. Số các hàng chẵn và số các hàng lẻ sai khác ít tới mức có thể được, tức là số các hàng chẵn bằng số các hàng lẻ hoặc sai khác 1.

Đặt x là số các hàng, mỗi hàng có r sao và y là số các hàng, mỗi hàng có s sao, ta cần có:

$$\begin{cases} xr + ys = 51 \\ r - s = 1 \end{cases}$$

Xảy ra 2 trường hợp:

a) Nếu $x = y$ thì $x(s+1) + xs = 51$.

Suy ra: $x = \dfrac{51}{2s+1}$.

Vì $51 = 3x17$ và x là số nguyên nên mẫu số $2s+1$ chỉ có thể là 1, hoặc 3 hoặc 17 hoặc 51.

Nếu $x = 51$ thì $s = 0$,

Nếu $x = 17$ thì $s = 1$,

Nếu $x = 1$ thì $x = 25$.

Các trường hợp này đều không đạt.

Còn với $x = 3$ thì $s = 8$ kéo theo $y = 3$ và $r = 9$.

Lúc đó, $51 = 3x9 + 3x8$. Lá cờ với 51 ngôi sao có thể được xếp thành 3 hàng 9 ngôi sao và 3 hàng 8 ngôi sao. Ý định này quả thực có thể được chấp nhận để sắp xếp cho lá cờ trong tương lai.

b) Nếu $x - y = 1$ thì phương trình trên trở thành:

$x(s+1) + (x-1)s = 51$ hay $2xs + x = 51 + s$, mà $x = \dfrac{51+s}{2s+1}$ là một số nguyên. Suy ra $2\left(\dfrac{s+51}{2s+1}\right)$ cũng là một số nguyên, tức là $\dfrac{2s+1+101}{2s+1} = 1 + \dfrac{101}{2s+1}$ cũng là số nguyên. Vì 101 là số nguyên tố nên chỉ có thể $s = 50$ hoặc $s = 0$. Cả hai trường hợp này đều bị loại. Như vậy chỉ có thể sử dụng phương án như ở trường hợp a).

Điều gì xảy ra vào thời điểm năm 1960 có thêm bang Hawaii, số bang tăng từ 49 lên 50? Dĩ nhiên có thể sắp xếp 50 ngôi sao thành 5 hàng 10 ngôi sao hoặc 2 hàng 25 ngôi sao, nhưng cả hai phương án đó đều không phù hợp với tính thẩm mĩ.

Sử dụng các biến như đã nêu ở trên, trong trường hợp a), ta có:

$$\begin{cases} xr + ys = 50 \\ r - s = 1 \end{cases}$$

Và $x = y$, suy ra $x(s+1) + xs = 50$ hay $x = \dfrac{50}{2s+1} = \dfrac{2.5.5}{2s+1}$.

Vì $2s+1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên nó chỉ có thể là 5 hoặc 25 từ đó $s = 2$ hoặc $s = 12$.

- Nếu $s = 2$ thì $x = y = 10$ và $r = 3$, điều này tạo ra hình ảnh một khung hình chữ nhật "quá cao", có 10 hàng 3 ngôi sao và 10 hàng 2 ngôi sao!
- Nếu $s = 12$ thì $x = y = 2$ và $r = 13$ thì ta cũng nhận được một phương án không đạt.

Ta xét trường hợp b).

Từ $\begin{cases} xr + ys = 50 \\ r - s = 1 \end{cases}$ và $x - y = 1$ suy ra $x(s+1) + (x-1)s = 50$.

Suy ra $2xs + x = 50 + s$ hay $x = \dfrac{50+s}{2s+1}$ là một số nguyên, nên

$2\left(\dfrac{50+s}{2s+1}\right) = \dfrac{2s+1+99}{2s+1} = 1 + \dfrac{99}{2s+1}$ cũng là số nguyên.

Ta có bảng các giá trị của s, r, x, y như sau:

$2s+1$	3	9	11	33
s	1	4	5	16
r	2	5	6	17
x	17	6	5	2
y	16	5	4	1

Hai cột thứ nhất và thứ tư trong bảng giá trị trên cho phương án không đạt.

Hai cột thứ hai và thứ ba ứng với $50 = 5x6 + 4x5$ chính là phương án sắp xếp lá cờ hiện nay và nó đã được chấp nhận.

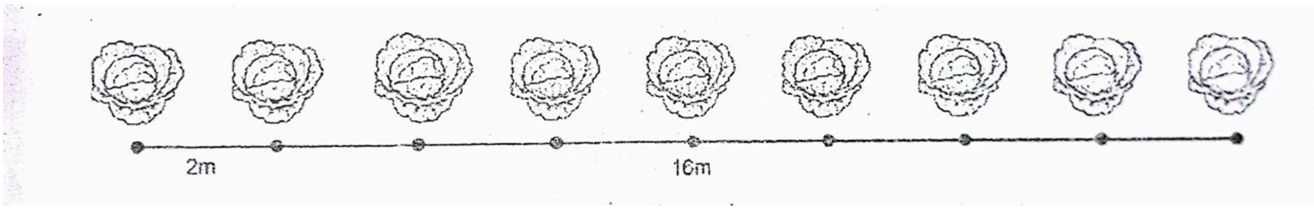
§5. TRỒNG CÂY THẲNG HÀNG TRONG THỰC TẾ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN TOÁN HỌC KHÔNG?

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Trồng cây có ý nghĩa thực tiễn quan trọng: để lọc sách không khí, điều tiết khí hậu, làm đẹp thành phố.

Như vậy trong trồng cây thì có gì liên quan đến toán học? Đương nhiên là có. Có một đề toán đơn giản sau:

Có một đoạn đường vào một khu vườn dài $16\,m$, cứ cách $2\,m$ thì trồng một cây. Hỏi cần trồng mấy cây?



Không cần suy nghĩ lâu cũng dễ thấy: $16 : 2 = 8$ (cây).

Nếu chúng ta chỉ trả lời như vậy thì là sai. Vì chớ quên một cây trồng ở đầu đường nên phải thêm 1 cây nữa.

Như vậy số cây cần phải trồng là: $8 + 1 = 9$ (cây).

Đây mới là đáp án đúng.

Đối với nhiều bài toán trồng cây khác, thì vấn đề trở nên phức tạp. Để giải và hiểu được chúng cần suy nghĩ nhiều.

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

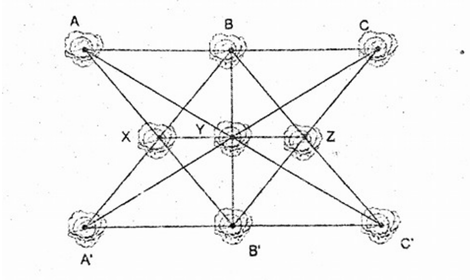
- Nên dựa vào các định lí quen thuộc, các hình vẽ có tính đối xứng, … như định lí Papus, …
- Rút ra lời giải bài toán.

Bài toán 1 *(Bài toán Newton)*

Trong một vườn cây có 9 cây. Hãy trồng thành 10 hàng, mỗi hàng có 3 cây.

Cách 1

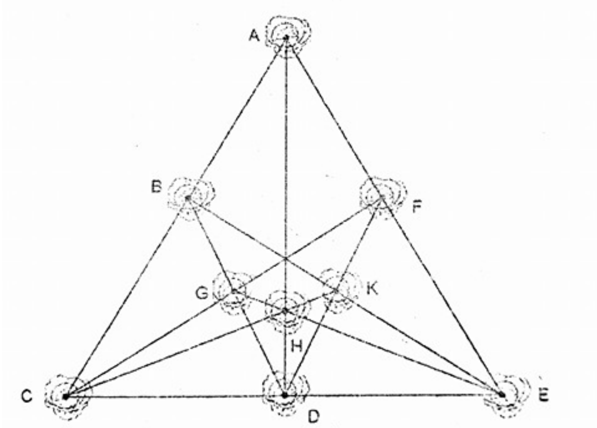
Newton đưa ra cách giải như sau:



Các hàng là: $ABC, AYC', AXB', BXA', BYB', BZC', CYA', CZB', XYZ, A'B'C'$.

Rõ ràng đây là một cách giải thú vị. ngoài cách giải này, chúng ta có cách giải khác như sau

Cách 2



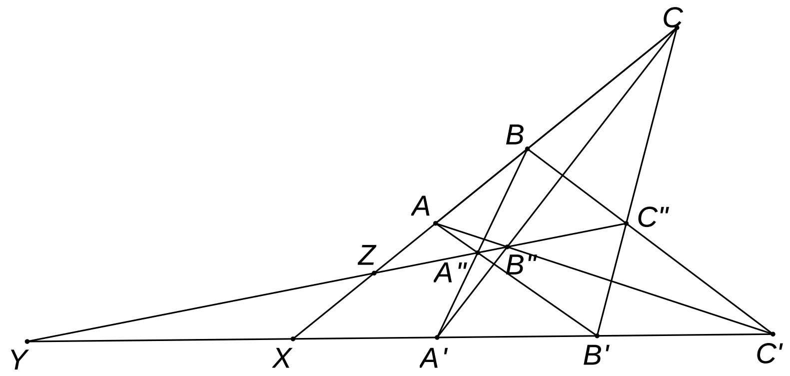
Các hàng là: $ABC, AFE, AHD, CDE, CHK, CGF, BKE, BGD, FKD, EHG$.

Bản chất của các cách trồng cây thẳng hàng này như thế nào? Mỗi cách trồng cây có một cơ sở toán học ẩn chứa đằng sau và các cách giải trên không phải ngoại lệ. Tuy nhiên có nhiều cách giải chỉ đưa ra được đáp án mà chưa tìm được cơ sở toán là bản chất của cách trồng cây vì đó là vấn đề rất phức tạp vượt quá khả năng của chúng tôi.

Cở sở toán của cách 1 trong ví dụ 1 là bài toán sau:

Bài toán 1 *(Định lí Papus)*

Cho hai bộ ba điểm thẳng hàng $A, B, C; A', B', C'$. Gọi giao điểm của AB' và $A'B$ là A''; AC' và $A'C$ là B''; BC' và $B'C$ là C''. Chứng minh rằng ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng.



Trường hợp 1: $A''C''$ *không đi qua* X $(X = AC \cap A'C')$

Kí hiệu $Y = A''C'' \cap A'C'; Z = A''C'' \cap AC$; ta gọi:

$B'' = A''C'' \cap AC'$. Ta cần chứng minh: A', B'', C' thẳng hàng.

Xét tam giác XYZ với đường thẳng đi qua ba điểm thảng hàng A', B'', C'.

A', B'', C' thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{A'X}{A'Y} \cdot \dfrac{B''Y}{B''Z} \cdot \dfrac{CZ}{CX} = 1$ (1)

Xét tam giác XYZ với đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng A', A'', B, ta có:

$\dfrac{A'X}{A'Y} \cdot \dfrac{A''Y}{A''Z} \cdot \dfrac{BZ}{BX} = 1$ (2)

Tam giác XYZ với đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng B', C, C'', ta có:

$\dfrac{CZ}{CX} \cdot \dfrac{B'X}{B'Y} \cdot \dfrac{C''Y}{C''Z} = 1$ (3)

Tam giác XYZ với đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng A, B'', C', ta có;

$\dfrac{AZ}{AX} \cdot \dfrac{B''Y}{B''Z} \cdot \dfrac{C'X}{C'Y} = 1$ (4)

Do A, A'', B' thẳng hàng nên $\dfrac{A''Y}{A''Z} \cdot \dfrac{AZ}{AX} \cdot \dfrac{B'X}{B'Y} = 1$ (5)

Do B, C'', C' thẳng hàng nên $\dfrac{BZ}{BX} \cdot \dfrac{C'X}{C'Y} \cdot \dfrac{C''Y}{C''Z} = 1$ (6)

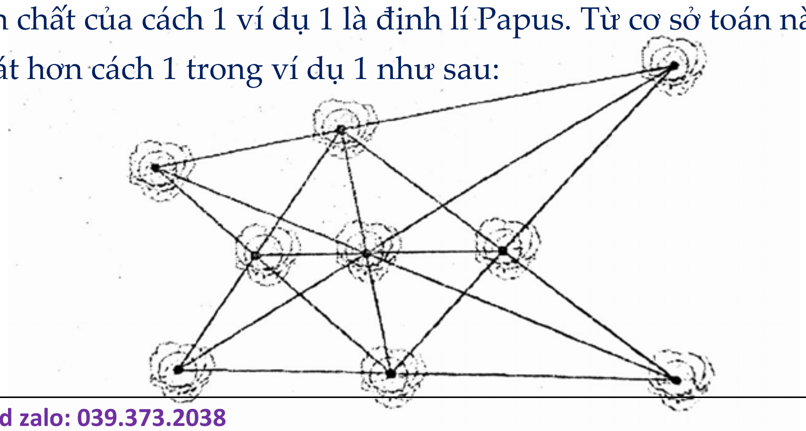
Nhân (2), (3), (4) áp dụng (5), (6) ta suy ra (1)

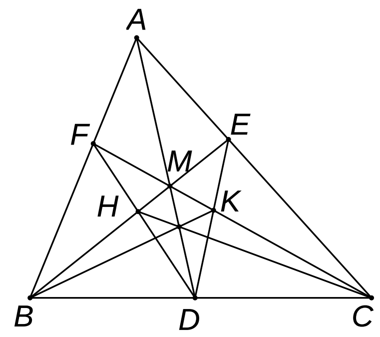
Ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $A''C''$ *đi qua* X

Bạn đọc tự xét trường hợp này.

Như vậy bản chất của cách 1 ví dụ 1 là định lí Papus. Từ cơ sở toán này, chúng ta đưa ra cách giải tổng quát hơn cách 1 trong ví dụ 1 như sau:





Cơ sở toán của cách 2 trong ví dụ 1

Bài toán 2

Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của DE và CM. Gọi H là giao điểm của DF và EM. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Áp dụng định lí Ménélaus cho tam giác AMC (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và tam giác BMA (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D), ta có

$$\frac{KM}{KC}.\frac{EC}{EA}.\frac{DA}{DM}=1, \frac{BH}{HM}.\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}=1$$

Suy ra $\frac{KM}{KC}.\frac{EA}{EC}.\frac{DM}{DA}, \frac{BH}{HM}=\frac{FB}{FA}.\frac{DA}{DM}$ (1)

Áp dụng định lí Céva cho tam giác ABC với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF:

$\frac{CD}{BD}.\frac{BF}{FA}.\frac{AE}{EC}=1$.

Từ đó: $\frac{CD}{BD}=\frac{FA}{BF}.\frac{EC}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=1$.

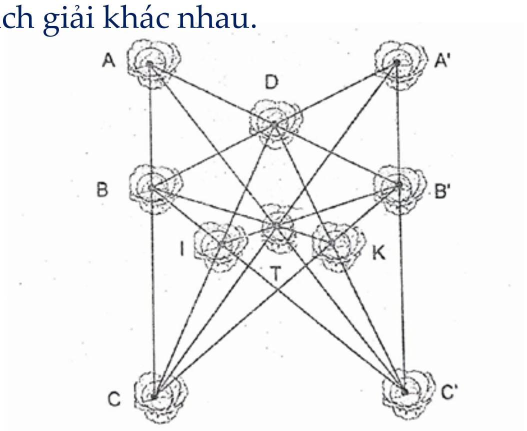
Vậy theo phần đảo của định lí Céva, BK, CH, MD đồng quy, hay AD, BK, CH đồng quy.

Ví dụ 2

Trong một vườn cây có 10 cây. Hãy trồng thành 12 hàng, mỗi hàng có 3 cây.

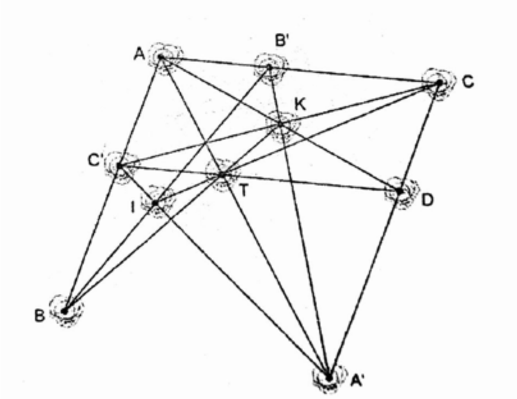
Bài toán nay có nhiều cách giải khác nhau.

Cách 1



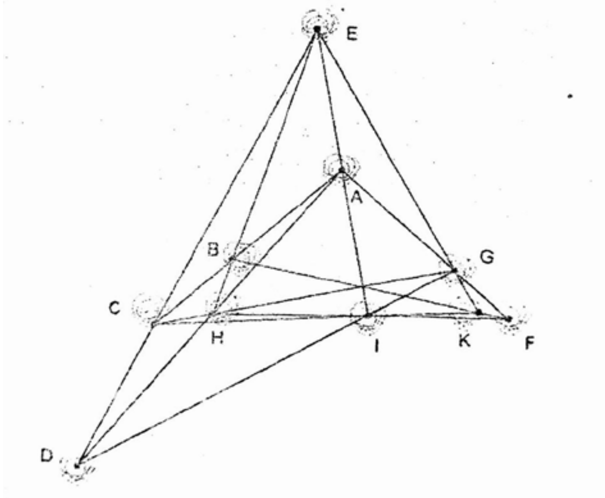
Các hàng là $ABC, ATC', ADB', A'B'C', A'TC, A'DB, DIC, DKC', BTK, BIC', B'TI, B'KC$.

Cách 2



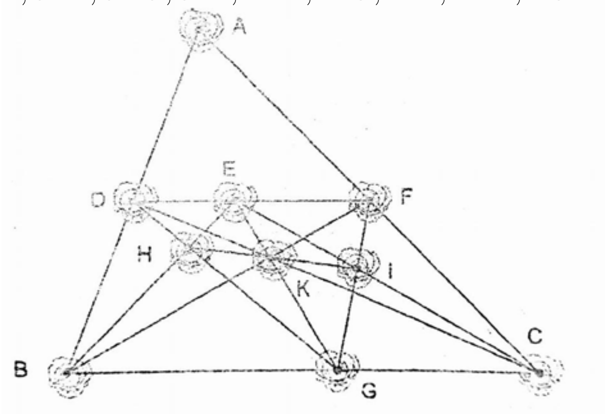
Các hàng là: $AC'B, ATA', AKD, AB'C, B'IB, B'KA', CKC', CTI, CDA', DTC', A'IC', BTK$.

Cách 3



Các hàng là: $EGK, EAI, EBH, CBA, CHG, CIK, DHA, DIG, HIF, BKF, AGF$.

Cách 4

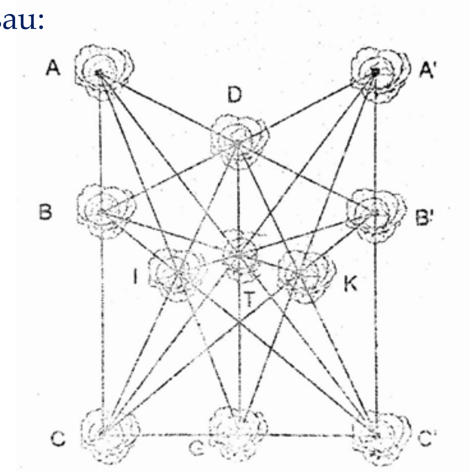


Các hàng là $ADB, AFC, BHE, BKF, BGC, GHD, GKE, GIF, CKD, CIE, HKI, DEF$.

Ví dụ 3

Trong một vườn cây có 11 *cây. Hãy trồng thành* 16 *hàng, mỗi hàng có* 3 *cây.*

Ta có một cách trồng cây như sau:

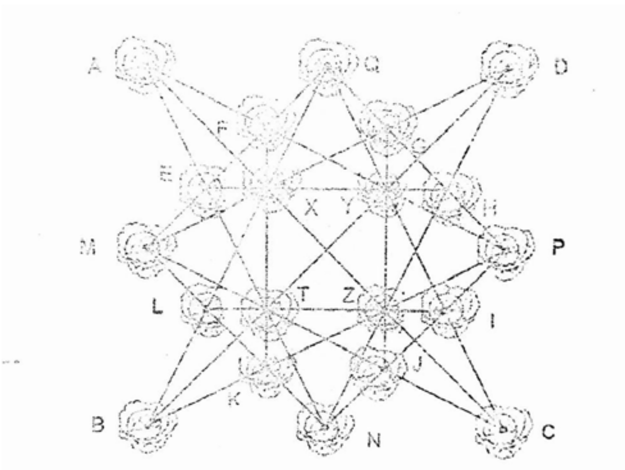


Ta có các hàng là:

$ABC, AIG, ATC', ADB', BDA', BTK, BIC', CID, CTA', CKB', CGC', GTD, GKA', C'KD, C'B'A', B'TI$.

Ví dụ 4 *(Bài toán Same Loaid)*

Trong một vườn cây có 20 *cây. Hãy trồng thành* 18 *hàng, mỗi hàng có* 4 *cây.*



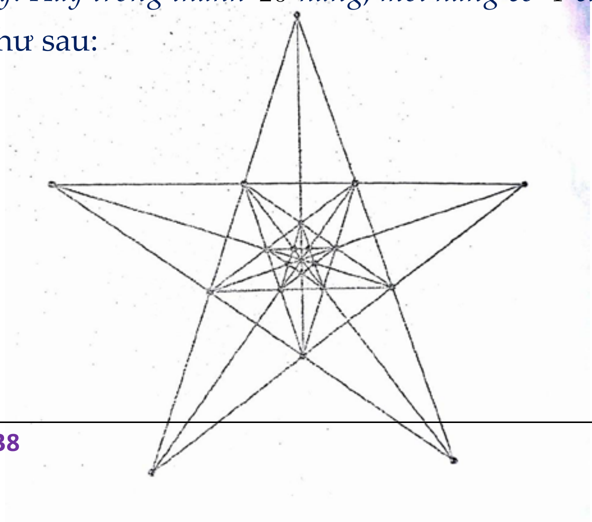
Các hàng là: $AETN, AXZC, AFYP, MEFQ, MXGD, MTJC, MLKN, BLXQ, BTYD, BKZP, NZHD,$ $NJIP, CIYQ, PHGQ, EXYH, LTZI, FXTK, GYZJ$.

Tuy nhiên bài toán Same Loaid có thể làm tốt hơn như sau:

Ví dụ 5

Trong một vườn cây có 20 *cây. Hãy trồng thành* 20 *hàng, mỗi hàng có* 4 *cây.*

Ta có một cách trồng cây như sau:



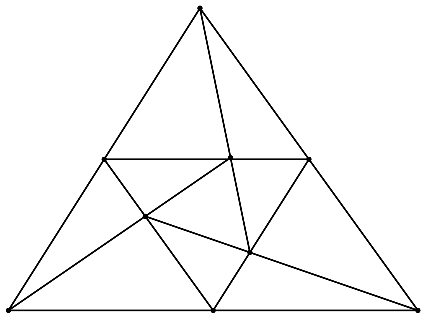
C. LỜI BÌNH

Chúng ta vừa có những khám phá thú vị xoay quanh bài toán trồng cây thẳng hàng. Có ba vấn đề chính đối với bài toán trồng cây thẳng hàng, đó là: Thứ nhất, lời giải của bài toán trồng cây thẳng hàng. Thứ hai, tại sao lại có được lời giải như vậy. Cuối cùng, bản chất toán học của lời giải trồng cây thẳng hàng như thế nào. Đây chính là những vấn đề mà rất nhiều cuốn sách, các bài báo thường ít quan tâm đề cập đến. Nhưng chúng chính là mấu chốt để chúng ta hiểu một cách sâu sắc toàn diện về trồng cây thẳng hàng.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

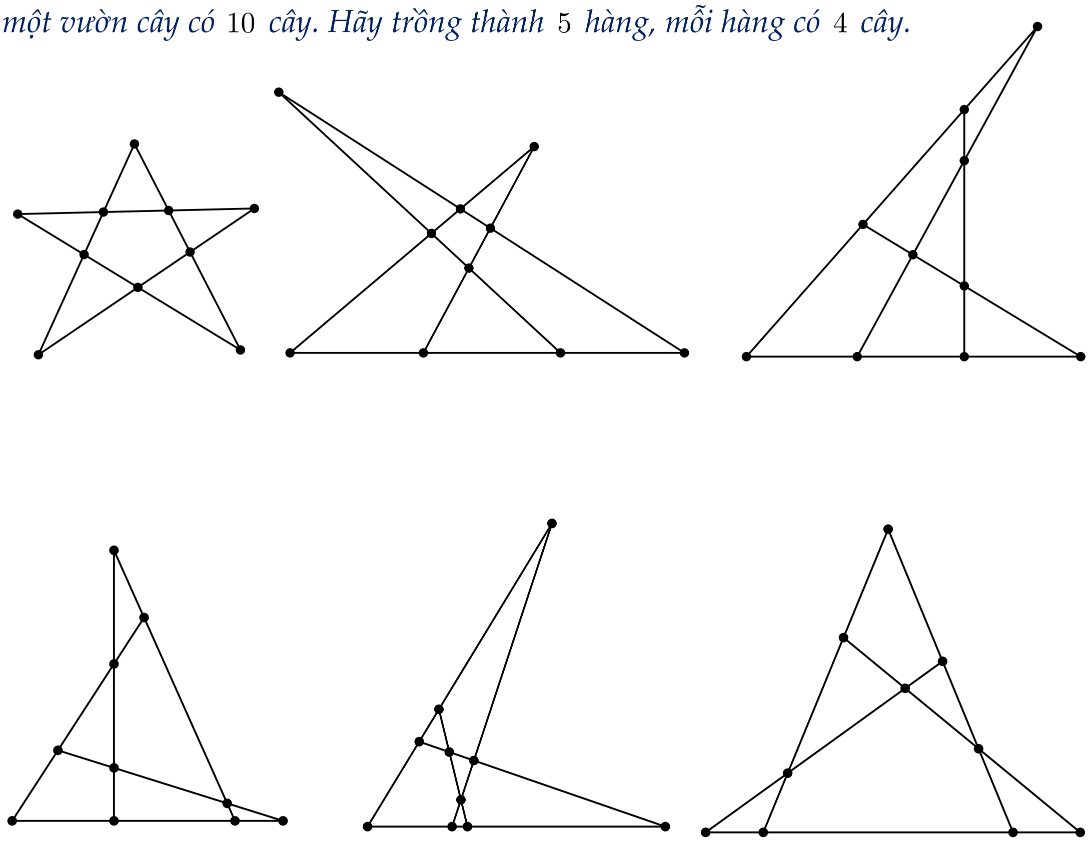
Bài toán 3

Trong một vườn cây có 9 cây. Hãy trồng thành 9 hàng, mỗi hàng có 3 cây.



