

CHỦ ĐỀ 4**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP**

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\bullet f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]'$$

$$\bullet \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$\bullet n.f'(x).f(x) = [f(x)^n]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$$

DẠNG 1

$$\begin{cases} f'(x) = g(x)h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx \\ \bullet f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) &\Leftrightarrow \int f'(x) h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f(x)] = \int g(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\bullet f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } f(x) \text{ ta được } \frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = - \int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

$$\bullet f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = - \int p(x) dx$$

Suy ra

$$3. \text{ Điều kiện hàm ẩn có dạng: } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = -1. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}; x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$$\forall x \in [1;2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x)dx$$

- A. $I = \frac{7}{6}$. B. $I = \frac{5}{6}$. C. $I = \frac{37}{6}$. D. $I = \frac{1}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^2(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(1) = 0, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x)dx.$$

- A. 1. B. $\frac{1}{2024}$. C. 2024. D. 0.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$

$$\text{với } \forall x \in [1;4]. \text{ Biết } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ tính } I = \int_1^4 f(x)dx$$

- A. $I = \frac{1186}{45}$. B. $I = \frac{1186}{9}$. C. $I = \frac{1186}{5}$. D. $I = \frac{1186}{41}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tính } I = \int_1^2 f(x)dx$$

- A. $I = e^2 + 1$. B. $I = e - 1$. C. $I = e^2 - e$. D. $I = e$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } I = \int_2^3 f(x)dx$$

- A. $I = \frac{31}{2}$. B. $I = -\frac{31}{2}$. C. $I = \frac{61}{4}$. D. $I = -\frac{61}{4}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

- A. $I = 2\sqrt{e}$ B. $I = e - \sqrt{e}$ **C. $I = 2e - 2\sqrt{e}$** D. $I = 2e + 2\sqrt{e}$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính

$I = \int_1^2 f^2(x) dx$.

- A. $I = \frac{15}{2}$** B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{19}{2}$ D. $I = 15$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$ **B. 8.** C. 10. D. 4.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$.

Tính giá trị của $T = f^2(2)$

- A. $\frac{160}{15}$ **B. $\frac{268}{15}$** C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{268}{30}$

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

◆ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x)h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$$

◆ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$

Phương pháp giải:

◆ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

◆ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

A. $I = 2 \ln 2$. B. $I = \ln 2$. C. $I = 1 + \ln 2$. D. $I = 1 + 2 \ln 2$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

Tính $I = \int_1^2 (2x+2)f(x) dx$.

A. $I = e^2$. B. $I = 1 + e$. C. $I = 1 + e^2$. D. $I = e^2 - e$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = 1$. B. $I = \frac{\pi}{2}$. C. $I = -1$. D. $I = -\pi$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

- A. $\frac{25}{6}$. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $[2f(x) + 1 - x^2]f'(x) = 2x[1 + f(x)] \quad \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \quad \forall x \in [0; 1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. 2. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{21}{4}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \quad \forall x \in [0; 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{1}{2018.2020}$. B. $\frac{1}{2019.2020}$. C. $\frac{1}{2020.2021}$. D. $\frac{1}{2019.2021}$.

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn
$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$$
,

với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1) dx$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Câu 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 4]$, thỏa mãn
$$\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$$
 với mọi

$x \in [1; 4]$. Tính tích phân $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$.

A. $3 \ln 2$.

B. $4 \ln 2$.

C. $6 \ln 2$.

D. $8 \ln 2$.

Câu 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2017x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

Tính tích phân $I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = xf'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$

A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$ B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$ C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$ D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Tính phân $\int_0^2 f^2(x) dx$

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a - b$ bằng

A. 1. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$; $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x - 1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b, (a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của $a + b^2$ bằng

A. 4. B. 0. C. 2. D. -1.