Bài toán 4

Trong một vườn cây có 10 cây. Hãy trồng thành 5 hàng, mỗi hàng có 4 cây.



E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán3

Bài toán 4

Bài toán này có 6 cách trồng cây như sau:

§6. PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CHỨNG MINH CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Ở bậc Trung học Cơ sở, chúng ta đã được học một số bất đẳng thức quan trọng như bất đẳng thức tam giác, bất đẳng thức Cauchy. Mộ bài toán cực trị hình học đòi hỏi chúng ta phải tìm một giá trị độ dài, diện tích, thể tích, … nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) của một đối tượng hình học có tính chất chung nào đó. Như vậy ta phải so sánh kích cỡ của những hình hoặc vị trí cần khảo sát có tính chất mà bài toán đặt ra. Để giải quyết vấn đề đó người ta hay dùng bất đẳng thức so sánh là đơn giản nhất, hoặc áp dụng các bất đẳng thức nổi tiếng đã biết. Từ những bất đẳng thức hoặc hệ quả của bất đẳng thức ta rút ra những kết luận của bài toán.
Sau đây là các bất đẳng thức cơ bản sẽ sử dụng trong bài viết.

Bất đẳng thức 1

Chứng minh rằng $a^2+b^2\ge 2ab$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Thật vậy $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\ge 0$.

Từ đây ta rút ra hệ quả:

Hệ quả 1

Nếu $a,b\ge 0$ *thì:* $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Bất đẳng thức 2

Chứng minh rằng với 3 *số thực không âm* a,b,c *ta có:*

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\right)\ge 0.\end{aligned}$$

Từ đây, ta rút ra hệ quả:

Hệ quả 2

Nếu $a,b,c\ge 0$ *thì* $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thật vậy, đặt $a = x^3, b = y^3, z = c^3$ thì theo bất đẳng thức 2, ta có

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{3xyz}{3}\right)^3 = x^3y^3z^3 = abc.$$

Bất đẳng thức 3

Chứng minh rằng với 4 *số* a, b, c *ta có* $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức 1, ta có:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + d^4 &\geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 \\ &\geq 2\sqrt{4a^2b^2c^2d^2} \\ &= 4\,|\,abcd\,| \\ &\geq 4abcd. \end{aligned}$$

Từ đây, ta rút ra hệ quả:

Hệ quả 3

Nếu $a, b, c, d \geq 0$ *thì* $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{3}\right)^4$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$.

Thật vậy, đặt $a = x^4, b = y^4, z = c^4, t = d^4$ thì theo bất đẳng thức 3, ta có:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 = \left(\frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{4}\right) \geq \left(\frac{4xyzt}{4}\right)^4 = x^4y^4z^4t^4 = abcd.$$

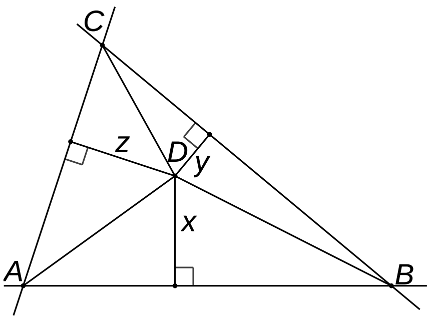
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng các hệ quả 1, 2, 3.
- Rút ra lời giải của bài toán.

Ví dụ 1

Ba con đường cắt nhau tạo ra một tam giác. Trong tam giác đó phải đặt xí nghiệp ở đâu để tổng độ dài các con đường từ xí nghiệp ra các con đường là ngắn nhất?



Giả sử các giao điểm của ba con đường là các đỉnh của một tam giác ABC và $AB \geq BC \geq AC$. Đặt khoảng cách từ điểm D bất kỳ đến các cạnh của tam giác AB, BC, CA lần lượt là x, y và z.

Khi đó diện tích của tam giác ABC bằng tổng diện tích của tam giác ADB, BDC và ADC:

$$S = \frac{1}{2}x.AB + \frac{1}{2}y.BC + \frac{1}{2}z.AC \leq \frac{1}{2}(x+y+z).AB.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức $x + y + z \geq \frac{2S}{AB}$, trong đó dấu bất đẳng thức chỉ xảy ra:

Hoặc khi $z = y = 0$, nếu $AB > BC$,

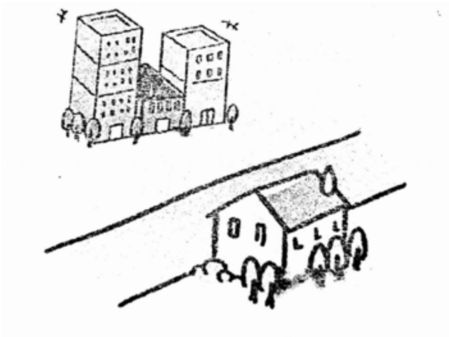
Hoặc khi $z = 0$, nếu $AB = BC < AC$,

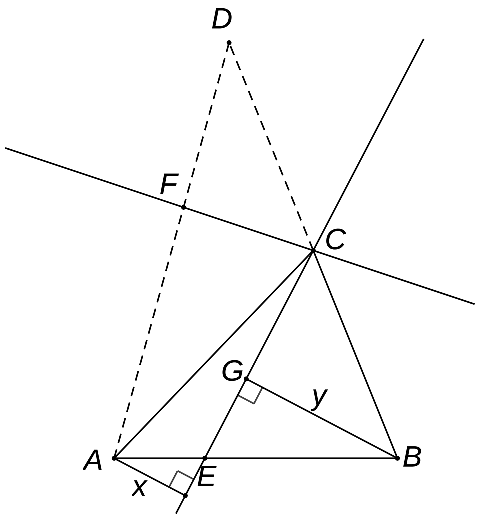
Hoặc khi x, y, z bất kỳ, nếu $AB = BC = AC$.

Như vậy, ứng với các trường hợp ta có kết luận:

- Xí nghiệp phải đặt ở đỉnh đối diện với cạnh lớn nhất.
- Nếu có hai cạnh lớn nhất bằng nhau, thì xí nghiệp đặt ở điểm bất kì trên cạnh nhỏ nhất.
- Nếu cả ba cạnh bằng nhau thì xí nghiệp đặt bất kì đầu trong tam giác kể cả trên một cạnh nào đó.

Ví dụ 2 *(Bài toán mở đường)*





Hãy chọn hướng mở một con đường đi qua thành phố sao cho tổng các khoảng cách từ nó tới hai điểm dân cư đã có là nhỏ nhất.

Giả sử $AC \geq BC$ (C là vị trí thành phố, còn B và A là vị trí của hai điểm dân cư). Gọi D là điểm đối xứng với B qua điểm C. Con đường ta cần tìm có thể cắt đoạn AB tại E hoặc cắt đoạn AD tại F.

1) Trường hợp thứ nhất.

Diện tích $S_{ABC} = S_{AEC} + S_{BEC}$

Nghĩa là $S_{ABC} = \frac{1}{2}x.CE + \frac{1}{2}y.CE = \frac{1}{2}(x+y).CE$

2) Trường hợp thứ hai. Tương tự như phần 1 (x là khoảng

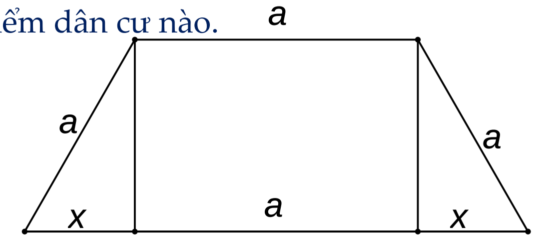
3) cách từ A đến CF, y là khoảng cách từ B đến CF), diện tích $S_{ACD} = S_{AFC} + S_{DFC}$

Nghĩa là: $S_{ACD} = \frac{1}{2}x.CF + \frac{1}{2}y.CF = \frac{1}{2}(x+y).CF$.

Vì vậy giá trị $x + y$ nhỏ nhất khi các giá trị CE hoặc CF tương ứng càng lớn. Độ dài này lớn nhất khi $E \equiv F \equiv A$.

Nếu $AC > BC = DC$ hoặc trường hợp $AC = BC = DC$ thì con đường đi qua B hoặc đi qua A đều như nhau.

Kết luận: Con đường phải đi qua điểm dân cư cách thành phố xa hơn, còn nếu thành phố C cách đều hai điểm dân cư thì con đường đi qua bất cứ điểm dân cư nào.



Ví dụ 3 *(Bài toán đào mương)*

Người ta đào một con mương với thiết diện cắt ngang là một hình thang cân, đáy và cạnh bên có cùng độ dài là a. Độ dài của đáy lớn (bề ngang của mặt mương) hình thang là bao nhiêu để diện tích của mặt cắt là lớn nhất (cho lưu lượng nước thoát qua lớn nhất).

Đặt x là độ dài của hình chiếu cạnh bên hình thang xuống đáy lớn (bề rộng mương). Khi đó:

$$S = \frac{1}{2}(a + a + x + x).\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hay: $S^2 = (a + x)^3(a - x)$

Hoặc: $S^2 = \frac{1}{3}(a + x)(a + x)(a + x)(3a - 3x), 0 < x < a$.

Áp dụng hệ quả 3 ở trên ta có:

$$\frac{1}{3}(a + x)(a + x)(a + x)(3a - 3x)$$
$$\le \frac{1}{3}\left(\frac{a + x + a + x + a + x + 3a - 3x}{4}\right)^4$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^4 = \frac{27}{16}a^4.$$

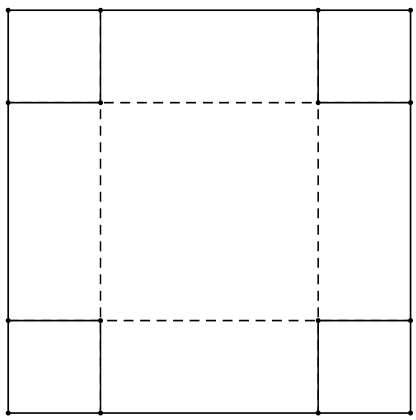
Vậy $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ khi $x = \frac{a}{2}$.

Lúc này, cạnh lớn của hình thang có chiều dài là $2a$, góc nhọn của nó là 60^0.

Ví dụ 4

Từ một miếng bìa hình vuông cạnh a, người ta cắt bốn góc những hình vuông bằng nhau sao cho phần còn lại của miếng bìa theo những đường chấm thành một hộp có thể tích lớn nhất (hình vẽ).

Nếu ta ký hiệu y là thể tích của hình hộp chữ nhật, còn x là đường cao của hộp, thì: $y = (a - 2x)^2 x$.



Ta có: $y = \frac{1}{4}(a - 2x).(a - 2x).4x$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{a - 2x + a - 2x + 4x}{3}\right)^3$$
$$= \frac{2a^3}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{a}{6}$.

Kết luận: thể tích hình hộp lớn nhất là $\frac{2a^3}{27}$ khi $x = \frac{a}{6}$.

C. LỜI BÌNH

Ở bậc Trung học cơ sở, số lượng bất đẳng thức được học chưa nhiều, chủ yếu là bất đẳng thức ta, giác, bất đẳng thức Cauchy và các dạng thức bình phương của một biểu thức lớn hơn hoặc bằng 0. Tuy nhiên chỉ cần vậy thôi thì số lượng các bài toán thực tế được chứng minh bằng các bất đẳng thức này đã là rất phong phú rồi. Mỗi bài toán thực tế khác nhau mang lại cho chúng ta nhiều cảm nhận thật thú vị, bổ ích. Toán học thật có nghĩa. Những bài toán thực tế minh chứng một điều rằng Toán không chỉ là các công thức trừu tượng khô khan, không có ý nghĩa, người làm toán chỉ là "tự sướng" với các công trình của mình mà toán học mang đến trong cuộc sống nhiều ứng dụng bổ ích và rất cần thiết trong cuộc sống này.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Bên cạnh một con sông đào thẳng người ta phải làm một khu vườn hình chữ nhật có diện tích cho trước S. Người ta muốn rào khu vườn bằng hàng rào ngắn nhất là bao nhiêu? Biết rằng về phía sông thì không phải làm hàng rào.

Bài toán 2

Từ tất cả hình chữ nhật với chu vi đã cho, thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

Bài toán 3

Trong một đường tròn cho trước, hãy nội tiếp một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Ta kí hiệu x là độ dài của cạnh khu vườn mà nó vuông góc với con kênh. Khi đó độ dài của hàng rào được tính: $P = 2x + \frac{S}{x}, x > 0$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $P \ge 2\sqrt{2x.\frac{S}{x}}$.

Như vậy P đạt được giá trị nhỏ nhất là $P_{\min} = 2\sqrt{2S}$ khi $2x = \frac{S}{x}$, nghĩa là $x = \sqrt{\frac{S}{2}}$. Từ đây ta cũng tính được cạnh kia của hình chữ nhật.

Bài toán 2

Đặt $2a$ là chu vi đã cho của những hình chữ nhật. Khi đó tổng $x + y$ của hai cạnh hình chữ nhật x và y là một đại lượng không đổi a, nhưng diện tích xy là một biến số, mà ta muốn có giá trị lớn nhất.

Trung bình cộng của hai đại lượng là $m = \frac{x+y}{2}$.

Ta kí hiệu $d = \frac{x-y}{2}$, ta nhận được $x = m + d, y = m - d$.

Vì vậy: $xy = (m+d)(m-d) = m^2 - d^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - d^2$.

Vì d^2 là một số dương nên ta có: $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, ở đây dấu bằng thì xảy ra khi $d = 0$ hoặc là $x = y = m$.

Bài toán 3

Gọi bán kính đường tròn là R và cạnh AB của hình chữ nhật cần tìm là x. Theo định lí Pythagore, ta có: $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$, từ đó suy ra biểu thức của diện tích S là $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Hàm số này và hàm số $y = S^2$ đạt giá trị cực đại với cùng một giá trị của x. Mà

$y = x^2(4R^2 - x^2)$.

Đặt $x^2 = z$, ta có: $y = z(4R^2 - z) = -z^2 + 4R^2z$.

Nghĩa là $y_{\max}$ đạt được khi $z = 2R^2$ tức là khi $x = R\sqrt{2}$.

Ta nhận thấy rằng khi $AB = x = R\sqrt{2}$ thì $BC = R\sqrt{2}$, ta nhìn thấy hình chữ nhật cần tìm là hình vuông. Hay ta có kết luận: *"Trong các hình chữ nhật nội tiếp cùng một đường tròn thì hình vuông có diện tích lớn nhất"*.

§7. ĐỐI XỨNG TRỤC VÀ CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN .

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Đối xứng trục là chủ đề quan trọng trong toán học, nghệ thuật.

Các con vật thường có hình hài đối xứng hai bên. Chẳng hạn như con bướm sau:

Các viên gạch lát nền, các loại xe như xe máy, ô tô hay thậm chí là máy bay đều có gấu trúc đối xứng. Các loài vật, các loại xe, các phương tiện đi lại có cấu trúc đối xứng vì nó phải đảm bảo tính cân bằng thuận tiện cho việc đi lại.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ nghiên cứu một vấn đề khác của đối xứng trục, đó là dùng đối xứng trục trong chứng minh các bài toán thực tiễn.

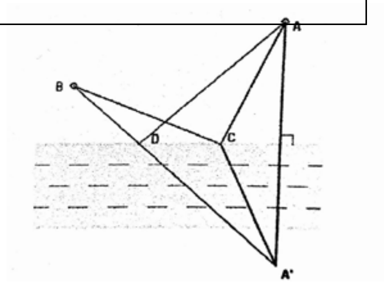
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG BÀI TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Lấy đối xứng của điểm cố định (hình cố định) qua đường thẳng đươc điểm ảnh (hình ảnh).
- Nối điểm ảnh với điểm cố định hoặc các điểm cảnh với nhau.
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1 *(Bài toán trạm cấp nước)*

Có hai điểm dân cư cùng phía bên cạnh một dòng sông. Người ta muốn xây dựng một trạm cung cấp nước lấy từ dòng sông và qua xử lí cung cấp cho hai điểm dân cư nói trên. Vậy phải đặt trạm xử lí nước tại điểm nào trên bờ sông để độ dài đường ống dẫn nước từ đó tới hai điểm dân cư là nhỏ nhất?



Trong thực tế đường ngắn nhất giữa hai điểm dân cư là đường thẳng nối hai điểm đó. Nhưng bài toán ra là đường ống nối hai điểm dân cư với một điểm xử lí nước trên bờ sông. Vậy đường ống phải là đường gấp khúc. Giả sử hai điểm dân cư ở hai phía khác nhau của bờ sông thì bài toán trở nên quá dễ, vì đường nối hai điểm có cắt dòng sông và điểm cắt đó chính là trạm xử lí nước. Bài toán của chúng ta là hai điểm dân cư cùng một phía bờ sông, nên chúng ta giả sử một điểm dân cư được chuyển sang bên kia bờ sông. Câu hỏi được đặt ra là điểm dân cư được chuyển sang bên kia sông ở vị trí nào là thích hợp nhất? Để đảm bảo tính chất của điểm dân cư ta chuyển sang phải có khoảng cách từ đó đến dòng sông là như nhau. Hay nói cách khác ta lấy điểm đối xứng của một điểm dân cư. Gọi A, B là hai điểm dân cư. Điểm A' đối xứng với B qua dòng sông. Đường nối $A'B$ cắt bờ sông ở D. Điểm D chính là nơi đặt trạm xử lí nước.

Thật vậy với mọi điểm C khác D, ta có:

$$CA + CB = CA' + CB > A'B = DA' + DB = DA + DB.$$

Ví dụ 2 *(Bài toán trạm cấp xăng)*

Đường quốc lộ và đường ống dân đầu cắt nhau một góc nhỏ hơn 45^0, trong góc này có một bãi đỗ các ô tô của xí nghiệp vận tải. Xây trạm cung cấp xăng ở vị trí nào trên đường ống để các loại xe xuất phát từ bãi đỗ xe đến lấy xăng rồi ra đường quốc lộ với đường đi ngắn nhất.

Ta thấy điểm dân cư A và điểm lối thoát ra đường quốc lộ nằm cùng một phía đường ống dẫn đầu. Tương tự như ví dụ 1, ta lấy điểm B đối xứng với điểm A qua đường ống dẫn dầu.

Từ điểm B hạ đường vuông góc xuống đường quốc lộ, đường ta vừa hạ sẽ cắt đường ống dẫn dầu tại D, có chân đường vuông góc tại C. Điểm D chính là nơi ta xây trạm cung cấp xăng và đoạn đường $AD + DC$ là đoạn đường ngắn nhất ta phải mở.

Thật vậy, gọi E là điểm bất kì trên đường ống dẫn dầu, C' là điểm bất kì trên đường quốc lộ. Ta có:

$$AE + EC' = BE + EC' \geq BC' \geq BC = BD + DC = AD + DC$$

(do BC là đoạn đường ngắn nhất từ B đến đường quốc lộ).

Ví dụ 3

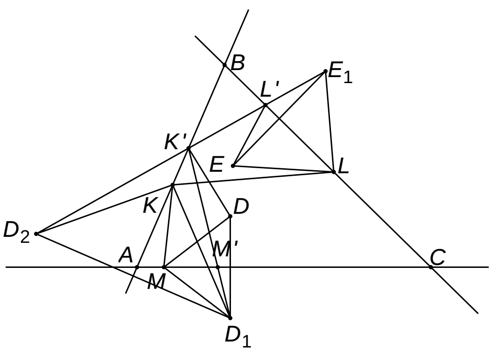
Một mảnh đất hình tam giác nhọn ABC nằm ở vị trí giao nhau của ba con sông. Trong mảnh đất này có hai nhà máy D và E. Tàu chở hàng thả hàng ở ba vị trí M, K, L lần lượt nằm trên các cạnh $AC, AB,$ BC của tam giác ABC. Hãy tìm các vị trí bỏ hàng $M, K.L$ để quãng đường đi từ D đến M, đến K đến L rồi đến E là nhỏ nhất.

Gọi D_1 và E_1 lần lượt đối xứng với D và E qua AC và BC.

Gọi D_2 đối xứng với D_1 qua AB. Nối D_2E_1 và dựng đường gấp khúc $DM'K'L'E$ (hình vẽ).

Ta thấy rằng mọi đường gấp khúc $DMKLE$ đều lớn hơn đường gấp khúc $DM'K'L'E$.

Thật vậy

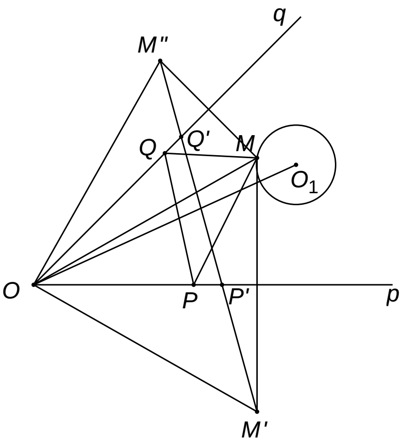


$DM' + M'K' + K'L' + L'E = D_1M' + M'K' + K'L' + L'E = D_2K' + K'L' + L'E_1 = D_2E_1 \le D_2K + KL$
$+ LE_1 = D_1K + KL + LE \le D_1M + MK + KL + LE = DM + MK + KL + LE$.

Hay kết quả ta có: $DM' + M'K' + K'L' + L'E \le DM + MK + KL + LE$ (đpcm).

Ví dụ 4

Trong lòng một con sông rộng có một hòn đảo hình tròn. Người ta muốn xây dựng những bến đỗ cho các tàu chở khách du lịch để chở khách từ đảo lên một bờ rồi nhận khách, đi sang ngay bờ bên kia nhận khách tiếp rồi chở về đảo hoặc ngược lại. Phải đặt các bến ở đâu để đường đi trên sông là ngắn nhất, biết rằng đường thẳng hai bờ sông kéo dài cắt nhau tại O tạo thành một góc nhọn.



Đặt hình tròn là hòn đảo trong góc nhọn Opq giới hạn bởi hai bờ sông. Bài toán đưa ra đi tìm tam giác MPQ sao cho M thuộc đường tròn, P thuộc Op và Q thuộc Oq sao cho chu vi tam giác MPQ nhỏ nhất.

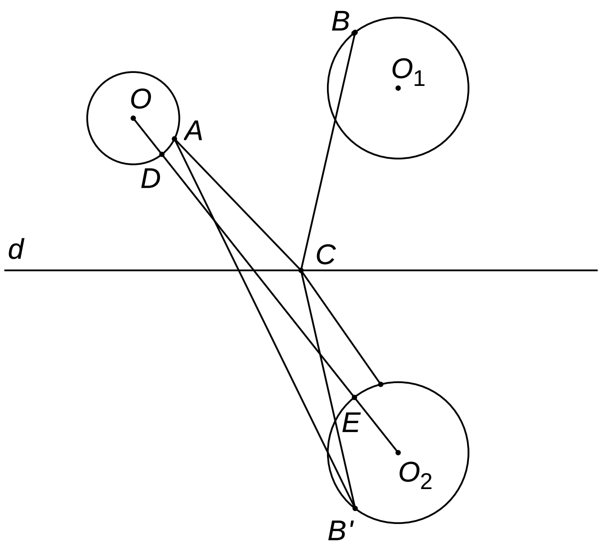
Ta có định điểm bất kì M trên đường tròn và lấy M' và M'' là các điểm đối xứng với M qua Op và Oq. Tìm điểm P thuộc Op và điểm Q thuộc Oq sao cho chu vi tam giác MPQ có chu vi nhỏ nhất. Từ ví dụ 1, ta có kết quả điểm P' và Q' là những giao điểm của $M'M''$ với Op và Oq tương ứng.

Trong trường hợp này chi vi tam giác MPQ trùng với $M'M''$.

Nhưng $M'M''$ là cạnh đáy của tam giác cân $M'M''O$ với một góc cố định ở đỉnh. Suy ra $M'M''$ sẽ nhỏ nhất khi M phải là giao điểm của đường tròn với đoạn thẳng OO_1, ở đây O_1 là tâm đường tròn.

Ví dụ 5

Có hai kho chứa xăng hình tròn ở cùng một phía đối với đường quốc lộ. Người ta muốn xây dựng một trạm cung ứng và phân phối xăng bên đường quốc lộ nối với hai đường ống nối tới hai bồn xăng là ngắn nhất.



Gọi (O_2), B' lần lượt là hình tròn và điểm đối xứng với (O_1), B qua d (d biểu trưng cho đường quốc lộ).

Nối CA, CB, CB'.

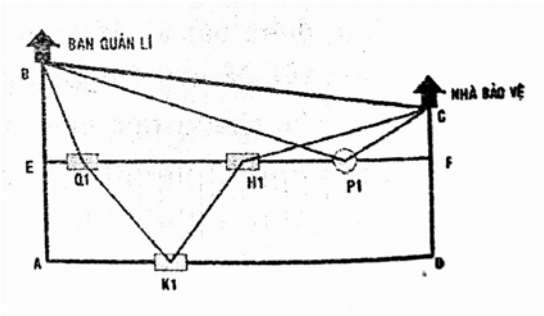
Ta có $CA + CB = CA + CB'$.

Do $CA + CB' \ge AB' \ge DE$ (D, E lần lượt là giao điểm của đoạn OO_2 với các đường tròn $(O), (O_2)$).

Hãy các điểm D và E là các điểm cần tìm. Từ đây suy ra các điểm A, B và C cần tìm. Đó là, điểm A trùng với điểm D, điểm C là giao điểm của DE với d và điểm B'' là điểm đối xứng với điểm E qua d.

Ví dụ 6

Trên một mảnh đất hình thang vuông $ABCD$ người ta xây dựng một sân vận động hình chữ nhật $AEFD$ và 3 ngôi nhà. Nhà bảo vệ C, nhà ban quản lý sân B, nhà tạm nghỉ và thay trang phục P. Kèm theo đó người ta xây dựng hai cửa chính Q, H và cùng một cửa phụ K. Bạn hãy giúp người thiết kế sân tìm vị trí P, Q, H, K sao cho trước và sau mỗi trận thi đấu, người bảo vệ có thể đi theo con đường $C \to H \to K \to Q \to B \to P \to C$ ngắn nhất để làm nhiệm vụ. Theo đó người ta cho xây các cửa P, H, Q, K và con đường BPC. Sơ đồ mảnh đất và vị trí cố định của B, C và các vị trí cần được xác định P, Q, H, K có dạng như hình vẽ.



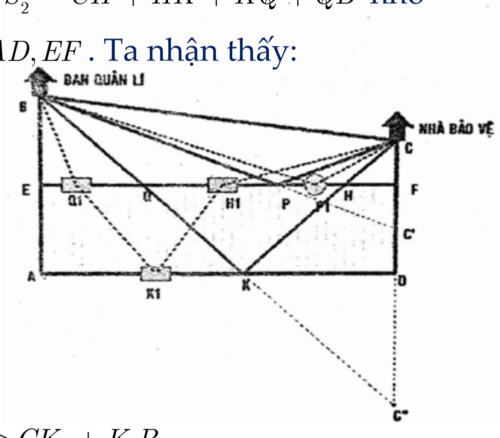
Ta giải bài toán này như sau: Con đường $C \to H \to K \to Q \to B \to P \to C$, sẽ ngắn nhất nếu ta tìm được P, Q, H, K mà $S_1 = PB + PC$ nhỏ nhất và $S_2 = CH + HK + KQ + QB$ nhỏ nhất.

Ta xác định các vị trí P, Q, H, K như sau:

- Gọi C' là điểm đối xứng với C qua EF; gọi C'' là điểm đối xứng với C qua AD.
- Gọi P là giao điểm của BC' và EF; K là giao điểm của BC'' và EF; H là giao điểm của CK và EF.

Việc chứng minh điểm P dựng như trên để S_1 nhỏ nhất đã trình bày trong ví dụ 1. Việc dựng điểm K như trên, cũng như theo ví dụ 1 đã nêu thì mới đảm bảo cho $S = BK + KC$ nhỏ nhất.

Ta sẽ chứng minh các điểm K, Q, H dựng như vậy thoả mãn $S_2 = CH + HK + KQ + QB$ nhỏ nhất. Thật vậy: xét các điểm K_1, Q_1, H_1 bất kỳ lần lượt thuộc AD, EF. Ta nhận thấy:



$$\begin{cases} CH_1 + H_1K_1 \ge CK_1 \\ K_1Q_1 + Q_1B \ge K_1B \end{cases} \Rightarrow CH_1 + H_1K_1 + K_1Q_1 + Q_1B \ge CK_1 + K_1B$$

Theo cách dựng điểm K thì $CK_1 + K_1B \ge KB + KC$

Từ đó suy ra: $CH_1 + H_1K_1 + K_1Q_1 + Q_1B \ge KB + KC$

Dấu "=" trong $CH_1 + H_1K_1 + K_1Q_1 + Q_1B \ge KB + KC$ xảy ra khi và chỉ khi các dấu "=" trong $CH_1 + H_1K_1 \ge CK_1, K_1Q_1 + Q_1B \ge K_1B, CH_1 + H_1K_1 + K_1Q_1 + Q_1B \ge CK_1 + K_1B,$ $CK_1 + K_1B \ge KB + KC$ đồng thời xảy ra. Như vậy K, Q, H dựng như hình trên đảm bảo cho ta S_2 là nhỏ nhất. Tóm lại: $S_1 + S_2 = CH + HK + KQ + QB + BP + PC$, với cách dựng P, Q, H, K như trên thì $S_1 + S_2$ nhỏ nhất. Do các điểm P, K là duy nhất, nên vị trí các điểm P, Q, H, K như trên là duy nhất. Để ý là mảnh đất $ABCD$ là hình thang vuông, sân vận động $AEFD$ là hình chữ nhật nên ta chứng minh được các vị trí P,Q,H,K xác định như trên là thoả mãn các yêu cầu thực tế của bài toán. (Cụ thể là: Q,P,H nằm trên cạnh EF; K nằm trên cạnh AD của hình chữ nhật $ABCD$ và P nằm giữa Q và H).

C. LỜI BÌNH

Chúng ta vừa khám phá bài toán thực tế bằng giải bằng đối xứng trục. Các bài toán tương tự hoá, khái quát hoá đã mang đến cho chúng ta nhiều điều thú vị.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Cho hình vuông $ABCD$. Hãy xác định đường thẳng đi qua tam hình vuông cắt các cạnh đối AD và BC sao cho tổng khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là

a) Lớn nhất

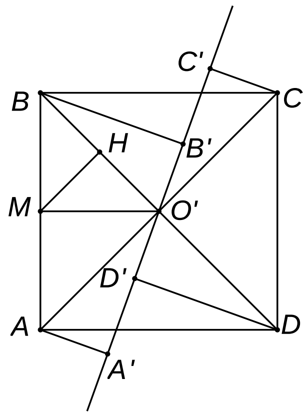
b) Nhỏ nhất.

Bài toán 2

Cho tam giác nhọn ABC. Hãy nội tiếp trong tam giác ABC một tam giác có chu vi bé nhất.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1



Gọi d là đường thẳng qua tâm O' của hình vuông, m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến d.

Xét trường hợp đường thẳng d cắt hai cạnh đối AD và BC. Kẻ AA', BB', CC', DD' vuông góc với d.

Ta thấy $m = AA' + BB' + CC' + DD' = 2(AA' + BB')$.

Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của $A'B'$. Ta có $MN \perp A'B'$ và MN là đường trung bình của hình thang $ABB'A'$ nên $AA' + BB' = 2MN$.

Do đó: m lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất.

m nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất.

a) Ta có $MN \leq MO'$ (không đổi) nên MN lớn nhất.

$\Leftrightarrow N \equiv O' \Leftrightarrow d \parallel AB$.

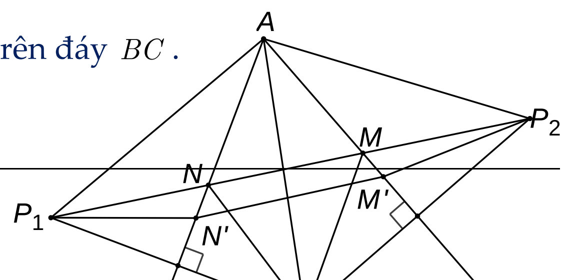
b) Kẻ $MH \perp O'B$, thì ta sẽ chứng minh được $MN \geq MH$ (không đổi) nên MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow N \equiv H$ hay d trùng với BD (hoặc AC).

Tóm lại:

- Nếu d đi qua điểm O' và song song với một trong các cạnh của hình vuông thì tổng khoảng cách từ các đỉnh của hình vuông tới d là lớn nhất.
- Nếu d trùng với một trong các đường chéo của hình vuông thì tổng khoảng cách từ các đỉnh của hình vuông tới d là nhỏ nhất.

Bài toán 2

Xét những tam giác nội tiếp PMN có đỉnh P cố định trên đáy BC.



Lấy P_1, P_2 đối xứng của P qua AB và AC, P_1P_2 cắt AB, AC tại N và M. PMN là tam giác cần dựng vì chu vi tam giác PMN bằng $PN + NM + MP = P_1P_2 < P_1N' + N'M' + M'P_2$ bằng chu vi tam giác $PM'N$.

Như vậy, chúng ta cần phải tìm vị trí P để P_1P_2 là bé nhất.

Do P_1P_2 là đáy tam giác cân AP_1P_2 có $\widehat{P_1AP_2} = 2\widehat{BAC}$ không đổi. Suy ra P_1P_2 đạt giá trị nhỏ nhất khi cạnh bên $AP_1 = AP_2 = AP$ bé nhất khi $AP \perp BC$. Hay AP là đường cao của tam giác ABC.

Tương tự lập luận trên lấy điểm N thuộc AB cố định hay M thuộc AC cố định ta đi đến kết luận chu vi tam giác ABC bé nhất khi CN và BM là các đường cao của tam giác ABC.

Nhận xét

Bài toán này còn có thêm 4 cách giải khác nữa, xin dành cho bạn đọc tìm các cách giải này.

§8. DỰNG HÌNH BÌNH HÀNH TRONG CHỨNG MINH CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Có những bài toán cần dựng thêm điểm phụ là đỉnh của hình bình hành. Việc chỉ ra được điểm phụ sẽ đưa bài toán phức tạp trở nên đơn giản và dễ tìm ra lời giải bài toán hơn rất nhiều. Cách thức dựng các điểm phụ bằng hình bình hành như thế nào? Chúng ta sẽ khám phá những điều này trong bài viết.

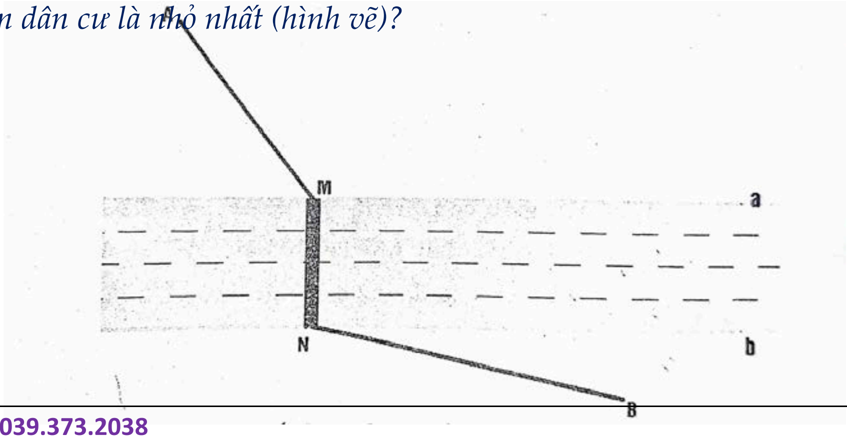
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Dựng hình bình hành hoặc các hình bình hành để tìm điểm phụ cần dựng.
- Rút ra lời giải bài toán.

Ví dụ 1 *(Bài toán vị trí cầu qua sông)*

Hai điểm dân cư nằm về hai phía của một con sông rộng. Người ta muốn xây cầu qua sông (vuông góc với bờ sông) và làm đường nối hai khu dân cư qua chiếc cầu. Phải đặt vị trí cầu ở đâu, để quãng đường giữa hai điểm dân cư là nhỏ nhất (hình vẽ)?



Giả sử nếu con sông rất đẹp, hẹp đến mức hai bờ sông a và b trùng nhau. Di chuyển điểm M, ta tìm được vị trí của M là giao điểm của bờ sông a và đoạn AB (Ta đã biết đây là bài toán quen thuộc: $MA + MB \geq AB \Rightarrow MA + MB$ ngắn nhất khi M là giao điểm của a và đoạn thẳng AB).

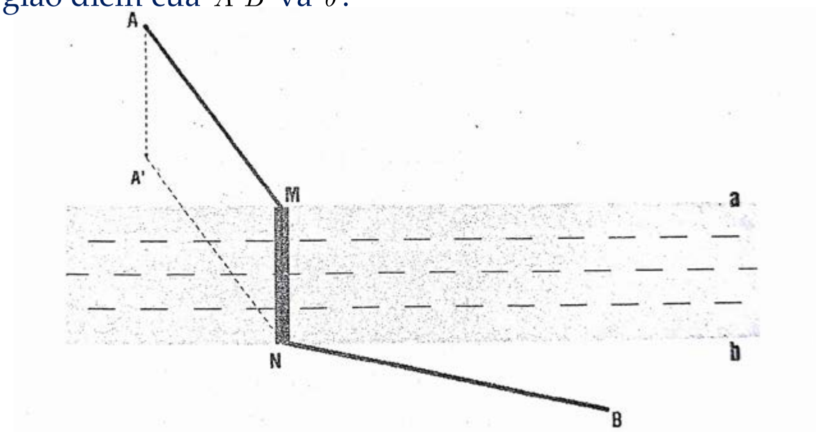
Từ đó ta cần tìm cách đưa ví dụ 1 về bài toán này. Ta làm như sau:

Dựng hình bình hành $AMNA'$: Ta có $AM = A'N$.

Vậy $AM + MN + NB = AA' + A'N + NB$. Do AA' không đổi, nên $A'N + NB$ nhỏ nhất khi N là giao điểm của $A'B$ và bờ sông.

Cách dựng M, N:

- Dựng A' sao cho $AMNA'$ là hình bình hành
- Dựng N là giao điểm của $A'B$ và b.



- Dựng M sao cho NM vuông góc với bờ sông a $(M \in a)$.
- M, N là các vị trí cần tìm.

Ví dụ 2. *Hai xóm A và B cách nhau hai nhánh sông. Tìm địa điểm bắc cầu CD trên nhánh sông đối diện hai với điểm A và địa điểm bắc cầu EG trên nhánh sông đối diện với điểm B sao cho tổng khoảng cách từ A đến C đến D đến E đến G rồi đến B là nhỏ nhất. Biết rằng góc tạo bởi hai nhánh sông là góc nhọn.*

Dựng các hình bình hành $ACDA', BGEB'$.

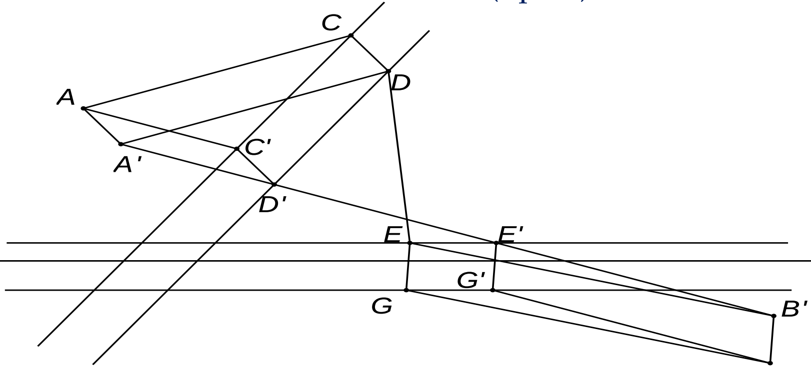
Nối $A'B'$ cắt các nhánh sông tại D' và E' như hình vẽ.

Từ D' và E' ta suy ra C' và G' bằng phép dựng vuông góc.

Ta sẽ chứng minh rằng $C'D'$ và $E'G'$ là các địa điểm cần dựng.

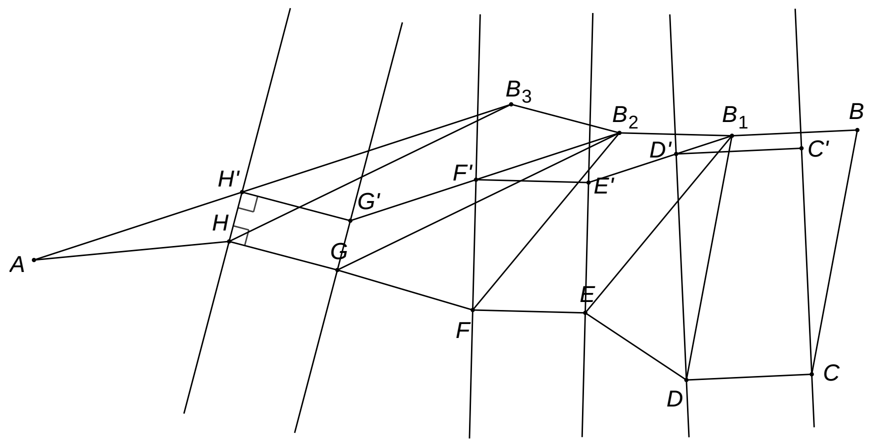
Thật vậy $AC' + C'D' + D'E' + E'G' + G'B = AA' + A'D' + D'E' + E'B' + B'B \leq AA' + A'D + DE + EB' + B'B = AC + CD + DE + EG + GB$.

Hay $AC' + C'D' + D'E' + E'G' + G'B \leq AC + CD + DE + EG + GB$ (đpcm).



Ví dụ 3

Hai điểm dân cư cách nhau ba con sông có lòng sông rộng khác nhau. Hãy bắc các cây cầu và làm đường nối hai điểm dân cư với con đường ngắn nhất (hình vẽ).



Gọi CD, EF, GH là ba cây cầu bất kì bắc qua ba con sông.

Dựng các hình bình hành $BCDB_1, B_1EFB_2, B_2GHB_3$.

Nối AB_3 cắt bờ con sông thứ nhất đối diện với điểm A tại H'. Dựng $H'G'$ vuông góc với bờ sông còn lại của con sông thứ nhất. Nối $G'B_2$ cắt bờ con sông thứ hai đối diện với G' tại F'. Dựng $F'E'$ vuông góc với bờ sông còn lại của con sông thứ hai. Nối $E'B_1$ cắt bờ con sông thứ ba đối diện với điểm E' với D'. Dựng $D'C'$ vuông góc với bờ sông còn lại của con sông thứ ba (hình vẽ). Ta có các cây cầu $H'G', F'E', D'C'$ là các cây cầu cần dựng.

Thật vậy, $AH' + H'G' + G'F' + F'E' + E'D' + D'C' + C'B = H'G' + F'E + D'C' + AH' + G'F' + E'D' + C'B = H'G' + F'E + D'C' + AH' + G'F' + E'B_1 = H'G' + F'E + D'C' + AH' + G'B_2 = H'G' +$

$F'E + D'C' \le AH + HB_3 + HG + FE + DC \le AH + HG + GF + FB_2 + FE + DC \le AH + HG + GF + FE + ED + DB_1 + DC = AH + HG + GF + FE + ED + DC + CB$.

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

C. LỜI BÌNH

Chúng ta vừa có một số khám phá thú vị xoay quanh việc dựng các điểm phụ là đỉnh của hình bình hành trong chứng minh các bài toán thực tế. Các bài toán mở rộng đã mang đến cho chúng ta nhiều điều bổ ích và giúp chúng ta phát triển tư duy sáng tạo. Đây là tư duy quan trọng nhất trong các dạng tư duy.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài toán 1

Hai điểm dân cư cách nhau một số con sông có lòng sông rộng khác nhau. Hãy bắc các cây cầu và làm đường nối hai điểm dân cư với con đường ngắn nhất.

Bài toán 2

Cho điểm A_1 cố định, đoạn C_1D_1 thuộc đường thẳng d có độ dài không đổi chuyển động trên đường thẳng này. Tìm vị trí của C_1D_1 để chu vi tam giác $A_1C_1D_1$ bé nhất.

Bài toán 3

Cho hai điểm A, B cố định nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Đoạn CD thuộc đường thẳng d có độ dài không đổi và chuyển động trên đoạn thẳng này. Tìm vị trí của CD để chu vi tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Xem ví dụ 3.

Bài toán 2

Để chứng minh chu vi của tam giác $A_1C_1D_1$ bé nhất, ta cần chứng minh $A_1C_1 + A_1D_1$ bé nhất.

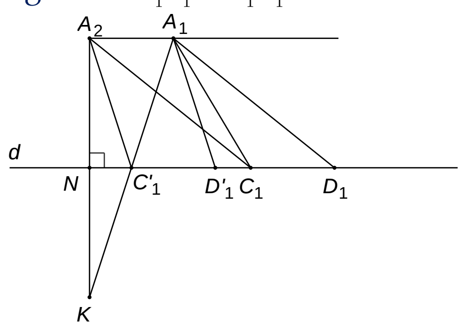
Dựng hình bình hành $A_1C_1D_1A_2$ (hình vẽ).

Gọi K là điểm đối xứng với A_2 qua đường thẳng d.

Nối KA_1 cắt đường thẳng d tại C_1'.

Dựng hình bình hành $A_2C_1'D_1'A_1$.

Ta có



$C_1A_1 + A_1D_1 \geq C_1A_1 + C_1A_2 = C_1A_1 + C_1K \geq A_1K = A_1C_1' + C_1'A_2 = C_1'A_1 + D_1'A_1$.

Dấu "=" xảy ra khi C_1 trùng với C_1'.

Bài toán 3

Dựng hình bình hành $BCDB'$.

Chu vi tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất khi $BC + AD$ nhỏ nhất.

Hay $B'D + AD$ nhỏ nhất.

Theo ví dụ 1, §, hệ thức này nhỏ nhất khi điểm D trùng với D' là giao của EA với d (E là điểm đối xứng của B' qua d).

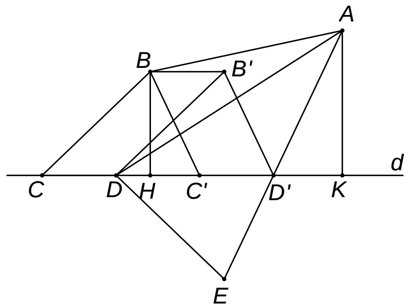
Dựng hình bình hành $BB'D'C'$.

Ta có $BC + AD = B'D + AD = DE + AD$

$\geq AE \Leftrightarrow BC + AD$

$\geq B'D' + AD' = BC' + AD'$.

Dấu "=" xảy ra khi CD trùng với $C'D'$.



§9. DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN THỬA RUỘNG VÀ KHU VƯỜN

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Dạng toán liên quan đến thửa ruộng và khu vườn hình chữ nhật thường bắt gặp nhiều trong thực tế. Thông thường, các đề toán thường yêu cầu tính các cạnh của vườn biết diện tích và chu vi hoặc tính cạnh của hình tam giác khi biết diện tích và chiều cao. Tuy nhiên, dạng toán này sẽ có nhiều thể hiện khác nhau. Chúng ta thường giải bằng cách gọi x và y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật hay là cạnh đáy và đường cao của hình tam giác. Điều kiện $x, y > 0$.

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Gọi $x, y, ...$ là các đại lượng trong đề bài toán.
- Dựa vào giả thiết của bài toán để thiết lập hệ phương trình.
- Giải hệ phương trình.
- Kết luận.

Ví dụ 1

Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi $280\,m$. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng $2\,m$, diện tích còn lại là $4524\mathrm{m}^2$. Tính các kích thước của vườn.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của mảnh đất.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Vì chu vi của khu vườn là $280\mathrm{m}$ nên ta có phương trình:

$$2x + 2y = 280 \Leftrightarrow x + y = 140 \quad (1)$$

Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng $2\,\mathrm{m}$. Nên chiều rộng và chiều dài còn lại là: $x - 2$ và $y - 2$.

Diện tích mảnh đất khi đã làm lối đi là: $(x-2)(y-2) = 4524$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 140 \\ (x-2)(y-2) = 4524 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này và đối chiếu điều kiện của mảnh đất thấy nghiệm là: $\begin{cases} x = 60 \\ y = 80 \end{cases}$.

Vậy chiều rộng của mảnh đất là $60\,\mathrm{m}$ và chiều dài của mảnh đất là $80\,\mathrm{m}$.

Ví dụ 2

Một hình chữ nhật có chu vi $90\,m$. Nếu tăng chiều rộng lên gấp đôi và giảm chiều dài đi $15\,m$ thì ta được hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu. Tính các cạnh của hình chữ nhật đã cho.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của mảnh đất.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Hình chữ nhật có chu vi $90\,\text{m}$ nên có phương trình:

$$2x + 2y = 90 \Leftrightarrow x + y = 45 \qquad (1)$$

Diện tích hình chữ nhật ban đầu và giảm chiều dài đi $15\,\text{m}$ thì ta được hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích ban đầu.

Diện tích hình chữ nhật lúc sau là: $2x(2y-15)$

Theo giả thiết thì: $2x(y-15) = xy$ (2)

Từ (1) và (2) thì ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 45 \\ 2x(y-15) = xy \end{cases}$

Giải hệ phương trình này và sau đó đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \end{cases}$.

Vậy hình chữ nhật có chiều rộng là $15\,\text{m}$ và chiều dài hình chữ nhật là $30\,\text{m}$.

Chiều dài của khu vườn là $80\,\text{m}$, chiều rộng khu vườn là $60\,\text{m}$.

Ví dụ 3

Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích $180m^2$. Tính chiều dài cạnh đáy thửa ruộng, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm $4m$ và chiều cao giảm đi $1m$ thì diện tích không đổi.

Gọi x (m) là cạnh đáy hình tam giác của thửa ruộng.

y (m) là chiều cao của hình tam giác của thửa ruộng.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Diện tích thửa ruộng lúc chưa tăng là: $S = \dfrac{1}{2}xy \ \ (m^2)$.

Theo bài toán ta có: $\dfrac{1}{2}xy = 180 \Leftrightarrow xy = 360$ (1)

Nếu tăng cạnh đáy thêm $4m$ và chiều cao giảm đi $1m$ thì ta có diện tích của thửa ruộng lúc này là:

$$S = \frac{1}{2}(x+4)(y-1) \quad (m^2)$$

Do diện tích không đổi nên:

$$\frac{1}{2}(x+4)(y-1) = 180 \Leftrightarrow (x+4)(y-1) = 360 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 360 \\ (x+4)(y-1) = 360 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này và đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 36 \\ y = 10 \end{cases}$.

Vậy cạnh đáy của thửa ruộng ban đầu là $36\,\text{m}$ và chiều cao cạnh đáy của thửa ruộng ban đầu: $10\,\text{m}$.

C. LỜI BÌNH

Chúng ta vừa có một số khám phá nho nhỏ về tính các cạnh của thửa ruộng, khu vườn hình chữ nhật, hình tam giác. Bằng việc đặt các đại lượng cần tính là x, y, ta đưa về hệ phương trình. Giải hệ phương trình ta có kết luận của bài toán.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Một thửa ruộng hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm $2m$ và chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100m^2$. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Bài toán 2

Nếu giảm chiều dài $20m$ và tăng chiều rộng lên $20m$ của một hình chữ nhật thì diện tích của nó tăng $400m^2$. Biết rằng chu vi của hình chữ nhật này bằng $200m$. Tính diện tích hình chữ nhật.

Bài toán 3

Một miếng đất hình thang cân có đáy nhỏ kém đáy lớn là $3m$, và chiều cao của hình thang cân là $8m$. Nếu gấp đôi đáy nhỏ và thêm đáy lớn $1m$ (giữ nguyên chiều cao) thì diện tích đám đất đó tăng thêm $36m^2$ so với diện tích ban đầu. Tính số đo đáy lớn, đáy nhỏ và cạnh bên của mảnh đất đó.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của thửa ruộng.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Diện tích thửa ruộng là $xy\ \ (m^2)$.

Nếu tăng chiều dài thêm $2m$ và chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100m^2$ nên ta có phương trình: $(x+3)(y+2) = xy + 100$ (1)

Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68m^2$ nên ta có phương trình: $(x-2)(y-2) = xy - 68$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+3)(y+2) = xy + 100 \\ (x-2)(y-2) = xy - 68 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này và đối chiếu điều kiện ta được $\begin{cases} x = 14 \\ y = 22 \end{cases}$ thoả mãn.

Vậy thửa ruộng có chiều rộng là $14m$ và chiều dài là $22m$.

Bài toán 2

Gọi $x\ \ (m)$ và $y\ \ (m)$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật. Điều kiện: $x, y > 0$.

Chu vi hình chữ nhật bằng $200m$ nên

$2(x+y) = 200 \Leftrightarrow x + y = 100 \Leftrightarrow y = 100 - x$.

Diện tích hình chữ nhật là $x.y$.

Nếu giảm chiều dài $20m$ và tăng chiều rộng $20m$ của hình chữ nhật thì diện tích của nó tăng $400m^2$ nên ta có:

$$(x-20)(y+20)=xy+400$$
$$\Leftrightarrow xy+20x-20y-400=xy+400$$
$$\Leftrightarrow 20x-20y=800 \Leftrightarrow x-y=40.$$

Mà $y=100-x$ nên

$$x-(100-x)=40 \Leftrightarrow 2x=140 \Leftrightarrow x=70 \Rightarrow y=30$$

Diện tích hình chữ nhật: $xy=70.30=2100\ (m^2)$.

Bài toán 3

Gọi $x\ (m)$ là đáy bé của hình thang cân,

$y\ (m)$ là đáy lớn của hình thang cân.

Điều kiện: $x,y>0$.

Hình thang cân có đáy nhỏ kém đáy lớn là $3m$ nên ta có phương trình:

$$y=x+3 \Leftrightarrow x-y=-3$$

Khi đó diện tích của hình thang cân là:

$$S=\frac{1}{2}(x+y).8=4.(x+y)=4x+4y.$$

Khi gấp đôi đáy nhỏ và thêm đáy lớn $1m$ (giữ nguyên chiều cao) thì diện tích của miếng đất hình thang cân mới là:

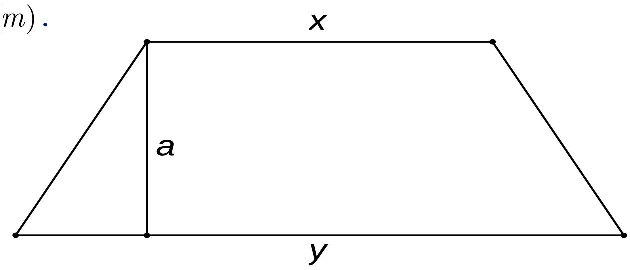
$$S=\frac{1}{2}(2x+y+1).8=4(2x+y+1)=8x+4y+4.$$

Theo giả thiết thì diện tích đám đất có tăng thêm $36m^2$ so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình:

$$8x+4y+4-(4x+4y)=36$$
$$\Leftrightarrow 8x+4y+4-4x-4y=36$$
$$\Leftrightarrow 4x=32 \Leftrightarrow x=8.$$

Vậy đáy nhỏ của miếng đất hình thang cân là $8m$ và đáy lớn của miếng đất hình thang cân là $11m$.

Áp dụng công thức Pythagore (hình vẽ), ta được độ dài cạnh bên của miếng đất hình thang cân là: $\sqrt{8^2+1,5^2}\approx 8,14\ (m)$.



§10. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Có những bài toán thực tế đưa về phương trình bậc hai và bất phương trình bậc hai. Dựa vào công thức nghiệm của phương trình bậc hai: $ax^3 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ta rút ra được các kết quả quan trọng sau:

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ và $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có hai nghiệm kép là: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức nghiệm thu gọn là

Đối với phương trình

$$ax^3 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \text{ và } b = 2b', \Delta' = b'^2 - ac.$$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

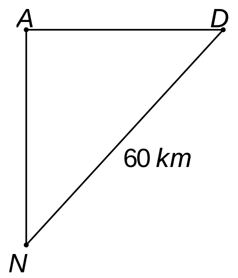
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình $ax^3 + bx + c = 0$.
- Tính Δ, Δ'.
- Áp dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

Ví dụ 1

Sau khi gặp nhau tại một điểm A trên mặt biển, một tàu đi về phía Nam, một tàu đi về phía Đông với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu kia 6 km/h. Hai giờ sau khi gặp nhau, hai tàu cách nhau 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu.



Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu đi về phía Nam, $x > 0$.

Suy ra $x + 6$ (km/h) là vận tốc của tàu đi về phía Đông.

Sau 2 giờ, khoảng cách từ A đến tàu đi về phía Nam là: $AN = 2x$ (km) và khoảng cách từ A đến tàu đi về phía Đông là: $AD = 2(x+6)$ (km).

Tam giác ADN vuông góc tại A nên khoảng cách DN của hai tàu cho bởi: $DN^2 = AN^2 + AD^2$.

Hay ta có

$60^2 = (2x)^2 + [2(x+6)]^2 \Leftrightarrow 3600 = 4x^2 + 4(x^2 + 12x + 36) \Leftrightarrow 8x^2 + 48x - 3456 = 0$.

Ta được phương trình bậc hai: $x^2 + 6x - 432 = 0$.

Giải phương trình ta được $x = 18; x = -24$ (loại).

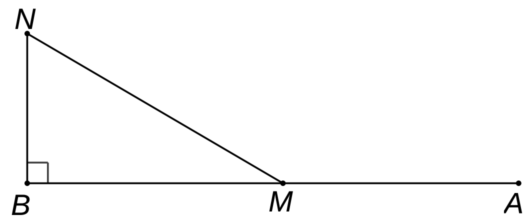
Vậy vận tốc tàu đi về phía Nam là 18 km/h.

Vận tốc tàu đi về phía Đông là 24 km/h.

Ví dụ 2

Hai địa điểm A, B cách nhau $120km$ trên một đường thẳng. Một xe mô tô khởi hành từ A chạy về B với vận tốc $80km/h$. Cùng lúc đó, một xe đạp khởi hành từ B chạy trên đường thẳng vuông góc với AB với vận tốc $10km/h$. Hỏi sau bao lâu khoảng cách giữa 2 xe là ngắn nhất.

Gọi M là vị trí xe mô tô sau khi khởi hành t (h) và N là vị trí xe đạp sau khi khởi hành t (h).



Ta có: $BM = 120 - 30t$.

$BN = 10t$.

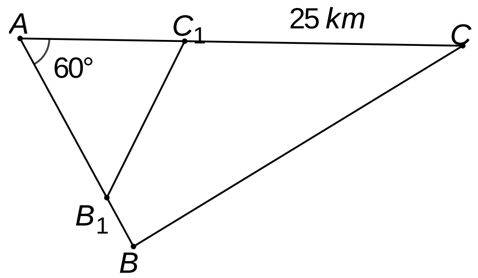
Sử dụng định lí Pythagore, ta được:

$z = MN^2 = 1000t^2 - 7200t + 14400 = 1000(t - 3,6)^2 + 1440$.

Vậy MN ngắn nhất khi $t = 3,6$ (h) $= 3$ giờ 36 phút.

Ví dụ 3

Một ô tô C, một xe đạp B và điểm cố định A đang ở vị trí tạo thành tam giác vuông tại B. Ô tô và xe đạp khởi hành cùng một lúc đi về phía A theo các cạnh của tam giác ABC. Sau khi ô tô đi được $25km$ thì tam giác tạo bởi điểm A, ô tô C, xe đạp B là tam giác đều. Khi ô tô đến A thì xe đạp còn phải đi $12km$ nữa mới đến A. Tìm khoảng cách ban đầu của ô tô và xe đạp.



Góc A của tam giác vuông ABC với góc A là góc của tam giác đều AB_1C_1 là một góc.

Vậy $\widehat{A} = 60^0$.

Giả sử lúc đầu $AC = x$ (km). Vậy $AB = \dfrac{x}{2}$ (km).

Ta có: $BB_1 = \dfrac{x}{2} - (x - 25) = \dfrac{50 - x}{2}$.

Gọi v_1 là vận tốc ô tô; v_2 là vận tốc xe đạp. Ta có: $\begin{cases} \dfrac{25}{v_1} = \dfrac{50 - x}{2v_2} \\ \dfrac{x}{v_1} = \dfrac{x - 24}{2v_2} \end{cases}$

Hệ phương trình này đưa đến phương trình

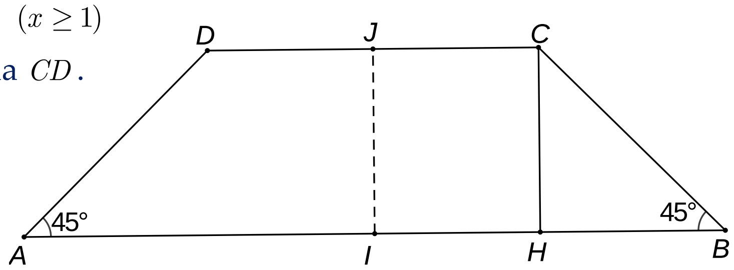
$$x^2 - 25x - 600 = 0,\ 0 < x < 50.$$

Giải phương trình ta được $x = 40$.

Vì $\dfrac{BC}{x} = \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 20\sqrt{3}$ (km).

Ví dụ 4

Người ta phải đắp $100m$ nền của đường ray xe lửa có thiết diện ngang là một hình thang cân, đáy dưới dài $5m$, đáy trên không nhỏ hơn $2m$, độ dốc hai bên bằng 45^0. Tính chiều cao của nền sao cho thể tích đào đắp không nhỏ hơn $400m^3$ và không lớn hơn $500m^3$ đất.



Gọi độ dài của đáy nhỏ của nền là: $CD = 2x \ \ (x \geq 1)$

I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD.

Kẻ CH vuông góc với AB tại H.

Ta có: $BH = BI - IH = 2,5 - x$.

Tam giác CHB vuông cân nên:

$CH = BH = 2,5 - x$.

Diện tích hình thang cân $ABCD$ là:

$$(AB + CD).\frac{CH}{2} = \frac{(5+2x)(2,5-x)}{2}.$$

Thể tích đất đào để đắp là: $\dfrac{100(5+2x)(2,5-x)}{2} \ (m^3)$.

Theo giả thiết, ta có:

$$400 \leq \frac{100(5+2x)(2,5-x)}{2} \leq 500$$

$$16 \leq (5+2x)(5-2x) \leq 20.$$

x thoả hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 - 9 \leq 0 \\ 4x^2 - 5 \geq 0 \end{cases}, x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(2x-3) \leq 0 \\ 2x - \sqrt{5} \geq 0 \end{cases}, x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \leq 0 \\ 2x - \sqrt{5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Đường cao $CH = 2,5 - x$

Vậy $2,5 - \dfrac{3}{2} \leq 2,5 - x \leq 2,5 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy chiều cao của nên phải thoả mãn $1(m) \leq h \leq \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}(m)$.

C. LỜI BÌNH

Chúng ta vừa có một số khám phá xoay quanh việc vận dụng kiến thức về phương trình bậc hai, bất phương trình bậc hai trong giải toán thực tế. Các bài toán tương đối đa dạng về nội dung câu hỏi. Có thể là câu hỏi về tính tối ưu, có thể là câu hỏi về khoảng cách, có thể là câu hỏi tính chiều cao. Qua đó ta có thể nhận thấy, tính phong phú của dạng toán thực tế giải bằng phương trình bậc hai và bất phương trình bậc hai.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

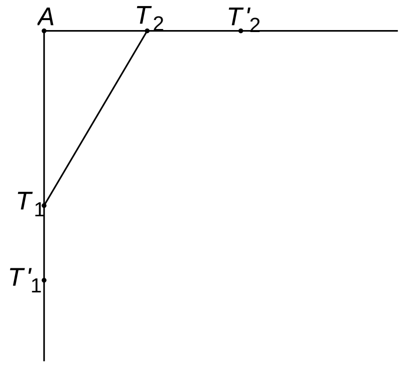
Bài toán 1

Hai chiếc thuyền rời điểm A trên bãi biển cùng một lúc và đi theo hai hướng vuông góc với nhau. Nửa giờ sau, hai thuyền cách nhau $15km$. 15 phút theo đó thuyền thứ nhất cách xa A hơn thuyền thứ hai $4,5km$. Hỏi vận tốc của mỗi thuyền.

Bài toán 2

Cho tam giác ABC vuông góc tại A, đường cao AH. Độ dài $AB = 12m$, độ dài $HC = 12,8m$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài toán 1

Gọi v_1 (km/h) là vận tốc của thuyền 1,

v_2 (km/h) là vận tốc của thuyền 2.

T_1 và T_2 là vị trí của thuyền $1,2$ sau 30 phút.

T_1' và T_2' là vị trí của thuyền $1,2$ sau 15 phút nữa.

Theo giả thiết: $\begin{cases} T_1T_2 = 15 \\ AT_1' - AT_2' = 4,5 \end{cases}$.

Đưa đến hệ: $\begin{cases} v_1^2 + v_2^2 = 900 \\ v_1 - v_2 = 6 \end{cases}$ dẫn đến $v_1^2 + 6v_2 - 432 = 0$.

Giải phương trình ta được $v_2 = 18$ (km/h) thoả mãn bài toán

Vậy vận tốc thuyền 1 là 24 (km/h) và vận tốc thuyền 2 là 18 (km/h).

Bài toán 2

Đặt $BH = x$ (m); $x > 0$.

x là nghiệm của hệ phương trình: $x(x + 12,8) = 12^2$.

Giải phương trình ta được $x = 7,2$.

Đáp số: $AC = 16$ (m); $BC = 20$ (m).

§11. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, ĐƯỜNG CUNG TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

"Độ dài đường tròn" (còn gọi là "chu vi hình tròn") được kí hiệu là C.

Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức

$$C = 2\pi R.$$

Nếu gọi d là đường kính của đường tròn $(d = 2R)$ thì

$$C = \pi d.$$

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính theo công thức

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

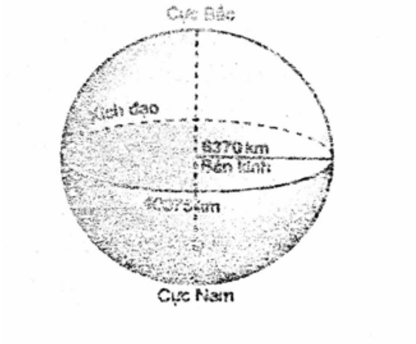
- Sử dụng công thức

$$C = 2\pi R\,;\ C = 2\pi R\,;\ l = \frac{\pi R n}{180}.$$

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1

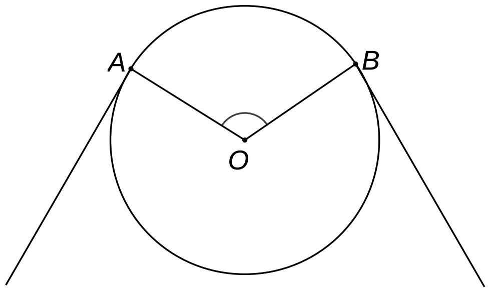
Xích đạo là một đường tròn lớn của Trái Đất có độ dài khoảng 40.076 km. Tính bán kính của Trái Đất.



Sử dụng công thức $R = \dfrac{C}{2\pi}$, ta dễ dàng tính được $R = 6370km$.

Ví dụ 2

Bánh xe của một ròng rọc có chu vi là 540 mm, O là tâm bánh xe. Dây cua-roa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200 mm. Tính góc AOB (hình vẽ).



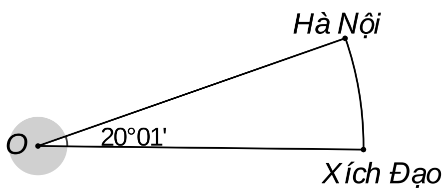
Từ công thức $l = \dfrac{\pi R n}{180}$.

Suy ra $n = \dfrac{180.l}{\pi R} = \dfrac{360.l}{2\pi R}$

$\Rightarrow n = \dfrac{360.200}{540} \approx 133$.

Ví dụ 3

Vĩ độ của Hà Nội là $20^0 01'$. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng 40.000 km. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

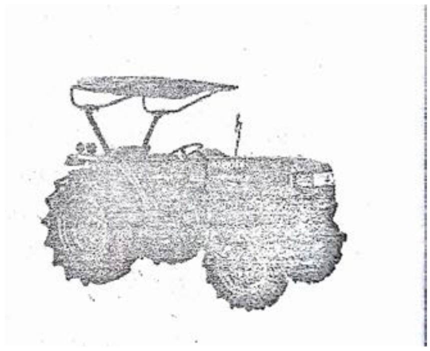


Vĩ độ của Hà Nội là $20^0 01'$ có nghĩa là cung kinh tuyến từ xích đạo đến Hà Nội có số đo là: $20^0 01' = \left(20\dfrac{1}{60}\right)^0$.

Áp dụng công thức: $l = \dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{2\pi R n}{360}$, ta tính được $l \approx 2224$ km.

Ví dụ 4

Máy kéo công nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là $1,672$ m và bánh xe trước có đường kính là 88 cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?



Chu vi bánh xe trước là: $\pi.0,88$ (m).

Chu vi bánh xe sau là: $\pi.1,672$ (m).

Số vòng bánh xe trước lăn được khi bánh xe sau quay 10 vòng là:

$$\frac{10.\pi.1,672}{\pi.0,88} = 19 \text{ (vòng)}.$$

C. LỜI BÌNH

Chúng ta vừa có những khám phá thú vị xoay quanh bài toán đo độ dài đường tròn, cung tròn. Đây là vấn đề thực tế dễ gặp trong cuộc sống vì rất nhiều hình dạng chi tiết máy, các hành tinh, … đều liên quan đến hình tròn. Hình tròn có tính chất đặc biệt là các điểm trên đường tròn thì cách đều tâm. Hình tròn có vô số trục đối xứng nên thường được sử dụng trong thiết kế các hoa văn như gạch men, thảm dệt, …

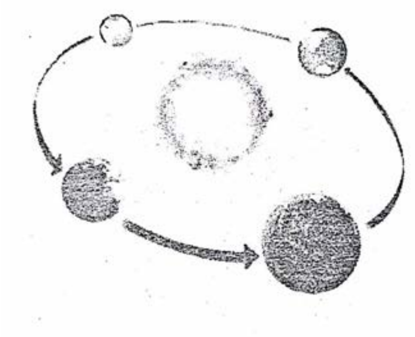
D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Moscow có vĩ độ là 56^0 Bắc. Tìm độ dài kinh tuyến từ Moscow đến Xích Đạo, biết rằng mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn lớn của Trái Đất, có độ dài khoảng $20000\,km$.

Bài toán 2

Trái Đất quay xung quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo gần tròn. Giả thiết quỹ đạo này tròn và có bán kính khoảng 150 triệu kilomet. Cứ hết một năm thì Trái Đất quay được một vòng quanh Mặt Trời. Biết 1 năm có 365 ngày, hãy tính quãng đường đi được của Trái Đất sau 1 ngày (làm tròn đến $10.000\,km$).



E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Cung 180^0 ứng với 20.000 (km), cung 56^0 ứng với x (km).

Vậy $x \approx \dfrac{20000.56}{180} \approx 6222$ (km).

Bài toán 2

Quãng đường đi được của Trái Đất sau một ngày là:

$$\frac{2.3,14.150000000}{365} \approx 2580822 \text{ (km)}.$$

§12. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Diện tích hình tròn và hình quạt tròn có nhiều ứng dụng trong thực tế. Từ việc so sánh diện tích các hình quạt tròn với nhau cho đến tính diện tích phần hình tròn cần tính.

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$.

Hình quạt tròn là một phần của hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 được tính theo công thức

$S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S = \dfrac{lR}{2}$

(l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn).

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng công thức:

$$S=\pi R^2; S=\frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S=\frac{lR}{2}.$$

- Rút ra lời giải bài toán.

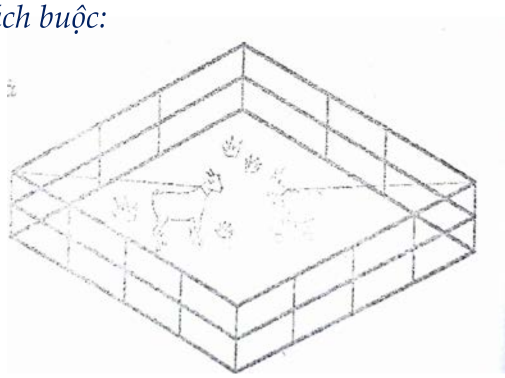
Ví dụ 1

Một vườn có hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=40m, AD=30m$.

Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B. Có hai cách buộc:

- *Mỗi dây thừng dài $20m$.*
- *Một dây thừng dài $30m$ và dây thừng kia dài $10m$.*

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn?



Theo cách buộc thứ nhất thì tổng diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được là:

$$S_1=\frac{1}{4}\pi.20^2+\frac{1}{4}\pi.20^2=200\pi\ \left(m^2\right).$$

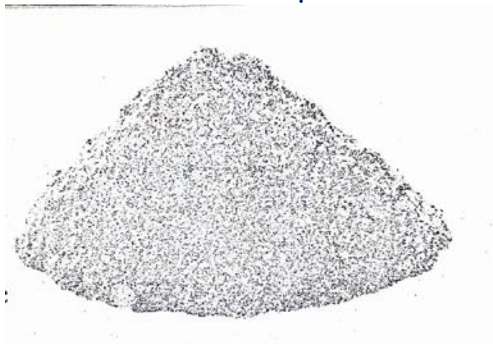
Theo cách buộc thứ hai thì tổng diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được là:

$$S_2=\frac{1}{4}\pi.30^2+\frac{1}{4}\pi.10^2=250\pi\ \left(m^2\right).$$

Vì $S_2>S_1$ nên với cách buộc thứ hai thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn.

Ví dụ 2

Chân một đống cát đổ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi $12m$. Hỏi chân đống cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu mét vuông?



Trước hết ta tính R theo công thức

$$R=\frac{C}{2\pi} \text{ được } R=\frac{6}{\pi} \text{ (m).}$$

Sau đó ta tính S theo công thức

$$S=\pi R^2 \text{ được } S=\frac{36}{\pi}\approx 11,46\ \left(m^2\right).$$

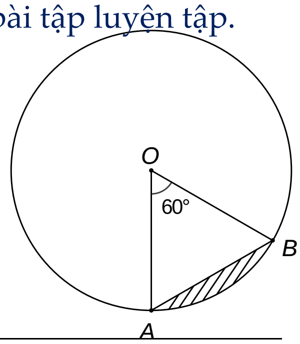
C. LỜI BÌNH

Ở bậc Trung học cơ sở, có nhiều dạng toán về diện tích hình tròn như tính diện tích hình viên phân, hình vành phân. Những dạng toán này sẽ được đề cập trong phần bài tập luyện tập.

Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

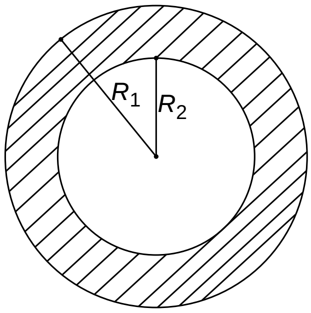
Bài toán 1



Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^0$ và bán kính đường tròn là $5,1cm$ (hình vẽ).

Bài toán 2

Hình vành khăn là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm (hình vẽ).



a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$)

b) Tính diện tích hình vành khăn khi $R_1 = 10,5cm, R_2 = 7,8cm$.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Tam giác OAB có $OA = OB$ và $\widehat{O} = 60^0$ nên là tam giác đều cạnh $5,1$ cm.

Diện tích ΔOAB là: $S_1 = \dfrac{(5,1)^2.\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình quat OAB là:

$$S_2 = \frac{\pi.5,1^2.60}{360} = \frac{\pi.(5,1)^2}{6}.$$

Diện tích hình viên phân là:

$$S = S_2 - S_1 = (5,1)^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$S \approx 2,35 \ (cm^2).$$

Bài toán 2

a) Diện tích hình vành khăn là: $S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$.

b) Khi $R_1 = 10,5; R_2 = 7,8$ thì

$S \approx 3,14[(10,5)^2 - (7,8)^2] \approx 155,1 \ (cm^2)$.

§13. HÌNH TRỤ, DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Khi quay hình chữ nhật $ABO'O$ một vòng quay cạnh OO' cố định, ta được một hình trụ.

- Hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Đường thẳng OO' là trục của hình trụ.
- AB là một đường sinh. Đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài cỉa đường sinh là chiều cao của hình trụ

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rh; S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

(R là bán kính đáy, h là chiều cao).

Thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h$.

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng công thức tính:

+ Diện tích xung quanh hình trụ:

$$S_{xq} = 2\pi Rh; S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2.$$

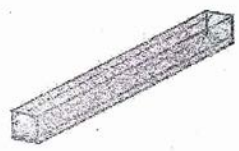
(R là bán kính đáy, h là chiều cao).

+ Thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h$.

- Rút ra kết luận bài toán.

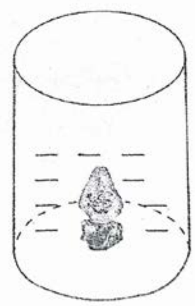
Ví dụ 1

Một bóng đèn huỳnh quang dài $1,2m$, đường kính của đường tròn đáy là $2cm$, được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp (hình vẽ). Tính diện tích phần giấy cứng dùng để làm một hộp. (Hộp hở hai đầu, không tính lề và mép dán).



Diện tích phần giấy cứng cần tính chính là diện tích xung quanh của một hình hộp chữ nhật có chiều cao là $1,2m = 120cm$; có đáy là một hình vuông cạnh $4cm$.

Trả lời $V = abc = 4.4.120 = 1920 \ (cm^2)$.



Ví dụ 2

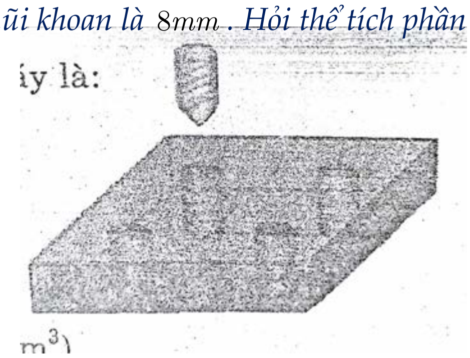
Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thuỷ tinh có nước dạng hình trụ (hình vẽ). Diện tích đáy lọ thuỷ tinh là $12,8cm^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm $8,5mm$. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?

Thể tích tượng đá đúng bằng thể tích khối nước dâng lên trong lọ.

Thể tích đó là: $V = \pi R^2 h = 12,8.0,85 = 10,88 \ (cm^3)$.

Ví dụ 3

Một tấm kim loại được khoan thủng bốn lỗ như hình vẽ (lỗ khoan dạng hình trụ), tấm kim loại dày $2cm$, đáy của nó là hình vuông có cạnh $5cm$. Đường kính của mũi khoan là $8mm$. Hỏi thể tích phần còn lại của tấm kim loại là bao nhiêu?



Mỗi lỗ khoan là một hình trụ có bán kính đáy là:

$$R = 8:2 = 4(mm) = 0,4(cm).$$

Chiều cao của hình trụ đó là:

$$h = 2(cm).$$

Thể tích của mỗi mũi khoan là:

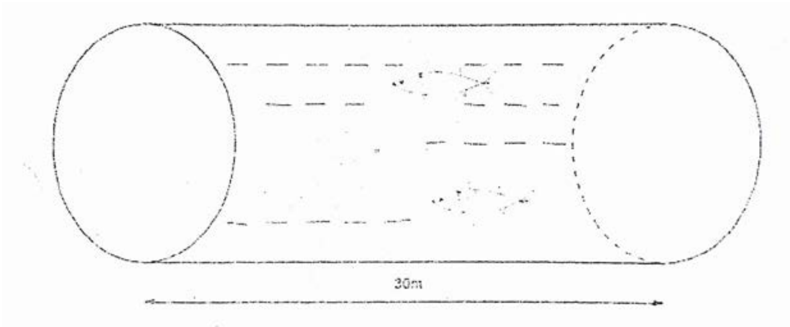
$$V_1 = \pi R^2 h = \pi.(0,4)^2.2 \approx 1,0048 \ (cm^3).$$

Thể tích phần còn lại của tấm kim loại là:

$$V = 5.5.2 - 4.1,0048 \approx 45,98 \ (cm^3).$$

Ví dụ 4

Đường ống nối hai bể cá trong một thuỷ cung ở miền Nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là $30m$ (hình vẽ). Dung tích của đường ống nói trên là 1800000 lít. Tính diện tích đáy của đường ống?

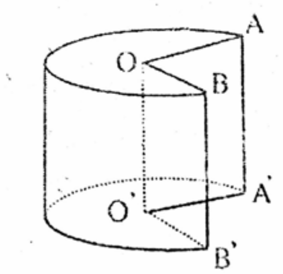


Đổi $1800000l = 1800000dm^3$

Diện tích đáy của đường ống là $S = \dfrac{V}{h} = \dfrac{1800}{30} = 60\ \ (m^2)$.

Ví dụ 5

Từ một khoanh giò hình trụ, người ta cắt rời một phần thẳng đứng theo các bán kính OA, OB (xem hình vẽ). Cho biết diện tích xung quanh của khoanh giò sau khi cắt rời một phần ra đúng bằng diện tích xung quanh trước khi cắt. Tính góc AOB.



Ta đặt $\widehat{AOB} = n^0$ thì sđ$\overset{\frown}{AB} = n^0$.

Diện tích xung quanh bị mất đi một phần là: $S_1 = \dfrac{\pi.R.n}{180}.h$

Diện tích xung quanh được thêm một phần mới là: $S_2 = 2R.h$

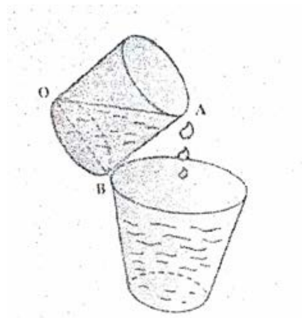
Theo giả thiết, ta có:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{\pi.R.nh}{180} = 2R.h \Leftrightarrow \pi Rnh = 360Rh$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{360}{\pi} \approx 144^0 39.$$

Ví dụ 6

Một cái cốc hình trụ được đổ đầy sữa. Liệu em có thể rót ra đúng một lượng sữa mà không cần phải sử dụng các dụng cụ đo hay không?



Ta nghiêng cái cốc hình trụ đầy sữa, rót ra vật chứa cho đến khi sữa trong cốc của hình trụ tạo thành góc AOB như hình vẽ. Khi đó, số sữa trong cốc còn đúng một nửa như hình vẽ.

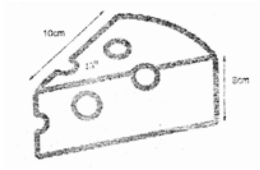
C. LỜI BÌNH

Bài toán về hình trụ, diện tích xung quanh hình trụ và thể tích hình trụ là các bài toán có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Có những bài toán thực tiễn đòi hỏi phải áp dụng các công thức nhưn có những bài toán chỉ cần đưa ra các lí giải tại sao. Điều này nói lên tính phong phú và đa dạng của các bài toán thực tế về hình trụ.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

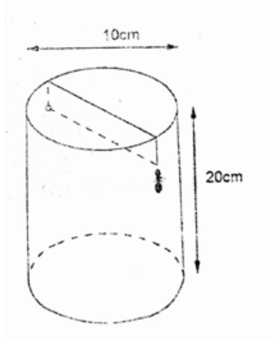
Bài toán 1

Hình vẽ là một mẩu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như trên hình vẽ). Khối lượng của mẫu pho mát là bao nhiêu? Biết rằng khối lượng riêng của pho mát là $3\ g/cm^3$.



Bài toán 2

Thành bên trong của một lọ thuỷ tinh dạng hình trụ có một giọt mật cách miệng lọ $3cm$. *Bên ngoài thành lọ có một con kiến đậu ở điểm đối diện với giọt mật qua tâm đường tròn (song song với đường tròn đáy – xem hình vẽ). Hãy chỉ ra đường đi ngắn nhất của con kiến để đến đúng giọt mật, biết rằng chiều cao của cái lọ là* $20cm$ *và đường kính đường tròn đáy là* $10cm$ *(lấy* $\pi \approx 3,14$*).*



E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

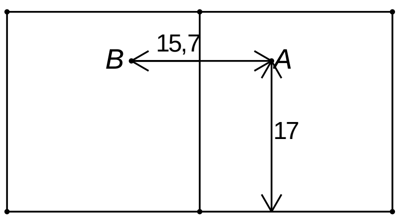
Bài toán 1

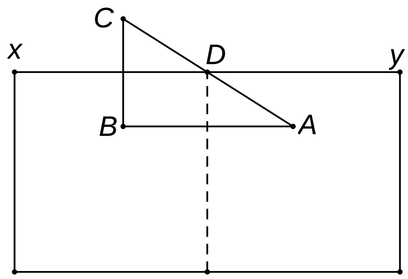
Thể tích khối pho mát hình trụ là: $\pi.10^2.8 = 800\pi\ \ (cm^3)$.

Thể tích mẫu pho mát bằng $\dfrac{15^0}{360^0} = \dfrac{1}{24}$ thể tích khối pho mát.

Khối lượng mẫu pho mát là: $\dfrac{1}{24}.800\pi.3 = 100\pi\ \ (g)$.

Bài toán 2





Khai triển hình trụ theo một đường sinh và trải phẳng ra, ta có một hình chữ nhật chiều rộng $20cm$ (hình vẽ). Chiều dài bằng chu vi đáy của cái lọ: $10.3,14 = 31,4\ \ (cm)$.

Cần chú ý đến vị trí của con kiến và giọt mật: Kiến ở điểm A cách đáy $17cm$, giọt mật ở điểm B cũng vậy và cách điểm A nửa chu vi đáy của cái lọ.

Lấy C đối xứng với B qua đường thẳng xy. Nối C với A cắt xy ở D; D là điểm mà con kiến phải bò qua.

Vậy BDA là tuyến đường ngắn nhất.

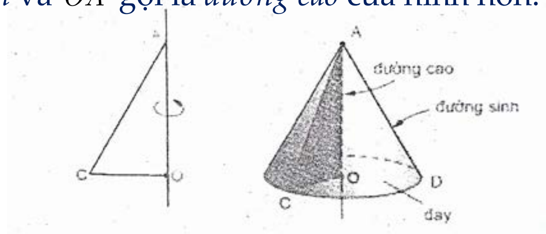
§14. HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT, DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÒN, HÌNH NÓN CỤT

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

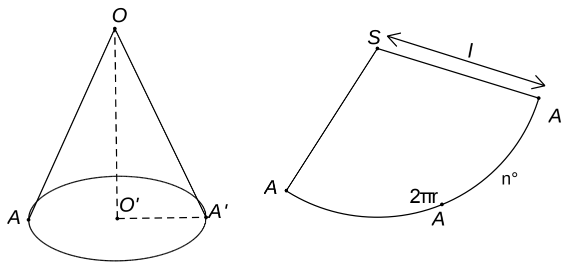
1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón (hình vẽ). Khi đó:

- Cạnh OC quét nên *đáy của hình nón*, là một hình tròn tâm O.
- Cạnh AC quét nên *mặt xung quanh* của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là *một đường sinh.* Chẳng hạn AD là một đường sinh.
- A gọi là *đỉnh* và OA gọi là *đường cao* của hình nón.



2. Diện tích xung quanh hình nón



Cắt mặt xung quanh của một hình nón dọc theo một đường sinh của nó rồi trả phẳng ra, ta được hình khai triển là một hình quạt tròn có tâm là đỉnh của hình nó, bán kính bằng độ dài đường sinh và độ dài cung bằng độ dài đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng diện tích của hình quạt tròn khai triển.

Gọi bán kính đáy của hình nón là r, đường sinh là l. Theo công thức tính độ dài cung, ta có:

Độ dài của cung hình quạt tròn là $\frac{\pi ln}{180} = 2\pi r$.

Độ dài đường tròn đáy của hình nó là $2\pi r$.

Từ đó ta có: $\frac{\pi ln}{180} = 2\pi r$.

Suy ra: $r = \frac{nl}{360}$.

Diện tích xung quanh của hình nón bằng diện tích hình quạt tròn khai triển nên

$$S_{xq} = \frac{\pi l^2 n}{360} = \pi l.\frac{ln}{360} = \pi rl.$$

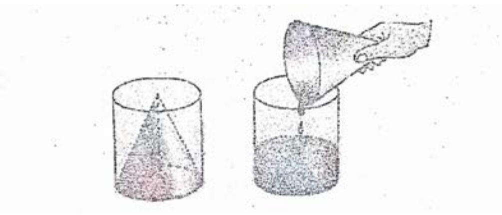
Từ các kết quả trên ta có:

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình nón (tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy) là:

$S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$.

3. Thể tích hình nón

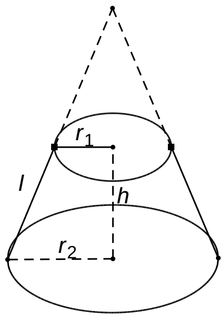


Có hai dụng cụ, một hình trụ và một hình nón có đáy là hai hình tròn bằng nhau. Chiều cao của hình nón bằng chiều cao của hình trụ (hình vẽ).

Nếu ta dùng dụng cụ có dạng như hình nón nói trên, múc đầy nước rồi đổ hết và dụng cụ hình trụ thì thấy chiều cao của cột nước này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của hình trụ.

Qua thực nghiệm ta thấy: $V_{non} = \frac{1}{3}.V_{tru}$

Ta có thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



4. Hình nón cụt

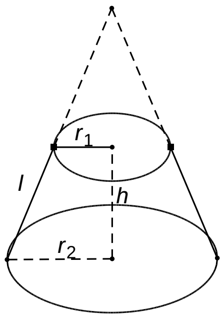
Khi cắt hình nón bởi *một mặt phẳng song song* với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là *một hình tròn*. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt đáy được gọi là một *hình nón cụt* (hình vẽ).

5. Diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt

Cho hình nón cụt có r_1, r_2 là các bán kính đáy, l là độ dài đường sinh, h là chiều cao.

Kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh và V là thể tích hình nón cụt.

Quan sát hình vẽ ta nhận thấy S_{xq} là hiệu diện tích xung quanh của hình nón lớn và hình nón nhỏ, V cũng là hiệu thể tích của hình nón lớn và hình nón nhỏ.



Ta có công thức sau:

$$S_{xq} = \pi(r_1^2 + r_2^2)l$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

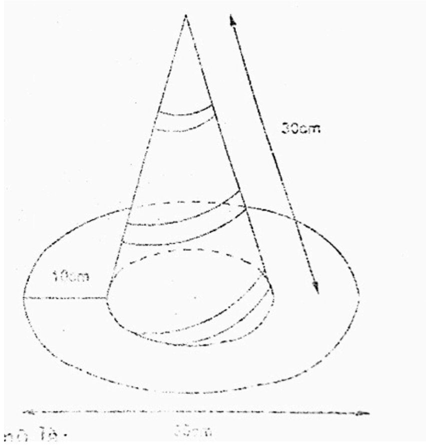
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng công thức tính diện tích hình nón, hình nón cụt, thể tích hình nón, hình nón cụt.

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1



Cái mũ của chú hề với các kích thước cho theo hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể riềm, mép, phần thừa).

Cái mũ gồm hai bộ phận:

- Bộ phận hình nón có:

$r = \dfrac{35 - 2.10}{2} = 7,5 \ \ cm$.

Và $l = 30cm$.

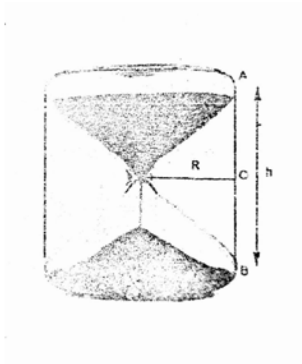
- Bộ phận hình vành khăn có:

$R = 17,5cm$ và $r = 7,5cm$.

Tổng diện tích vải cần có để làm mũ là:

$$S = \pi.7,5.30 + \pi[(17,5)^2 - (7,5)^2] = 475\pi \ \ (cm^2) \approx 1491,5 \ \ (cm^2).$$

Ví dụ 2



Hình vẽ cho ta hình ảnh của một cái đồng hồ cát kích thước kèm theo $(OA = OB)$.

Hãy so sánh tổng các thể tích của hai hình nón và thể tích của hình trụ.

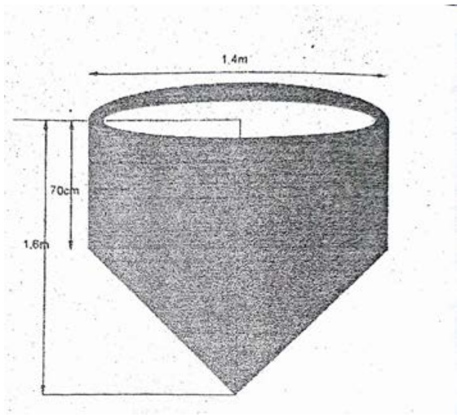
Tổng thể tích của hai hình nón là:

$$V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi R^2.\frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Thể tích của hình trụ là: $V_2 = \pi R^2 h$.

Suy ra: $V_1 = \dfrac{1}{3}V_2$.

Ví dụ 3



Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình vẽ. Hãy tính:

a) *Thể tích của dụng cụ này;*

b) *Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).*

Dụng cụ này gồm hai bộ phận:

- Bộ phận hình trụ có:

Bán kính đáy $R = 70cm$ có chiều cao $h = 70cm$.

- Bộ phận hình nón có: $R = 70cm, h = 90cm$ và có đường sinh:

$l = \sqrt{70^2 + 90^2} = 10\sqrt{130}cm$.

Thể tích của dụng cụ này là:

$$V = \pi.70^2.70 + \frac{1}{3}\pi.70^2.90 = 490000\pi(cm^2) = 0,49(m^2).$$

Diện tích mặt ngoài của dụng cụ này là:

$$S = 2\pi.70.70 + \pi.70.10\sqrt{130} \approx 55833(cm^2) \approx 5,58(m^2).$$

Ví dụ 4 *(Cối xay gió của Don Quixote từ tác phẩm của Cervantes)*

Phần trên của cối xay gió có dựng một hình nón. Chiều cao của hình nón là $42cm$ và thể tích của nó là $17600cm^3$.
Em hãy giúp chàng Don Quixote tính bán kính đáy của hình nón (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 17600; \frac{1}{3}.\pi R^2.42 = 17600$;

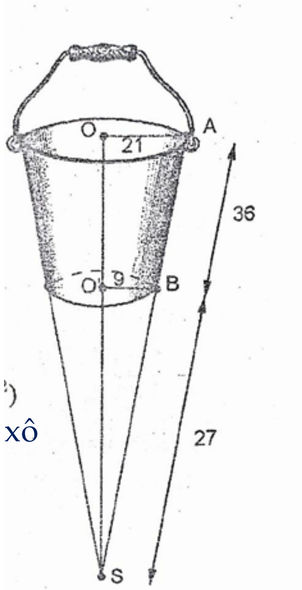
$R^2 \approx 400,36$ hay $R = 20,01$.

Ví dụ 5

Một cái xô bằng inoc có dạng hình nón cụt đựng hoá chất, có các kích thước cho như hình vẽ.

a) Hãy tính diện tích xung quanh của xô.

b) Khi xô chứa đầy hoá chất thì dung dịch của nó là bao nhiêu?



a) Diện tích xung quanh của xô là:

$S_{xq} = \pi(R + r).l = \pi(21 + 9).36 = 1080\pi \ (cm^2)$.

$\approx 3391,2 \ (cm^2)$.

b) Để tính được dung tích của xô ta cần biết thêm chiều cao OO' của xô

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{63^2 - 21^2} = 42\sqrt{2} \ (cm)$.

$SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{27^2 - 9^2} = 18\sqrt{2} \ (cm)$.

Vậy: $OO' = 42\sqrt{2} - 18\sqrt{2} = 24\sqrt{2}(cm) \approx 34(cm)$.

Vậy thể tích của xô là: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$;

$$V = \frac{1}{3}\pi.34.(21^2 + 9^2 + 21.9) \approx 25302(cm^3) \approx 25,3(l).$$

C. LỜI BÌNH

Hình nón và hình nón cụt có rất nhiều hình ảnh trong thực tế, chẳng hạn hình ảnh nón bài thơ của xứ Huế chính có dạng hình nón, đèn treo ở trần nhà có chụp đèn hình nón sẽ tạo nên một cột sáng có dạng một hình nón cụt. Chúng ta cũng vừa khám phá những bài toán thực tế của hình nón và hình nón cụt. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Từ một hình nón, người thợ điện có thể tiện ra một hình trụ sao nhưng "hẹp" hoặc một hình trụ rộng nhưng "thấp".
Trong trường hợp nào thì thợ tiện loại bỏ ít vật liệu hơn?

Bài toán 2

Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là $14cm$ và $9cm$, chiều cao là $23cm$.

a) *Tính dung tích của xô.*

b) *Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).*

Bài toán 3

Từ một khúc gỗ hình trụ cao $15cm$ *người ta tiện thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là* $640\pi \ \ cm^3$.

a) *Tính thể tích khúc gỗ hình trụ.*

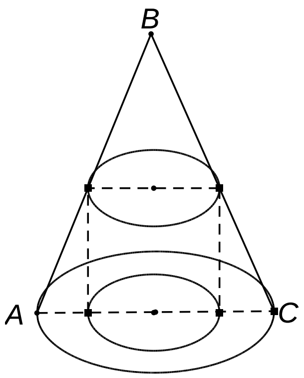
b) *Tính diện tích xung quanh hình nón.*

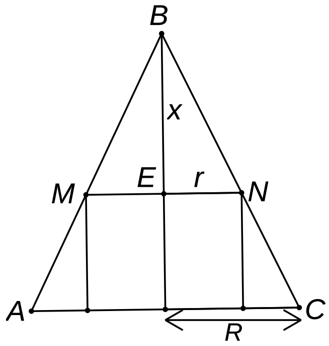
E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Đặt $BE = x$ thì ta có $\dfrac{ME}{AD} = \dfrac{BE}{BD}$ hay $\dfrac{r}{R} = \dfrac{x}{h} \Rightarrow r = \dfrac{Rx}{h}$.

Thể tích hình trụ là: $V = \pi.\dfrac{R^2x^2}{h^2}(h - x)$.

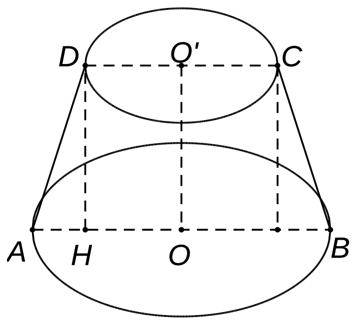




Ta có: $\dfrac{2Vh^2}{\pi R^2} = x^2(2h - 2x)$.

Vì h, π, R là các hằng số nên V sẽ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2(2h - 2x)$ lớn nhất. Vì $x + x + (2h - 2x) = 2h$ (là hằng số) nên tích của nó $x^2(2h - 2x)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2h - 2x$ hay $x = \dfrac{2}{3}h$.

Bài toán 2



a) Thể tích của xô là:

$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)=\frac{1}{3}\pi.23(14^2+9^2+14.9)$

$\approx 9702(cm^3)\approx 9,7(dm^3)$.

Vậy dung tích của xô đó là $9,7$ lít.

b) Muốn tính diện tích tôn để làm xô ta tính diện tích xung quanh cộng với diện tích đáy nhỏ.

Trước hết, tính đường sinh AD bằng cách áp dụng định lí Pythagore đối với tam giác vuông ADH, trong đó $DH=23cm; AH=R-r=5cm$.

Diện tích xung quanh của xô là:

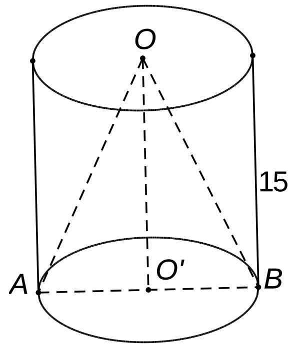
$S_{xq}=\pi(R+r)l=\pi(14+9).23,5=540,5\pi\ \ (cm^2)$.

$S_d=\pi r^2=\pi.9^2=81\pi\ \ (cm^2)$.

Diện tích tôn để làm xô là:

$S=S_{xq}+S_d=540,5\pi+81\pi=612,5(cm^2)\approx 1952\ \ (cm^2)$.

Bài toán 3



a) Ta có: $V_{tru}=\pi R^2 h; V_{non}=\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Vậy thể tích gỗ tiện bỏ đi bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ.

Suy ra thể tích hình trụ là:

$\frac{640\pi.3}{2}=960\pi\ \ (cm^3)$

b) Ta có: $\pi R^2 h=960\pi; \pi.R^2.15=960\pi \Rightarrow R=8\ \ (cm)$.

Áp dụng định lí Pythagore đối với tam giác $OO'B$ ta được

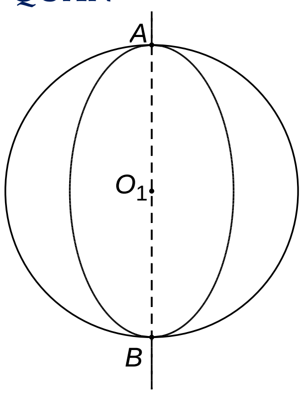
$$OB=\sqrt{OO'^2+OB^2}=\sqrt{15^2+8^2}=17(cm).$$

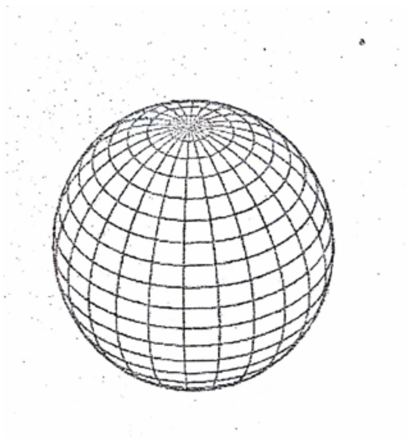
Do đó diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq}=\pi Rl=\pi.8.17=136\ \ (cm^2).$$

§15. HÌNH CẦU, DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN





1. Hình cầu

Hình quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quay quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu.

2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được hình tròn.
- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn.

+ Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm.
+ Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.

3. Diện tích mặt cầu

$S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$ (R là bán kính; d là đường kính của mặt cầu).

4. Thể tích mặt cầu

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

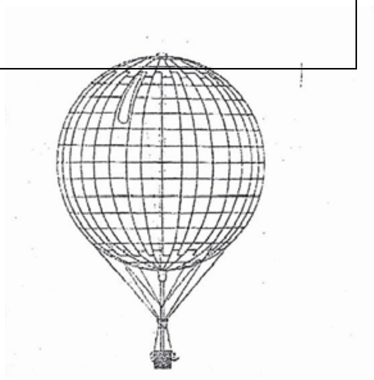
- Sử dụng diện tích mặt cầu:

$S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$ (R là bán kính; d là đường kính của mặt cầu).

Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1



Ngày $4-6-1783$, anh em nhà Montgolfier (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng khinh khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính $11m$. Hãy tính diện tích mặt khinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Sử dụng công thức tính diện tích mặt cầu:

$S = 4\pi R^2 \approx 4.3,14.5,5^2 \approx 380 \ (m^2)$

Ví dụ 2

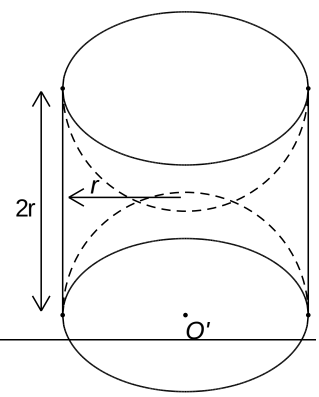
Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước ở liễn nuôi cá cảnh (hình vẽ)? Liễn được xem như một phần mặt cầu (đường kính của mặt cầu là $22cm$). Lượng nước đổ vào liễn chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích hình cầu.

Thể tích hình cầu được tính theo công thức:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ hay } V = \frac{1}{3}\pi d^3 \ (d \text{ là đường kính}).$$

$$22cm = 2,2dm.$$

Lượng nước ít nhất cần phải có là:



$$\frac{2}{3}.\frac{\pi}{6}.(2,2)^3 \approx 3,71(dm^3) = 3,71 \text{ lít.}$$

Ví dụ 3

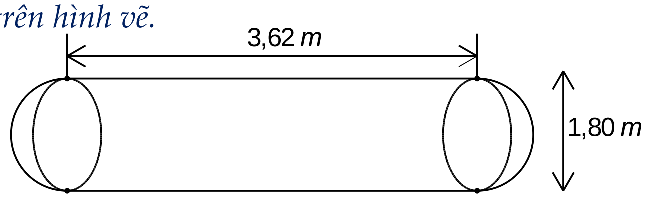
Một khối gỗ dạng hình trụ, bán kính đường tròn đáy là r, chiều cao $2r$ (đơn vị: cm). Người ta khoét rỗng hai nữa hình cầu như hình vẽ. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).

Diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại gồm diện tích xung quanh của hình trụ (có bán kính đáy là r và chiều cao $2r$) và diện tích hai nửa mặt cầu bán kính r.

Diện tích cần tìm là: $S = 2\pi r.2r + 4\pi r^2 = 8\pi r^2$.

Ví dụ 4

Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (hình vẽ). Hãy tính thể tích của bồn chứa theo các kích thước cho trên hình vẽ.

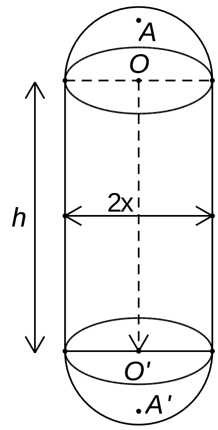


Thể tích của bồn chứa bằng tổng thể tích của một hình trụ (có bán kính đáy $0,9$ m và chiều cao $3,62$ m) và thể tích của một hình cầu bán kính $0,9$ m.

Thể tích của bồn chứa là:

$$V = \pi.(0,9)^2.3,62 + \frac{4}{3}\pi.(0,9)^2 \approx 12,26 \ \ (m^3).$$

Ví dụ 5



Một chi tiết máy gồm một hình trụ và hai nửa hình cầu với các kích thước đã cho trên hình vẽ (đơn vị: cm).

a) Tìm một hệ thức giữa x và h khi AA' có độ dài không đổi và bằng $2a$.

b) Với điều kiện ở câu a), hãy tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết máy theo x và a.

a) Ta có: $h + 2x = AA'$. Do đó $h + 2x = 2a$.

b) Diện tích bề mặt chi tiết máy là:

$S = 2\pi xh + 4\pi x^2 = 2\pi x(h+2x) = 4\pi ax$

Thể tích của chi tiết máy là:

$$V = \pi x^2 h + \frac{4}{3}\pi x^3 = 2\pi x^2(a-x) + \frac{4}{3}\pi x^3 = 2\pi a x^3 - \frac{2}{3}\pi x^3.$$

C. LỜI BÌNH

Bài toán về hình cầu, diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có nhiều ứng dụng quan trọng trong đời sống. Các chi tiết máy, các bồn chứa xăng, ... là hình gồm các phần hình cầu và hình trụ xuất hiện nhiều trong thực tế. Chính vì thế diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu là vấn đề quan trọng và cần được quan tâm nhiều hơn nữa.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Với hai quả dưa hấu (xem như là hai hình cầu) một to và một nhỏ, tỉ số các đường kính của chúng là $5:4$, nhưng giá của quả to gấp rưỡi giá cua quả nhỏ. Bạn chọn mua quả nào thì lợi hơn? (Xem "chất lượng" của chúng là như nhau).

Bài toán 2

Cho tam giác ABC cạnh a, đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp và nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này một vòng quanh AH. Tính:

a) Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón.

b) Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.

c) Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.

Bài toán 3

Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi \ (m^2)$. Tính thể tích của hình cầu đó.

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

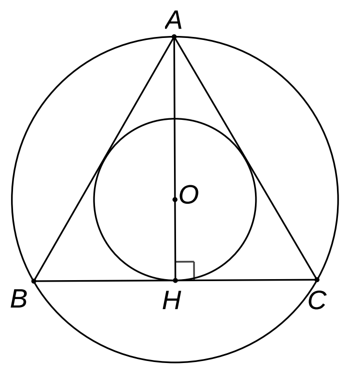
Bài toán 1

Mua quả to lợi hơn vì tỉ số giữa thể tích của nó với thể tích của quả nhỏ là $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$ (gần gấp đôi).

Trong khi đó giá của nó chỉ gấp rưỡi!

(Dễ thấy $\frac{125}{64} > \frac{3}{2} = \frac{96}{64}$).

Bài toán 2



Gọi R và r lần lượt là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đều.

Dễ thấy $R = 2r$.

Vì $BC = a$ nên $HC = \frac{a}{2}$.

Và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

a) Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{r^2}{(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

b) Tỉ số thể tích hai hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{(2r)^3} = \frac{1}{8}.$$

c) Thể tích hình cầu ngoại tiếp là:

$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$ (đvdt).

Thể tích hình nón là: $V_3 = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$ (đvdt).

Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp là:

$V = V_2 - V_3 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27} - \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216} \approx 0,58a^3$ (đvdt).

Bài toán 3

Theo đề bài ta có: $4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5$ (m).

Thể tích của hình cầu đó là: $V = \frac{4}{3}\pi.5^2 = \frac{500\pi}{3}$ (m^3).

§16. HÌNH HỌC PHỔ THÔNG TRONG ĐỜI SỐNG

A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Muốn tạo cho mình hứng thú học toán, muốn thấy được những ứng dụng phong phú của toán học trong đời sống thì chúng ta phải luôn có con mắt toán học. Xung quanh chúng ta có biết bao hình ảnh toán học: miệng bát đĩa hình tròn; mặt bàn ghế hình chữ nhật; thân cây, cột nhà hình trụ; bao diêm; vali hình chữ nhật; quả bóng, hòn bi hình cầu, …

Nhìn vào đường ray thấy hình ảnh hai đường thẳng song song, nhìn vào bức mành thấy hình ảnh của những đường thẳng song song cách đều, nhìn vào xe đạp thấy hình ảnh của tiếp tuyến chung ngoài với hai đường tròn (đĩa, líp và xích).

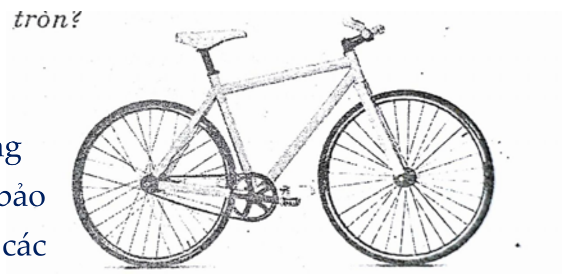
B. VÍ DỤ MINH HOẠ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng tính đối xứng, tính tối ưu, … - của vật để cho vật cân bằng, hợp với thực tế, tiết kiệm, đúng nhất.
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1

Tại sao bánh xe đạp lại là hình tròn?



Khi bánh xe hình tròn mà lăn trên mặt đất thì khoảng cách từ trục bánh xe đến mặt đất luôn bằng nhau (vì bằng độ dài bán kính bánh xe) nên ta ngồi trên xe được đảm bảo vững vàng. Cứ tưởng tượng vành bánh xe méo mó, tức các khoảng cách từ trục bánh xe đến mặt đất khác nhau, thì liệu ta có ngồi trên xe có vững không, đầu óc có bị rung chuyển, choáng váng không. Ngoài ra bánh xe làm theo hình tròn sẽ lăn tốn ít sức hơn đẩy, vì khi lăn một vật thì ma sát ít hơn khi đẩy vật đó.

Ví dụ 2

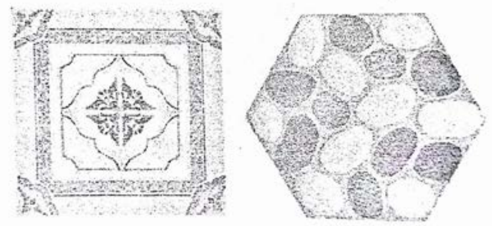
Tại sao hộp sữa làm theo hình trụ mà không làm theo hình lập phương hoặc hình hộp?

Thực tế cho thấy rằng, làm môt vật chứa được một thể tích nhất định mà tốn ít vật liệu nhất sẽ có lợi cho việc giảm giá thành, tăng sức cạnh tranh. Chúng ta đều biết rằng nếu diện tích như nhau thì trong ba hình: hình vuông, tam giác và hình tròn, hình tròn có chu vi nhỏ nhất. Do đó nếu làm những hộp sữa có thể tích bằng nhau và chiều cao bằng nhau thì làm sao theo hình trụ sẽ tốn ít vật liệu nhất.

Nhận xét

- *Chúng ta cũng thấy thêm rằng phần lớn các đồ dụng để chứa chất lỏng (phích nước, phuy đựng xăng, cốc nước) đều làm theo hình trụ.*
- *Nếu hộp sữa mà làm theo hình cầu thì sao? Dùng toán học ta tính được rằng: vật liệu tốn như nhau thì hộp sữa hình cầu đựng được nhiều hơn hộp sữa hình trụ, nhưng làm theo hình cầu thì hộp để không vững nên không lợi.*

Ví dụ 3



Vì sao gạch men lát nền nhà hoặc sân vườn thường là hình vuông hoặc hình lục giác đều?

Màu sắc hoa văn của gạch men rất đa dạng, nhưng viên gạch nếu không là hình vuông thì cũng là hình lục giác đều. Đó la vì lí do gì?

Trong các hình đa giác đều chỉ có 3 loại có thể dùng để lát kín một mặt phẳng không để lại khoảng trống, đó là hình tam giác đều, hình vuông và hình lục giác đều. Bởi vì mỗi góc của hình tam giác đều bằng 60^0, khi ghép 6 hình tam giác đều lại với nhau thì tổng của 6 góc chung đỉnh bằng 360^0. Một góc của hình vuông bằng 90^0, vì thế khi ghép 4 hình vuông lại với nhau thì tổng 4 góc chung đỉnh cũng đúng bằng 360^0. Một góc của hình lục giác đều bằng 120^0 khi ghép 3 hình lục giác đều lại với nhau tổng của 3 góc chung đỉnh cũng bằng 360^0.

Nếu dùng các hình đa giác đều khác thì đều không đạt được yêu cầu này. Ví dụ một góc của hình ngũ giác đều bằng 108^0, ghép 3 hình ngũ giác đều lại với nhau, tổng của 3 góc chung đỉnh là $108.3 = 324^0$ nhỏ hơn 360^0, còn khoảng trống còn lại không đủ ghép hình ngũ giác thứ tư, vì $4.108 = 432^0 > 360^0$.

Ghép 6 hình tam giác đều lại với nhau tuy không có khoảng trống nhưng nhìn không được đẹp mắt như hình vuông và hình lục giác đều. Vì vậy, trong thiết kế Mỹ thuật thường hay dùng gạch men vuông và lục giác đều.

Ví dụ 4

Vì sao kết cấu tam giác lại ổn định?

Nếu chiếc ghế dựa hoặc ghế đẩu của bạn bị lung lay, phải dùng vài thanh gỗ để cố định lại thì cách đóng nào sẽ chắc chắn nhất?

Nếu bạn đóng thanh gỗ theo chiều chân ghế thì chỉ mấy ngày sau nó sẽ bị lung lay. Nhưng nếu ta đặt một đầu thanh gỗ vào chân ghế và đầu kia vào thành ghế tạo thành một hình tam giác, rồi đóng ở mỗi đầu ba cái đinh (cũng thành một hình tam giác) thì sau khi sửa chữa chiếc ghế sẽ tương đối vững chắc.

Tại sao cùng một thanh gỗ đóng dọc theo chân ghế và đóng xiên lại có những hiệu quả không giống nhau? Tại sao dùng 3 cái đinh là đủ? Đó là vì hình tam giác có một tính chất đặc biệt: Khi chiều dài ba cạnh đã xác định thì hình dạng kích thước của hình tam giác cũng hoàn toàn xác định. Ta gọi tính chất này là tính bất động của hình tam giác. Rất nhiều cánh cửa ghép thường được đóng thêm một thanh gỗ chéo, thành cầu hoặc kèo nhà thường kết cấu giàn tam giác, chính vì lí do đó.

Bây giờ hẳn bạn có thể nhớ lại rằng tại sao khi đi cắm trại ở ngoại thành các ban đội viên thiếu niên thường dùng ba chiếc gậy buộc với nhau thành một cái giá chắc chắn. Đó chính là vì ngoài việc lợi dụng tính chất bất động của hình tam giác họ còn dựa vào nguyên lý qua 3 điểm không thẳng hàng có và chỉ xác định được một mặt phẳng làm cho đường dây rọi của giá 3 chân nằm trong mặt phẳng của hình tam giác do 3 chiếc gậy xác định.

C. LỜI BÌNH

Toán học ở xung quanh ta, toán học thâm nhập một cách mạnh mẽ vào mọi lĩnh vực khoa học và đời sống. Điều quan trọng là chúng ta phải luôn nhìn mọi sự vật, hiện tượng bằng con mắt toán học thì chúng ta thấy toán học thật sống động và phong phú, có nhiều điều bổ ích.

D. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài toán 1

Dù ai nói ngả nói nghiêng

Lòng ta vẫn vững như kiềng ba chân

Giải thích tại sao kiềng ba chân đứng vững nhất?

Bài toán 2

Vì sao trên đường chạy $200m$, điểm xuất phát của đường ngoài lại vượt lên trước rất nhiều so với đường trong?

E. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài toán 1

Kiềng ba chân đững vững vàng nhất là theo tiên đề về mặt phẳng, ba điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một mặt phẳng.

Bài toán 2

Tỉ lệ giữa chu vi của đường tròn với đường kính của nó là hằng số π có giá trị gần đúng là $3,14$. Như vậy chu vi của đường tròn bằng $3,14$ lần đường kính của nó, hay là bằng $6,28$ lần bán kính của nó, tức $C \approx 6,29R$ (ở đây C là chu vi đường tròn, R là bán kính). Nếu bán kính tăng $1m$ thì chu vi cũng tương ứng tăng thêm $6,28m$. Thông thường mỗi đường chạy rộng $1,2m$, như vậy độ dài của một vòng đường chạy ngoài sẽ dài hơn $7,54m$. Do đó bất kể bán kính là bao nhiêu chỉ cần chênh lệch nhau $1,2m$ thì chu vi sẽ luôn luôn chênh lệch nhau

$7,54m$. Ở sân vận động tiêu chuẩn (vòng trong dài $400m$) để tiện cho việc đánh giá phân tích, vạch đích là một đường thẳng. Nói chung đường đua $200m$ thường gồm hai đoạn: Trước hết là đoạn chạy vòng (khoảng $114m$) sau đó là đoạn chạy thẳng (khoảng $86m$). Phần chạy vòng, bán kính trong cũng là $36m$, người chạy đường thứ nhất xuất phát ở điểm cách vòng tròn $0,3m$, nên độ dài thực tế của đoạn chạy vòng là $36,3m\text{x}3,14 \approx 114m$. Điểm xuất phát của mỗi vòng ngoài phải dịch lên trước khoảng $1,2m\text{x}3,14 \approx 3,77m$ so với điểm xuất phát của vòng trong. Nếu có 6 đường chạy thì 6 điểm xuất phát sẽ thành hình bậc thang, điểm xuất phát của người chạy ở đường ngoài cùng sẽ vượt lên trước khoảng $18,85m$ so với điểm xuất phát của người chạy đường trong cùng. Làm như vậy điểm đích của 6 người đều trên một đường thẳng. Làm như vậy điểm đích của 6 người đều cùng trên một đường thẳng. Hiểu được quy tắc này khi chuẩn bị sân vận động nói chung chỉ cần đo đường chạy trong cùng dài $200m$, xác định điểm xuất phát, sau đó lần lượt dịch điểm xuất phát của đường ngoài lên trước một số nét (như đã tính), không cần thiết phải đo trên thực địa độ dài của từng đường chạy một.

Chương III

CÁC ĐỀ TOÁN THỰC TẾ THI VÀO LỚP 10

§1. CÁC ĐỀ THI NĂM HỌC 2011 – 2012

Bài toán 1 *(Đề thì tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Nghệ An 2011 - 2012)*

Quãng đường AB dài 120 km. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B. Vận tốc của xe máy thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe máy thứ hai là 10 km/h nên xe máy thứ nhất đến B trước xe máy thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe?

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe máy thứ nhất;

y (km/h) là vận tốc của xe máy thứ hai.

Điều kiện $x, y > 0$.

Vì vận tốc của xe máy thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe máy thứ hai là 10 km/h nên: $x - y = 10$ (1)

Thời gian chạy trên quãng đường AB của xe thứ nhất là: $\frac{120}{x}$ (h).

Thời gian chạy trên quãng đường AB của xe thứ hai là: $\frac{120}{y}$ (h).

Vì xe máy thứ nhất đến B trước xe máy thứ hai 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 10 \\ \frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 10 \\ 120x - 120x + 1200 = x^2 - 10x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 10 \\ x^2 - 10x - 1200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = -30(l) \end{array}\right. \\ y = 30 \end{cases}.$$

Vậy vận tốc xe thứ nhất là 40 (km/h).

Vận tốc của xe thứ hai là 30 (km/h).

Bài toán 2 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Kiên Giang 2011 - 2012)*

Một phòng họp dự định có 120 người, nhưng khi họp có 160 người tham dự nên phải kê thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy phải kê thêm một ghế nữa thì vừa đủ. Tính số dãy ghế dự định lúc đầu. Biết rằng số dãy ghế lúc đầu trong phòng nhiều hơn 20 dãy ghế và số ghế trên mỗi dãy ghế là bằng nhau.

Gọi số dãy ghế dư định lúc đầu là x (dãy) (Điều kiện $x \in N^*$ và $x > 20$).

Số dãy ghế lúc sau là $x + 2$ (dãy).

Số ghế trong mỗi dãy lúc đầu là: $120 : x = \dfrac{120}{x}$ (ghế).

Số ghế trong mỗi dãy lúc sau là: $160 : (x+2) = \dfrac{160}{x+2}$ (ghế).

Do phải kê thêm mỗi dãy một ghế nữa thì vừa đủ nên ta có phương trình:

$\dfrac{160}{x+2} - \dfrac{120}{x} = 1$ (*)

(*) $\Leftrightarrow 160x - 120(x+2) = x(x+2)$

$\Leftrightarrow 160x - 120x - 24 = x^2 + 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 38x + 240 = 0, \Delta' = 361 - 240 = 121, \sqrt{\Delta'} = 11$.

Vậy $x_1 = \dfrac{19+11}{1} = 30$ (nhận), $x_2 = \dfrac{19-11}{1} = 18$ (loại vì $18 < 20$).

Vậy số dãy ghế dự định lúc đầu là 30 dãy.

Bài toán 3 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Khánh Hòa 2011 - 2012)*

Quãng đường từ A đến B dài 50 km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ. Muốn đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

Đổi 30 phút $= \dfrac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là x (km/h) (Điều kiện $x > 0$)

Quãng đường đi được sau 2 giờ là: $x.2 = 2x$ (km).

Thời gian dự định đi từ A đến B là: $50 : x = \dfrac{50}{x}$.

Quãng đường còn lại là: $50 - 2x$ (km).

Vận tốc đi trên quãng đường còn lại là: $x + 2$ (km/h).

Thời gian đi trên quãng đường còn lại là:

$(50 - 2x) : (x+2) = \dfrac{50-2x}{x+2}$ (h).

Theo giả thiết ta có phương trình:

$\frac{50-2x}{x+2}+\frac{1}{2}+2=\frac{50}{x}$

$\Leftrightarrow 2x(50-2x)+5x(x+2)=50.2(x+2)$

$\Leftrightarrow 100x-4x^2+5x^2+10x=100x+200$

$\Leftrightarrow x^2+10x-200=0$

$\Delta'=25+200=225, \sqrt{\Delta'}=15$.

Vậy $x_1=\frac{-5+15}{1}=10$ (nhận);

$x_2=\frac{-5-15}{1}=-20$ (loại, vì $-20<0$).

Bài toán 4 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Bình Định 2011 - 2012)*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $6\,m$ và bình phương của số đo độ dài đường chéo gấp 5 lần số đo chu vi. Tính diện tích của mảnh đất hình chữ nhật đã cho.

Gọi độ dài của chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật đã cho là x (m) (Điều kiện $x>0$)

Chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật đã cho là $x+6$ (m)

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật này là: $2(x+x+6)=4x+12$ (m).

Theo định lí Pythagore ta có bình phương độ dài của đường chéo hình chữ nhật là $x^2+(x+6)^2$.

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$x^2+(x+6)^2=5(4x+14) \Leftrightarrow x^2+x^2+12x+36=20x+60$

$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0$.

$\Delta'=4+12=16, \sqrt{\Delta'}=4$.

Vậy $x_1=\frac{2+4}{1}=6$ (nhận); $x_2=\frac{2-4}{1}=-2$ (loại).

Vậy chiều rộng của mảnh đất đã cho là $6\,$m, chiều dài của mảnh đất đã cho là: $6+6=12$ (m).

Diện tích mảnh đất đã cho là: $6.12=72$ (m^2).

Bài toán 5 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Quảng Ngãi 2011 - 2012)*

Hai bến sông cách nhau $15\,$km. Thời gian một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B, tại bến B nghỉ 20 phút rồi ngược dòng từ bến B trở về bến A tổng cộng là 3 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

Đổi 20 phút $=\frac{1}{3}$ giờ.

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h) (Điều kiện $x>3$).

Vận tốc ca nô lúc xuôi dòng là: $x+3$ (km/h).

Vận tốc ca nô lúc ngược dòng là: $x-3$ (km/h).

Thời gian ca nô ngược dòng từ A đến B là: $15:(x-3)=\frac{15}{x-3}$ (h).

Vì thời gian ca nô xuôi dòng, ngược dòng và nghỉ là 3 giờ. Ta có phương trình:

$\frac{15}{x+3}+\frac{15}{x-3}+\frac{1}{3}=3 \Leftrightarrow \frac{15}{x+3}+\frac{15}{x-3}=\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 45(x+3)+45(x-3)=8(x+3)(x-3)$

$\Leftrightarrow 45x+135+45x-135=8(x^2-9)$

$\Leftrightarrow 8x^2-90x-72=0 \Leftrightarrow 4x^2-45x-36=0$.

$\Delta = 2025+576=2601, \sqrt{\Delta}=51$.

Vậy $x_1=\frac{45+51}{2.4}=12; x_2=\frac{45-51}{2.4}=\frac{-3}{4}$ (loại).

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 12 km/h.

Bài toán 6 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, TP Hà Nội 2011 - 2012)*

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

Gọi số ngày theo kế hoạch đội xe chở hết hàng là x (ngày) (Điều kiện $x \in N^*$)

Theo kế hoạch mỗi ngày đội xe chở là: $140 : x = \frac{140}{x}$ (tấn hàng).

Số ngày thực tế đội xe chở hàng là: $x-1$ (ngày)

Thực tế đội xe chở được là: $140+10=150$ (tấn hàng).

Theo thực tế mỗi ngày đội xe chở là:

$150:(x-1)=\frac{150}{x-1}$ (tấn hàng).

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$\frac{150}{x-1}-\frac{140}{x}=5 \Leftrightarrow \frac{30}{x-1}-\frac{28}{x}=1$

$\Leftrightarrow 30x-28x+28=x^2-x \Leftrightarrow x^2-3x-28=0$

$\Delta = 9+112=121, \sqrt{\Delta}=11$.

Suy ra $x_1=\frac{3+11}{2}=7$ (nhận); $x_2=\frac{3-11}{2}=-4$ (loại).

Vậy theo kế hoạch đội xe chở hết hàng trong 7 ngày.

Bài toán 7 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Ninh Bình 2011 - 2012)*

Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B dài 30 km. Khi đi ngược trở lại từ B về A người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h nên thời gian về ngắn hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp lúc đi từ A đến B.

Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h) (Điều kiện $x>0$).

Thời gian đi từ A đến B là: $30:x=\frac{30}{x}$ (h).

Vận tốc của người đi từ B đến A là: $x+3$ (km/h).

Thời gian đi từ B về A là: $30:(x+3)=\frac{30}{x+3}$ (h).

Thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút $=\frac{1}{2}$ h nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 60(x+3)-60x=x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 60x+180-60x=x^2+3x\Leftrightarrow x^2+3x-180=0$$

$\Delta=9+720=729,\sqrt{\Delta}=27$.

Vậy $x_1=\frac{-3+27}{2}=12$ (nhận); $x_2=\frac{-3-27}{2}=-15$ (loại).

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 km/h.

Bài toán 8 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, chuyển ĐHSP Hà Nội 2011 - 2012)*

Một nhóm công nhân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất là x (sản phẩm) (Điều kiện $x\in N^*$).

Thời gian hoàn thành theo kế hoạch là $\frac{200}{x}$ (ngày).

Sản phẩm làm trong 4 ngày đầu là $4x$ (sản phẩm).

Số sản phẩm những ngày còn lại phải làm là: $200-4x$ (sản phẩm).

Số sản phẩm mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất trong những ngày còn lại là $x+10$ (sản phẩm).

Thời gian hoàn thành số sản phẩm còn lại là: $\frac{200-4x}{x+10}$ (sản phẩm).

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{200}{x}-\left(\frac{200-4x}{x+10}+4\right)=2\Leftrightarrow\frac{200}{x}-\frac{200-4x}{x+10}=6$$

$$\Leftrightarrow\frac{100}{x}-\frac{100-2x}{x+10}=3\Leftrightarrow 100x+1000-100x+2x^2=3x^2+30x$$

$$\Leftrightarrow x^2+30x-1000=0$$

$\Delta'=225+1000=1225,\sqrt{\Delta'}=35$.

Vậy $x_1=\frac{-15+35}{1}=20$ (nhận); $x_2=\frac{-15-35}{1}=-50$ (loại).

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất 20 sản phẩm.

§2. CÁC ĐỀ THI NĂM HỌC 2012 - 2013

Bài toán 1 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, TP. Hà Nội 2012 - 2013)*

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ).

Điều kiện $(x > \frac{12}{5})$.

Thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là $x+2$ (giờ).

Trong 1 giờ, người thứ nhất làm được: $1 : x = \frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ, người thứ hai làm được: $1:(x+2) = \frac{1}{x+2}$ (công việc).

Trong 1 giờ, hai người làm chung được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$ (công việc) hay $1 : \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 12(x+2) + 12x = 5x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$\Delta' = 49 + 120 = 169, \sqrt{\Delta'} = 13$.

Ta có: $x_1 = \frac{7+13}{5} = 4$ (thích hợp), $x_2 = \frac{7-13}{5} = \frac{-6}{5}$ (loại).

Vậy thời gian ngồi thứ nhất làm một mình xong công việc là 4 giờ.

Thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là: $4+2=6$ (giờ).

Bài toán 2 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Đắk Lắk 2012 - 2013)*

Hai ô tô đi từ A đến B dài 200 km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10 km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Gọi vận tốc xe thứ hai là x (km/h) (Điều kiện $x > 0$)

Vận tốc xe thứ nhất là $x+10$ (km/h).

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là: $200 : (x+10) = \frac{200}{x+10}$ (h)

Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là: $200 : x = \frac{200}{x}$ (h)

Xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ, nên ta có phương trình

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+10} = 1 \Leftrightarrow 200(x+10) - 200x = x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0.$$

$\Delta' = 25 + 2000 = 2025, \sqrt{\Delta'} = 45$.

Vậy $x_1 = \frac{-5+45}{1} = 40$ (nhận), $x_2 = \frac{-5-45}{1} = -50$ (loại).

Vậy vận tốc xe thứ hai là 40 km/h.

Vận tốc xe thứ nhất là $40+10=50$ (km/h).

Bài toán 3 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội 2012 - 2013)*

Trên quãng đường AB dài 210 km, tại cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đi về B và một ô tô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và của ô tô.

Đổi 2 giờ 15 phút $=\frac{9}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h), vận tốc của ô tô là y (km/h) (Điều kiện $x>0, y>0$)

Xe máy đi trong 4 giờ được $4x$ (km), xe ô tô đi trong $\frac{9}{4}$ giờ được $\frac{9}{4}y$ (km).

Ta có phương trình $4x+\frac{9}{4}y=210$ (1)

Thời gian từ khi khởi hành đến lúc gặp nhau là

$$4x : y=\frac{4x}{y} \text{ (h) hay } \frac{9}{4}y : x=\frac{9y}{4x} \text{ (h)}.$$

Ta có phương trình: $\frac{4x}{y}=\frac{9y}{4x}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x+\frac{9}{4}y=210 \\ \frac{4x}{y}=\frac{9y}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+\frac{9}{4}y \\ 3y=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+\frac{9}{4}y=210 \\ 3y=4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21}{4}y=210 \\ x=\frac{3y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=40 \end{cases}.$$

Vậy vận tốc của xe máy là 30 km/h, vận tốc của ô tô là 40 km/h.

Bài toán 4 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT Chuyên tỉnh Hưng Yên 2012 – 2013)*

Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau 4 vòng đấu (mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu các đội đã thi đấu 5 trận?

a) Có 12 đội, mỗi đội thi đấu đúng 4 trận nên tìm được hai đội chưa thi đấu với nhau, gọi hai đội đó là A và B.

Mỗi đội A, B thi đấu đúng 4 trận, do vậy trong 10 đội còn lai có ít nhất 2 đội chưa thi đấu với cả A và B. Gọi một trong hai đội đó là C.

A, B, C là ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên không còn đúng nếu mỗi đội đã thi đấu đúng 5 trận.

Chẳng hạn: Chúng ta chia 12 đội thành hai nhóm, mỗi nhóm 6 đội, các đội trong mỗi nhóm đôi một đã thi đấu với nhau. Như vậy 12 đội bóng này, mỗi đội đã thi đấu đúng 5 lần.

Xét ba đội bóng tuỳ ý, luôn có 2 đội bóng ở cùng một nhóm. Như vậy ba đội bóng bất kì, có ít nhất hai đội đã thi đấu với nhau.

Bài toán 5 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Kiên Giang 2012 – 2013)*

Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy?

Gọi x (dãy) là số ghế lúc đầu được chia từ số chỗ ngồi trong phòng họp.

Điều kiện: $x \in N*$ và $x > 3$.

Số chỗ ngồi ở mỗi dãy lúc đầu: $\frac{360}{x}$ (chỗ).

Do thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi va bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi nên ta có phương trình:

$$\left(\frac{360}{x}+4\right)(x-3)=360 \Leftrightarrow x^2-3x-270=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=18 \\ x=-15 \end{array}\right..$$

Vậy lúc đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành 18 dãy.

§3. CÁC ĐỀ THI NĂM HỌC 2013 – 2014

Bài toán 1 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Ninh Bình 2013 – 2014)*

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Quãng đường từ A đến B dài 90km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5h. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Gọi vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B là x (km/h).

Vận tốc xe máy đi từ B đến A là: $x+9$ (km/h).

Thời gian xe máy đi từ B đến A là: $90 : x = \frac{90}{x}$ (h).

Tổng thời gian xe máy đi từ A đến B, từ B về A (không kể thời gian nghỉ) là: 5 giờ - 30 phút $=\frac{9}{2}$ (giờ).

Ta có phương trình:

$$\frac{90}{x}+\frac{90}{x+9}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{10}{x}+\frac{10}{x+9}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 20(x+9)+20x=x(x+9)$$
$$\Leftrightarrow 20x+180+20x=x^2+9x$$
$$\Leftrightarrow x^2-31x-180=0$$
$$\Delta=961+720=1681, \sqrt{\Delta}=41.$$

Vậy $x_1=\frac{31+41}{2}=36$ (nhận), $x_2=\frac{31-41}{2}=-5$ (loại).

Vậy vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B là 36 km/h.

Bài toán 2 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Quảng Ninh 2013 - 2014)*

Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành sớm công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Gọi số sản phẩm mỗi ngày tổ đã làm là x (sản phẩm) (Điều kiện $x > 0, x \in N$).

Số sản phẩm mỗi ngày tổ dự định làm là $x - 10$ (sản phẩm)

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo dự định là:

$$240 : (x-10) = \frac{240}{x-10} \text{ (ngày).}$$

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo thực tế là: $240 : x = \dfrac{240}{x}$ (ngày).

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{240}{x-10} - \frac{240}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 240x - 240(x-10) = 2x(x-10)$$

$$\Leftrightarrow 240x - 240x + 2400 = 2x^2 - 20x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x - 2400 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0$$

$$\Delta' = 25 + 1200 = 1225, \sqrt{\Delta'} = 35 .$$

Vậy $x_1 = \dfrac{5+35}{1} = 40$ (sản phẩm), $x_2 = \dfrac{5-35}{1} = -30$ (loại).

Vậy số sản phẩm mỗi ngày tổ đã làm là 40 sản phẩm.

Bài toán 3 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Nghệ An 2013 - 2014)*

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi $100\,m$. Nếu tăng chiều rộng $3\,m$ và giảm chiều dài $4\,m$ thì diện tích mảnh vườn giảm xuống $2\ m^2$. Tính diện tích của mảnh vườn.

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m) (điều kiện $0 < x < 25$)

Chiều dài của mảnh vườn là: $100 : 2 - x = 50 - x$ (m).

Diện tích của mảnh vườn là: $x(50-x)$ (m^2).

Chiều rộng của mảnh vườn nếu tăng thêm 3 m là: $x + 3$ (m).

Chiều dài của mảnh vườn nếu giảm 4 m là: $50 - x - 4 = 46 - x$ (m).

Diện tích mới của mảnh vườn là: $(x+3)(46-x)$ (m^2)

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$x(50-x) - (x+3)(46-x) = 2$$

$$\Leftrightarrow 50x - x^2 - 46x + x^2 - 138 + 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow 7x = 140 \Leftrightarrow x = 20 .$$

$x = 20$ thỏa mãn điều kiện. Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 20 (m).

Chiều dài của mảnh vườn là: $50 - 20 = 30$ (m).

Diện tích của mảnh vườn là: $20.30 = 600$ (m^2).

Bài toán 4 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Chuyên toán PTNK ĐHQG TP. HCM 2013 - 2014)*

Có hai vòi nước A, B cùng cung cấp cho một hồ cạn nước và vòi C (đặt sát đáy hồ) lấy nước từ hồ cung cấp cho hệ thống tưới cây. Đúng 6 giờ vòi A và B được mở; đến 7 giờ vòi C được mở; đến 9 giờ thì sống vòi B và vòi C; đến 10 giờ 45 phút thì hồ đầy nước. Người ta thấy rằng nếu đóng vòi B ngay từ đầu thì phải đến đúng 13 giờ hồ mới đầy. Biết lưu lượng vòi B là trung bình cộng của vòi A và vòi C, hỏi một mình vòi C tháo cạn hồ nước đầy trong bao lâu?

$$10 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = \frac{43}{4} \text{ (giờ)}$$

Gọi thời gian để vòi A, B chảy riêng vào đầy bể lần lượt là x (giờ), y (giờ), thời gian để vòi C tháo cạn hồ nước đầy là z (giờ). (Điều kiện $x, y, z > 0$).

Trong 1 giờ vòi A chảy vào được $\frac{1}{x}$ (hồ), vòi B chảy vào được $\frac{1}{y}$ (hồ), vòi C tháo ra $\frac{1}{z}$ (hồ).

Đúng 6 giờ, A và B mở, đến 7 giờ C mở, đến 9 giờ thì đóng B, C, đến 10 giờ 45 phút thì hồ đầy. Ta có:

$$\left(\frac{43}{4} - 6\right).\frac{1}{x} + (9-6).\frac{1}{y} - (9-7).\frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{19}{4x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 1 \quad (1)$$

Nếu đóng B ngay từ đầu đến 13 (h) hồ đầy nên

$$(13-6)\frac{1}{x} - (9-7)\frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{x} - \frac{2}{z} = 1 \quad (2)$$

Lưu lượng vòi B là trung bình cộng của lưu lượng vòi A và vòi C nên:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\begin{cases} \frac{19}{4x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 1 \\ \frac{7}{x} - \frac{2}{z} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{4x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) - \frac{2}{z} = 1 \\ \frac{7}{x} - \frac{2}{z} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4x} - \frac{1}{2z} = 1 \\ \frac{7}{4x} - \frac{1}{2z} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ z = 12 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Vậy một mình vòi C tháo cạn hồn nước đầy trong 12 giờ.

Bài toán 5 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Chuyên toán tỉnh Bắc Ninh 2013 - 2014)*

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Gọi x (km/h) là vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B $(x > 0)$.

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là $\frac{36}{x}$.

Vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là $x+3$.

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là $\frac{36}{x+3}$.

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{36}{60}$.

Giải phương trình ta được hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-15(loai) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 (km/h).

Bài toán 6 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Chuyên toán tỉnh Bình Thuận 2013 - 2014)*

Trên quãng đường AB dài 60km, người thứ nhất đi xe máy từ A đến B, người thứ hai đi xe đạp từ B đến A. Họ khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C sau khi khởi hành được 1 giờ 20 phút. Từ C người thứ nhất đi tiếp đến B và người thứ hai đi tiếp đến A. Kết quả người thứ nhất đến nơi sớm hơn người thứ hai là 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng trên suốt quãng đường cả hai người đều đi với vận tốc không đổi.

Gọi vận tốc của người thứ nhất là x km/h, $(x>0)$.

Gọi vận tốc của người thứ hai là y km/h, $(y>0)$.

Đổi 1 giờ 20 phút $=\frac{4}{3}$ giờ $\Rightarrow \frac{4}{3}(x+y)=60 \Rightarrow x+y=45$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=45 \\ \frac{60}{x}+2=\frac{60}{y} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được: $x=30, y=15$.

Vậy vận tốc của người thứ nhất là 30 (km/h), vận tốc người thứ hai là 15 (km/h).

Bài toán 7 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Chuyên toán PTNK ĐHQG TP. HCM 2013 - 2014)*

Trong một kì thi, 60 thí sinh phải giải 3 bài toán. Khi kết thúc kì thi, người ta nhận thấy rằng: với hai thí sinh bất kì luôn có ít nhất một bài toán mà cả hai thí sinh đó đều giải được. Chứng minh rằng:

a) Nếu có một bài toán mà mọi thí sinh đều không đạt giải được thì phải có một bài toán khác mà mọi thí sinh đều giải được.

b) Có một bài toán mà có ít nhấ 40 thí sinh giải được.

Gọi ba bài toán là A, B, C.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử mọi thí sinh đều không giải được bài toán A.

- Nếu mọi thí sinh đều không giải được bài toán B thì từ giả thiết ta có mọi thí sinh đều giải được bài toán C.
- Nếu mọi thí sinh đều giải được bài toán B và bài toán C thì ta có mọi thí sinh đều giải được bài toán B, bài toán C.
- Nếu có một thí sinh chỉ giải được một bài toán, giả sử giải được bài toán B. Xét học sinh này với tất cả các học sinh còn lại. Theo giả thiết, có mọi thí sinh đều giải được bài toán B.

Vậy nếu có một bài toán mà mọi thí sinh đều không giải được thì phải có một bài toán khác mà mọi thí sinh đều giải được.

b) Theo giả thiết ta có mọi thí sinh đều giải được ít nhất một bài toán. Nếu có một thí sinh chỉ giải đúng một bài toán, xét học sinh này với tất cả các học sinh còn lại, ta có mọi thí sinh đều giải được bài toán đó. Ta chỉ còn xét trường hợp mà mọi thí sinh giải được ít nhất hai bài toán.

Gọi số thí sinh giải được A, B mà không giải được C là x, số thí sinh giải được B, C mà không giải được A là y, số thí sinh giải được A, C mà không giải được B là z, số thí sinh giải được cả A, B, C là $(x, y, z, t \in N)$.

Ta có: $x + y + z + t = 60$ (1)

Cách 1

Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.

Ta có: $x + z + t < 40; x + y + t < 40; y + z + t < 40$.

Do đó: $x + z + t + x + y + t + y + z + t < 40 + 40 + 40$

$2(x + y + z + t) + t < 120$

Kết hợp (1) có $t < 0$. Điều này vô lí! Điều giả sử trên là sai.

Vậy có một bài toán mà có ít nhất 40 thí sinh giải được.

Cách 2

Ta có số học sinh không giải được A là y, không giải được B là z, không giải được C là x.

Nếu $x > 20, y > 20, z > 20$ thì $x + y + z > 60$. Mâu thuẫn (1).

Do đó trong ba số x, y, z phải có một số không vượt quá 20.

Như vậy có một bài toán mà có nhiều nhất 20 thí sinh không giải được. Do đó bài toán này có ít nhất 40 thí sinh giải được.

Vậy có một bài toán mà có ít nhất 40 thí sinh giải được.

§3. CÁC ĐỀ THI NĂM 2014 - 2015

Bài toán 1 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Nghệ An 2014 - 2015)*

Một ô tô và một xe máy ở hai địa điểm A và B cách nhau 180 km, khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 10 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe.

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h).

Vận tốc của xe máy là y (km/h) (Điều kiện: $x > y > 0, x > 10$).

Ta có phương trình: $x - y = 10$ (1)

Sau 2 gờ ô tô đi được quãng đường là $2x$ (km).

Sau 2 giờ xe máy đi được quãng đường là $2y$ (km) thì chúng gặp nhau, ta có phương trình:

$2x + 2y = 180$ hay $x + y = 90$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$.

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h và vận tốc của xe máy là: 40 km/h.

Bài toán 2 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Thành phố Hà Nội 2014 - 2015)*

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm trên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Gọi số sản phẩm phân xưởng làm một ngày theo kế hoạch là x (sản phẩm) (Điều kiện: $x \in N*$)

Số sản phẩm phân xưởng làm mỗi ngày theo thực tế là $x+5$ (sản phẩm).

Theo kế hoạch phân xưởng sản xuất 1100 sản phẩm trong

$$1100 : x = \frac{1100}{x} \text{ (ngày).}$$

Thực tế phân xưởng hoàn thành kế hoạch trong:

$$1100 : (x+5) = \frac{1100}{x+5} \text{ (ngày).}$$

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{1100}{x} - \frac{1100}{x+5} = 2 \Leftrightarrow 550(x+5) - 550x = x(x+5)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 25 + 11020 = 11025, \sqrt{\Delta} = 105.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = \dfrac{-5+105}{2} = 50$ (nhận);

$$x_2 = \frac{-5-105}{2} = -55 \text{ (loại).}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng làm được 50 sản phẩm.

Bài toán 3 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Bình Phước 2014 - 2015)*

Cho mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $360\ m^2$. Nếu tăng chiều rộng $2\,m$ và giảm chiều dài $6\,m$ thì diện tích không thay đổi. Tính chu vi của mảnh vườn lúc ban đầu.

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m) (điều kiện $x > 0$)

Chiều dài của mảnh vườn là: $360 : x = \dfrac{360}{x}$ (m)

Chiều rộng mảnh vườn sau khi tăng $2\,\text{m}$ là: $x+2$ (m)

Chiều dài mảnh vườn sau khi giảm $6\,\text{m}$ là: $\dfrac{360}{x} - 6$ (m)

Diện tích mảnh vườn nếu tăng chiều rộng $2\,\text{m}$ và giảm chiều dài đi $6\,\text{m}$ là: $(x+2)(\dfrac{360}{x} - 6)$ (m^2).

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$(x+2)\left(\frac{360}{x} - 6\right) = 360 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 720 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Delta' = 1 + 120 = 121, \sqrt{\Delta'} = 11.$$

Vậy $x_1 = \dfrac{-1+11}{1} = 10$ (nhận), $x_2 = \dfrac{-1-11}{1} = -12$ (loại).

Chiều rộng của mảnh vườn là $10\,\text{m}$

Chiều dài của mảnh vườn là $\frac{360}{10} = 36$ (m)

Chu vi của mảnh vườn là: $(10+36).2 = 92$ (m).

Bài toán 4 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Chuyên ĐHSP Hà Nội 2014 - 2015)*

Cho quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng, một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Gọi C là vị trí xe máy bị hỏng.

Quãng đường AC dài là: $120.\frac{3}{4} = 90$ (km).

Quãng đường CB dài là: $120 - 90 = 30$ (km).

Gọi vận tốc xe máy đi trên quãng đường AC là: x (km/h) (Điều kiện $x > 10$)

Vận tốc xe máy đi trên quãng đường CB là $x - 10$ (km).

Thời gian xe máy đi trên quãng đường AC là $90 : x = \frac{90}{x}$.

Thời gian xe máy đi trên quãng đường CB là

$$30 : (x-10) = \frac{30}{x-10} \text{ (h)}$$

Đổi 10 phút $= \frac{1}{6}$ (h)

Thời gian xe máy đi từ A đến B (kể cả thời gian sửa xe) là:

11 giờ 40 phút - 7 giờ $= \frac{14}{3}$ (h)

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} + \frac{1}{6} = \frac{14}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 110x + 600 = 0$$

$$\Delta' = 3025 - 1800 = 1225, \sqrt{\Delta'} = 35.$$

$$x_1 = \frac{55+35}{3} = 30 \text{ (nhận)}, \; x_2 = \frac{55-35}{3} = \frac{20}{3} \text{ (loại)}.$$

Vận tốc xe máy đi trên quãng đường AC là 30 (km/h).

Thời gian xe máy đi từ A đến C là $\frac{90}{30} = 3$ (h).

Vậy xe máy bị hỏng lúc: $7 + 3 = 10$ (h) (trưa cùng ngày).

Bài toán 5 *(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (chung) chuyên năng khiếu TP. HCM 2014 - 2015)*

Tổng kết học kì II, trường trung học cơ sở N có 60 học sinh không đạt học sinh giỏi, trong đó có 6 em từng đạt học sinh giỏi trong học kì I; số học sinh giỏi học kì II bằng $\frac{40}{37}$ số học sinh giỏi học kì I và có 8% số học sinh của trường không đạt học sinh giỏi học kì I nhưng đạt học sinh giỏi học kì II. Tìm số học sinh giỏi học kì II của trường biết rằng số học sinh của trường không thay đổi trong suốt năm học.

Gọi x là số học sinh của trường $(x \in N, x > 60)$.

Khi đó, số học sinh giỏi ở học kì II là $x - 60$.

Số học sinh giỏi ở học kì I là $x - 60 + 6 - 8\%x = \frac{23}{25}x - 54$.

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$x - 60 = \frac{40}{37}\left(\frac{23}{25}x - 54\right) \Leftrightarrow \frac{1}{185}x = \frac{60}{37} \Leftrightarrow x = 300 \text{ (thỏa)}$$

Vậy số học sinh giỏi học kì II là: $300 - 60 = 240$ (học sinh).

Bài toán 6 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Chuyên tỉnh Long An 2014 - 2015)*

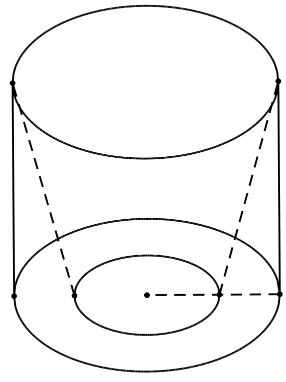
Kì thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên dương lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

Ta có 529 học sinh có điểm bài thi 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lí Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lí Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

Bài toán 7 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 - Thành phố Huế 2014 - 2015)*

Một cái xô bằng I - nốc có dạng hình nón cụt (độ dày của thành xô nhỏ không đáng kể) đựng hóa chất được đặt vào bên trong một cái thùng hình trụ, có miệng xô trùng khít với miệng thùng. Đáy xô dát với đáy thùng và có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ bán kính đáy thùng.



Biết rằng, thùng có nhiều cao bằng đường kính đáy và diện tích xung quanh bằng 8π (dm^2). Hỏi khi xô chứa đầy hóa chất thì dung tích của nó là bao nhiêu lít? (cho $\pi \approx 3{,}14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Gọi R (dm) là bán kính của đáy thùng.

Thùng hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao $h = 2R$ nên diện tích xung quanh của nó là: $S_{xq} = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$ (dm^2).

Nên $4\pi R^2 = 8\pi \Leftrightarrow R^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{R} = 2$ (dm).

Xô có đáy hình nón cụt có hai đáy lần lượt là:

$$R_1 = R = \sqrt{2} \text{ (dm) và } R_2 = \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (dm).}$$

Từ đó ta có chiều cao của xô là: $h = 2R = 2\sqrt{2}$ (dm).

Nên $V = \frac{1}{3}\pi.2\sqrt{2}\left[(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}\right] = \frac{7\sqrt{2}}{3}\pi \approx 10,4 \ (dm^3)$.

Vậy khi xô chứa đầy hóa chất thì dung tích của nó là $10,4$ (lít).

5. CÁC ĐỀ THI NĂM HỌC 2015 - 2016

Bài toán 2 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Long An 2015 - 2016)*

Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội được bổ sung thêm 3 chiếc nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn hàng so với dự định. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe, biết khối lượng hàng chở trên mỗi xe như nhau.

Gọi số xe ban đầu của mỗi xe có là x (xe) (Điều kiện $x \in N^*$).

Số xe lúc sau có là $x+3$ (xe).

Lúc đầu mỗi xe dự định chở là: $36 : x = \frac{36}{x}$ (tấn).

Lúc sau mỗi xe chở là: $36 : (x+3) = \frac{36}{x+3}$ (tấn).

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$.

Phương trình tương đương với

$$36(x+3) - 36x = x(x+3)$$
$$\Leftrightarrow 36x + 108 - 36x = x^2 + 3x$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 108 = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 9 + 432 = 441, \sqrt{\Delta} = \sqrt{441} = 21$$

Vậy $x_1 = \frac{-3+21}{2} = 9$ (nhận); $x_2 = \frac{-3-21}{2} = -12$ (loại).

Bài toán 2 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh An Giang 2015 - 2016)*

Với sự phát triển của khoa học kỹ thuật hiện nay, người ta tạo ra nhiều mẫu xe lăn đẹp và tiện dụng cho người khuyết tật. Công ty A đã sản xuất ra những chiếc xe lăn cho người khuyết tật với số vốn ban đầu là 500 triệu đồng. Chi phí sản để sản xuất ra một chiếc xe lăn là $2.500.000$ đồng. Gía bán ra mỗi chiếc là $3.000.000$ đồng.

a) Viết hàm số biểu diễn tổng số tiền đã đầu tư đến khi sản xuất ra được x chiếc xe lăn (gồm vốn ban đầu và chi phí sản xuất) và hàm số biểu diễn số tiền thu được khi bán ra x chiếc xe lăn.

b) Công ty A phải bán bao nhiêu chiếc xe mới có thể thu hồi được vốn ban đầu.

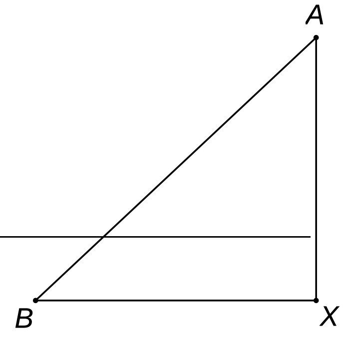
a) Tổng chi phí vốn cố định và vốn sản xuất ra x chiếc xe lăn (đơn vị triệu đồng):

$y = 500 + 2,5x$.

Hàm số biểu diễn số tiền thu được khi bán ra x chiếc xe lăn là: $y = 3x$.

b) Để số tiền bán được và số vốn đầu tư ban đầu bằng nhau, ta có:

$$500 + 2,5x = 3x \Leftrightarrow 0,5x = 500 \Leftrightarrow x = 1000.$$



Vậy công ty A phải bán 1000 chiếc xe lăn mới thu hồi được vốn ban đầu.

Bài toán 3 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Bình Định 2015 - 2016)*

Trên một vùng biên được xem như bằng thẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng hàng qua tọa độ X theo hướng từ Nam tới Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch dũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tàu là 60 km/h. Tính vận tốc của mỗi tàu.

Gọi vận tốc của tàu đánh cá là x (km/h). (Điều kiện $x > 0$).

Vận tốc của tàu du lịch là $x + 12$ (km/h).

Giả sử tàu đánh cá đến điểm A, tàu du lịch đến điểm B. Theo giả thiết, khoảng cách AB là 60 km.

Tàu đánh cá đã đi: $8 - 6 = 2$ (giờ).

Khoảng cách XA dài $2x$ (km).

Tàu du lịch đã đi: $8 - 7 = 1$ (giờ).

Khoảng cách XB dài là: $(x+12).1 = x + 12$ (km).

Theo giả thiết, ta có tam giác XAB vuông tại X.

Do đó $XA^2 + XB^2 = AB^2$ (định lí Pythagore).

Ta có phương trình:

$$(2x)^2 - (x+12)^2 = 60^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x^2 + 24x + 144 = 3600$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 24x - 3456 = 0$$

Xét biệt thức $\Delta' = 144 + 17280 = 17424 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 132$.

$$x_1 = \frac{-12+132}{5} = 24 \text{ (nhận)}; \; x_2 = \frac{-12-132}{5} = -28,8 \text{ (loại)}.$$

Vậy vận tốc của tàu đánh cá là 24 (km/h).

Vận tốc của tàu du lịch là: $24 + 12 = 36$ (km/h).

Bài toán 4 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THP, Tỉnh Quảng Ngãi 2015 - 2016)*

Hai công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì xong một con đường. Nếu mỗi đội làm riêng để xong con đường thì thời gian đội thứ nhất ít hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội làm xong con đường trong thời gian bao lâu?

Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng xong công việc là x (giờ) (Điều kiện $x > 0$).

Thời gian đội thứ hai làm riêng xong công việc là $x + 6$ (giờ).

Trong 1 giờ:

Đội thứ nhất làm riêng được: $1 : x = \dfrac{1}{x}$ (công việc)

Đội thứ hai làm riêng được: $1 : (x+6) = \dfrac{1}{x+6}$ (công việc)

Hai đội làm chung được: $1:4=\frac{1}{4}$ (công việc).

Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x+4(x+6)=x(x+6)$$
$$\Leftrightarrow 4x+4x+24=x^2+6x\Leftrightarrow x^2-2x-24=0$$
$$\Delta'=1+24=25,\sqrt{\Delta'}=5.$$

Vậy $x_1=1+5=6$ (nhận); $x_2=1-5=-4$ (loại).

Thời gian đội thứ nhất làm riêng xong công việc là 6 giờ.

Thời gian đội thứ hai làm riêng xong công việc là: $6+6=12$ (giờ).

Bài toán 5 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, TP. Hà Nội 2015 - 2016)*

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2 km/giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Gọi vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là x (km/giờ) (Điều kiện $x>2$).

Tàu tuần tra xuôi dòng với vận tốc $x+2$ (km/giờ) và ngược dòng với vận tốc $x-2$ (km/giờ).

Thời gian tàu tuần tra chạy xuôi dòng là:

$$48:(x+2)=\frac{48}{x+2} \text{ (giờ).}$$

Thời gian tàu tuần tra chạy ngược dòng là:

$$60:(x-2)=\frac{60}{x-2} \text{ (giờ).}$$

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{60}{x-2}-\frac{48}{x+2}=1\Leftrightarrow 60(x+2)-48(x-2)=(x-2)(x+2)$$
$$\Leftrightarrow 60x+120-48x+96=x^2-4$$
$$\Leftrightarrow x^2-12x-220=0$$
$$\Delta'=36+220=256,\sqrt{\Delta'}=16.$$

Ta có $x_1=\frac{6+16}{1}=22$ (nhận), $x_2=\frac{6-16}{1}=-10$ (loại).

Vậy vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là 22 km/giờ.

Bài toán 6 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Phú Thọ 2015 - 2016)*

Số tiền mua 1 quả dừa và một quả thanh long là 25 nghìn đồng. Số tiền mua 5 quả dừa và 4 quả thanh long là 120 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi quả dừa và mỗi quả thanh long là bao nhiêu? Biết rằng mỗi quả dừa có giá như nhau và mỗi quả thanh long có giá như nhau.

Gọi giá tiền mua 1 quả dừa là x (nghìn đồng), giá tiền mua 1 quả thanh long là y (nghìn đồng) (Điều kiện: $x,y>0$).

Mua 1 quả dừa và 1 quả thanh long hết 25 nghìn đồng, ta có phương trình: $x+y=25$ (1)

Mua 5 quả dừa và 4 quả thanh long hết 120 nghìn đồng, ta có phương trình: $5x+4y=120$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 5x+4y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ 5(25-y)+4y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ 125-5y+4y=120 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ 125-y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=5 \end{cases}.$$

Vậy giá tiền mỗi quả dừa là 20 nghìn đồng, giá tiền mỗi quả thanh long là 5 nghìn đồng.

Bài toán 7 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Tỉnh Thái Bình 2015 - 2016)*

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $168m^2$. Nếu giảm chiều dài đi $1m$ và tăng chiều rộng thêm $1m$ thì mảnh vườn trở thành hình vuông. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Gọi chiều rộng mảnh vườn là x (m) (Điều kiện $x>0$)

Chiều dài mảnh vườn là $\dfrac{168}{x}$ (m).

Nếu giảm chiều dài đi $1m$ thì cạnh đó còn là $\dfrac{168}{x}-1$ (m), tăng chiều rộng thêm $1m$ thì cạnh đó là $x+1$ (m), mảnh vườn trở thành hình vuông nên ta có phương trình: $\dfrac{168}{x}-1=x+1$.

Do đó ta có:

$$168=x(x+2) \Leftrightarrow x^2+2x-168=0$$

$$\Delta'=1+168=169, \sqrt{\Delta'}=13.$$

Vậy $x_1=\dfrac{-1+13}{1}=12$ (nhận), $x_2=\dfrac{-1-13}{2}=-14$ (loại).

Vậy mảnh vườn có chiều rộng là 12 m, chiều dài là $\dfrac{168}{12}=14$ (m).

Bài toán 8 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, TP. Hồ Chí Minh 2015 - 2016)*

Một người vận động viên tham gia cuộc thi đấu quần vợt. Cứ hai người trong họ chơi với nhau đúng một trận. Người thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, người thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận, ..., người thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu quần vợt không có kết quả hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+...+y_{10}^2.$$

Mỗi người đều chơi 9 trận với 9 người khác và không có trận hòa. Do đó:

$$x_1+y_1=x_2+y_2=...=x_{10}+y_{10}=9.$$

Mà tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua, do đó:

$$x_1+x_2+...+x_{10}=y_1+y_2+...+y_{10}.$$

Ta có:

$$(x_1^2+x_2^2+...+x_{10}^2)-(y_1^2+y_2^2+...+y_{10}^2)$$
$$=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+...+(x_{10}^2-y_{10}^2)$$

$$= 9(x_1 - y_1) + 9(x_2 - y_2) + ... + 9(x_{10} - y_{10})$$
$$= 9(x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + ... + x_{10} - y_{10})$$
$$= 9[(x_1 + x_2 + ... + x_{10}) - (y_1 + y_2 + ... + y_{10})] = 0.$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$.

Bài toán 9 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Trường chuyên ĐHSP TP. Hồ Chí Minh 2015 - 2016)*

Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Sau khi xe tải xuất phát một thời gian thì một xe khách cũng xuất phát từ A với vận tốc 50 km/h và nếu không có gì thay đổi thì sẽ đuổi kịp xe tải tại B. Nhưng sau khi đi được một nửa quãng đường AB, xe khách tăng vận tốc lên 60 km/h nên đến B sớm hơn xe tải 16 phút. Tính quãng đường AB.

Gọi quãng đường AB dài là x (km), thời gian từ lúc xe tải xuất phát đến lúc xe khách xuất phát là y (giờ) (Điều kiện $x, y > 0$).

Đổi 16 phút $= \frac{4}{15}$ giờ.

Thời gian xe tải đi từ A đến B là $\frac{x}{40}$ (h), thời gian xe khách đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h là $\frac{x}{50}$ (h), ta có phương trình:

$\frac{x}{40} = y + \frac{x}{50}$ (1)

Thời gian thực tế xe khách đi $\frac{1}{2}.\frac{x}{5} + \frac{1}{2}.\frac{x}{60}$ (h), ta có phương trình:

$\frac{x}{40} = \frac{1}{2}.\frac{x}{50} + \frac{1}{2}.\frac{x}{60} + \frac{4}{15} + y \Leftrightarrow \frac{x}{40} = y + \frac{11x}{600} + \frac{4}{15}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{40} = y + \frac{x}{50} \\ \frac{x}{40} = y + \frac{11x}{600} + \frac{4}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{600} = \frac{4}{15} \\ \frac{x}{40} = y + \frac{x}{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 0,8 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

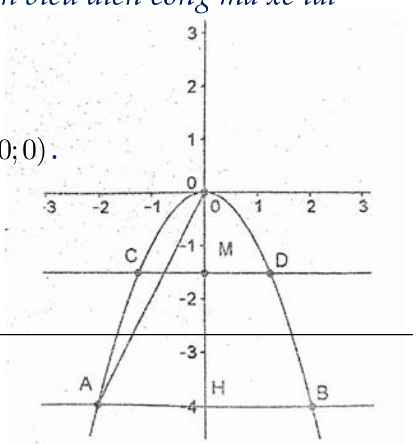
Vậy quãng đường AB dài 160 km.

Bài toán 10 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, Trường chuyên ĐHSP Hà Nội 2015 - 2016)*

Một xe tải có chiều rộng $2,4m$ và chiều cao $2,5m$ muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là $4m$ và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}m$ (bỏ qua độ dày của cổng).

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi parabol (P) $y = ax^2$ với $a < 0$ hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

2) Hỏi xe tải có thể đi qua cổng có được không? Tại sao?



1) Đỉnh cổng là đỉnh của parabol $y = ax^2$ $(a < 0)$, đỉnh cổng là $O(0;0)$.

Gọi hai chân cổng là A, B. AB cắt Oy tại H.

Ta có: $AH = HB = \frac{AB}{2}, OA = OB = 2\sqrt{5}$

(A, B, H nằm dưới trục hoành).

ΔHOA vuông tại H.

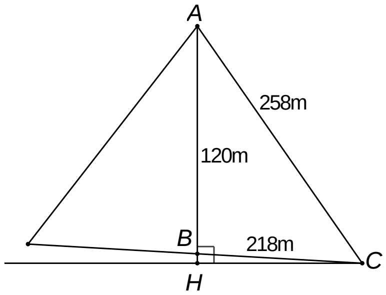
Suy ra $OH^2 + AH^2 = OA^2$ (định lí Pythagore)

$$OH^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2^2 = 16 \Rightarrow OH = 4.$$

Do đó $H(0;-4)$. Nên $A(-2;4), B(2;-4)$.

$$A \in (P) \text{ nên } -4 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = -1.$$

2) Gọi giao điểm của đường thẳng đi qua điểm cao nhất của xe tải, song song với trục hoành với (P) là C, D, CD cắt Oy tại M.



Phương trình đường thẳng CD là $y = 1,5$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và CD.

$$-x^2 = 1,5 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Do đó $CD = \sqrt{6}$. Mà $\sqrt{6} > 2,4$.

Tại độ cao $2,5$ m thì chiều rộng của cổng là $\sqrt{6}$ lớn hơn $2,4m$ là chiều rộng của xe tải. Như vậy xe tải có thể qua cổng được.

Bài toán 11 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường PTNK ĐHQG, TP. HCM 2015 - 2016)*

Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 bài toán. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian, vào khoảng cuối tháng 3 (tháng 3 có 31 ngày) thì An bị bênh, phải nghĩ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục, trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi bạn An phải nghỉ giải toán ít nhất bao nhiêu ngày?

Gọi số ngày An giải toán trước khi bệnh là x (ngày) (Điều kiện $x \in N*$, $x < 31$) và số ngày An nghỉ giải toán là y (ngày) (Điều kiện $y \in N$)

Thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 là $31 + 30 = 61$ (ngày).

Do vậy số bài toán An dự định giải là $3.61 = 183$ (bài toán).

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$3.x + 16 + 4.(61 - x - y - 7) = 183 \Leftrightarrow -x - 4y + 232 = 183$$

$$\Leftrightarrow 4y = 49 - x \Leftrightarrow y = \frac{49 - x}{4}.$$

Mà $x < 31$. Do đó $y > \dfrac{49 - 31}{4} = 4,5$. Khi đó $x = 49 - 4y = 29$.

Vậy bạn An phải nghỉ giải toán ít nhất 5 ngày.

Bài toán 12 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường PTNK ĐHQG, TP. HCM 2015 - 2016)*

Để khuyến khích phong trào học tập, một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh. Ở mỗi đợt thi, có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải. Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi, người ta nhận thấy rằng với hai đợt thi bất kì luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả hai đợt thi đó. Chứng minh rằng:

a) Có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

a) Xét đợt thi thứ nhất. Theo giả thiết có đúng 1 học sinh được trao giải trong hai đợt thi bất kì, vì vậy trong 7 đợt thi còn lại, trong ba học sinh được trao giải đợt thi thứ nhất có một học sinh được trao giải ít nhất 3 lần (vì $7:3=2$ (dư 1))

Vậy có một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

b) Từ a) giả sử A là học sinh được trao giải ở bốn đợt thi. Xét một đợt thi bất kì trong bốn đợt thi còn lại. Vì có đúng một học sinh được trao giải trong hai đợt thi bất kì. Do vậy đợt thi này, bốn đợt thi mỗi đợt thi có một học sinh trao giải. Như vậy học sinh đó phải là A (nếu không là A thì đợt này có đến bốn học sinh được trao giải). Vì xét đợt thi bất kì nên A được trao giải trong bốn đợt thi còn lại.

A được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

Vậy có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

Bài toán 13 *(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Chuyên, Tỉnh Bình Định 2015 - 2016)*

Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi trên các dãy ghế có chỗ ngồi bằng nhau. Nếu ta bớt đi 2 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 2 người thì vừa đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu chỗ ngồi.

Gọi số dãy ghế lúc đầu là x (dãy ghế) (Điều kiện $x \in N^*, x > 2$)

Mỗi dãy ghế được xếp số chỗ ngồi là $\frac{80}{x}$ (chỗ ngồi).

Nếu bớt đi 2 dãy ghế thì còn $x-2$ (dãy ghế) mỗi dãy ghế được xếp chỗ ngồi là $\frac{80}{x-2}$ (chỗ ngồi).

Theo giả thiết, ta có phương trình $\frac{80}{x-2} - \frac{80}{x} = 2$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&40x - 40(x-2) = x(x-2) \\
&\Leftrightarrow 40x - 40x + 80 = x^2 - 2x \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \\
&\Delta' = 1 + 80 = 81, \sqrt{\Delta'} = \sqrt{81} = 9.
\end{aligned}$$

Vậy $x_1 = \frac{1+9}{1} = 10$ (nhận), $x_2 = \frac{1-9}{1} = -8$ (loại).

Vậy số dãy ghế lúc đầu là 10 dãy.

Mỗi dãy ghế được xếp số chỗ ngồi là $\frac{80}{10} = 8$ (chỗ ngồi).